



Journal

für die

reine und angewandte Mathematik.

In zwanglosen Heften.

Herausgegeben

von

A. L. Crelle.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preufsischer Behörden.

Zwei und zwanzigster Band.

In vier Heften.

Mit zwei Figurentafeln.

Berlin, 1841.
Bei G. Reimer.

Et se trouve à Paris chez Mr. Bachelier (successeur de Mme Ve Courcier),
Libraire pour les Mathématiques etc. Quai des Augustins No. 55.

Inhaltsverzeichnifs
des zwei und zwanzigsten Bandes, nach den Gegenständen.

I. Reine Mathematik.

1. Analysis.

1.

Ueber die Auflösung der transcendenten Gleichungen.

(Vom Herrn Dr. *M. A. Stern* zu Göttingen.)

(Eine von der Königlich-Dänischen Gesellschaft der Wissenschaften gekrönte Preisschrift.)

Ἀλλ' ἐθέλω ἴδμεν καὶ πειρηθήμεναι ἄντην.

Vorwort.

Die Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Copenhagen hatte im Jahre 1837 folgende Preisfrage gestellt.

Proponitur quaestio de aequationum transcendentium radicibus indagandis et quidem postulatur:

1. Ut plene et perfecte deducantur interque se comparentur methodi ipsarum radices inveniendi, ita ut quaenam cuiuscunque sint virtutes quaenam imperfectiones accurate indicetur, quibusve casibus unaquaeque sit magis minusve accommodata.
2. Ut diligenter inquiratur quatenus vel quibus saltem adhibitis cautionibus methodos, quibus vulgo in algebraicis aequationibus radices reales aut ab imaginariis separentur aut inter se, ad transcendentes quoque extendere liceat.
3. Ut exponatur conspectus, quantum fieri possit, plenus tam specialium aequationum quam generum earum, quae quidem forma transcendenti in gravissimis analyseos applicatae partibus occurrunt, simul cum regulis, quin fortasse tabulis ad usum ipsum accomodatis, quibus revera faciliores ac breviores reddantur calculi illi radicum, alias saepe prolixissimi.

Das Folgende ist ein genauer Abdruck der Schrift, die ich der Königl. G. d. W. im December 1837 überreicht habe; ich habe mir nur einige aufserwesentliche Aenderungen erlaubt, wie namentlich, dafs ich da, wo ich, der Bestimmung der Schrift gemäfs, von meinen eigenen Arbeiten als denen eines Dritten sprechen mufste, dies nun geändert habe.

Göttingen, den 5. Januar 1840.

Die Königliche Societät der Wissenschaften hat als Preisfrage die Aufgabe gestellt, die Wurzeln der transcendenten Gleichungen zu finden. Indem ich es unternehme, diese Frage zu beantworten, will ich zuvor Folgendes bemerken. Ich setzte voraus, dafs die Königl. Societät d. W. nur die Auflösung der *numerischen* transcendenten Gleichungen verlangt, und zwar blofs solcher, in welchen nur eine unbekannte Gröfse vorkommt. Eine allgemeine Auflösung der *litteralen* transcendenten Gleichungen kann wohl nach dem gegenwärtigen Zustande der Wissenschaft nicht verlangt werden, da man noch nicht im Stande ist, dasselbe in Beziehung auf die litteralen algebraischen Gleichungen zu leisten. Aus demselben Grunde glaube ich, die Aufgabe, aus mehreren transcendenten Gleichungen, in welchen eben so viele unbekannte Gröfsen vorkommen, die Werthe dieser Gröfsen zu finden, bei Seite setzen zu dürfen. Um diese Aufgabe zu lösen, müfste man alle unbekannten Gröfsen, bis auf eine, eliminiren. Diese Elimination aber, welche schon in dem Falle, wenn die Gleichungen algebraische sind, bedeutende Schwierigkeiten darbietet, stöfst bei den transcendenten Gleichungen auf unübersteigliche Hindernisse. Ich werde daher die Untersuchung darauf beschränken, zu zeigen, wie man bei jeder gegebenen numerischen transcendenten Gleichung die *reellen* Wurzeln mit beliebiger Genauigkeit *berechnen* und das Vorhandensein der imaginären Wurzeln *entdecken* kann. Was dagegen die numerischen Werthe der imaginären Wurzeln betrifft, so kann deren Berechnung um so weniger verlangt werden, da bis jetzt keine Methode existirt, die solches mit Bequemlichkeit für die algebraischen Gleichungen leistet. Die einzige sichere Methode, welche man besitzt, um die Werthe der imaginären Wurzeln algebraischer Gleichungen zu finden, ist die, welche *Fourier* zuerst angedeutet hat. Ich werde später zu zeigen suchen, in wiefern diese Methode auf die transcendenten Gleichungen anwendbar ist.

Die Societät d. W. hat in dem Programme die Frage in drei Theile getheilt. Ich werde, dieser Eintheilung folgend, zuerst von den vorhandenen Methoden zur Auflösung der transcendenten Gleichungen sprechen; alsdann zeigen, wie man diese Gleichungen wirklich auflösen kann, und zuletzt Anwendungen davon auf besonders häufig vorkommende Beispiele machen.

I. Aeltere Methoden.

1. Eine besondere Behandlung der Auflösung der transcendenten Gleichungen findet sich, so viel mir bekannt ist, nirgendwo. In einzelnen Fällen hat man solche Gleichungen entweder durch blofses Probiren aufzulösen gesucht, welches Verfahren, als unsicher und unwissenschaftlich, keine weitere Beachtung verdient, oder man hat die bereits bekannten Methoden zur Auflösung der algebraischen Gleichungen auch auf die transcendenten ausgedehnt. Bekanntlich hat aber zuerst *Lagrange* eine sichere Methode zur Auflösung der algebraischen Gleichungen gegeben, während die älteren Methoden mit Mängeln behaftet sind, die sie ganz unbrauchbar machen und die ich hier nicht besonders hervorzuheben brauche, da dieser grofse Mathematiker sie bereits in das hellste Licht gesetzt hat. Es versteht sich daher von selbst, dafs die Anwendung dieser älteren Methoden auf die transcendenten Gleichungen dieselben Mängeln haben; wo sie häufig noch viel bedeutender sein können.

So z. B. wendet *Euler* *) die *Newton*sche Approximations-Methode an, um mehrere transcendente Gleichungen aufzulösen. Die Mängel dieser Methode hat aber bereits *Lagrange* **) nachgewiesen. An einem andern Orte ***) hat *Euler* die *Bernoulli*sche Methode angewandt um die kleinste Wurzel der Gleichung

$$\tfrac{1}{2} = z - \frac{z^3}{2.3} + \frac{z^5}{2.3.4.5} - \frac{z^7}{2.3.4.5.6.7} + \dots$$

zu finden, wobei er jedoch selbst bemerkt, dafs diese Methode nur selten zur Erfindung der Wurzeln transcendenter Gleichungen angewandt werden könne. Dieselbe Methode hat *Euler* auch später benutzt †), um die kleinsten Wurzeln einiger transcendenten Gleichungen zu finden. Die ausführliche Darstellung, welche *Euler* ††) der Bernoullischen Methode gewidmet hat und die Bemerkungen, welche *Lagrange* später hinzugefügt hat, zeigen zur Genüge, dafs die Anwendung dieser Methode, selbst auf algebraische Gleichungen, sehr beschränkt ist und daher noch weniger zur allgemeinen Auflösung der transcendenten Gleichungen gebraucht werden kann. Man er-

*) Instit. calc. diff. T. II. §. 242 seqq.
**) Résol. des équat. num. No. V.
***) Introd. in anal. inf. l. I. §. 355.
†) Nova act. Acad. Petr. Tom. IX. p. 28 seqq.
††) Introd. in an. inf. l. I. C. 17.

hält nemlich vermittelst dieser Methode nur Näherungswerthe der gröfsten und kleinsten Wurzel, und zwar nur in dem Falle, wenn die Gleichung kein Paar zusammengehörender imaginärer Wurzeln hat, deren Product gröfser ist als das Quadrat der gröfsten reellen Wurzel. Im entgegengesetzten Falle ist die Methode unbrauchbar. In der neuesten Zeit hat freilich *Fourier* *) Andeutungen gegeben, wie die Bernoullische Methode verbessert und zur Auffindung aller Wurzeln gebraucht werden könne und ich **) habe nachgewiesen, dafs sich diese Andeutungen allerdings realisiren lassen. In wie fern nun diese Ausbildung der Bernoullischen Methode sich auch auf die transcendenten Gleichungen anwenden lasse, werde ich später untersuchen.

Die *Lagrange*'sche Methode zur Auflösung der algebraischen Gleichungen ist zwar, von theoretischer Seite betrachtet, streng richtig, aber in ihrer Anwendung, wie bekannt, grofsen Schwierigkeiten unterworfen. Ihr wesentlichster Mangel liegt darin, dafs man eine Zahl kennen mufs, die kleiner als der kleinste Unterschied der Wurzeln ist. Die Aufsuchung dieser Zahl aber erfordert, sobald die Gleichung von einem hohen Grade ist, fast unausführbare Rechnungen; wie es *Lagrange* selbst schon bemerkt hat. Noch viel schwieriger mufs die Aufsuchung dieser Zahl sein, sobald die gegebene Gleichung eine transcendente ist, und man kann sie in diesem Falle, wie auch schon *Poisson* bemerkt hat ***), als völlig unausführbar ansehen.

2. In dem 24sten Bande der Memoiren der Berliner Academie hat *Lagrange* eine Methode gegeben, um die Wurzeln der algebraischen Gleichungen durch unendliche Reihen auszudrücken, und es haben später mehrere bedeutende Mathematiker diese Untersuchung aufgenommen und vervollkommnet. Diese Methode kommt zuletzt auf die Umkehrung der Reihen zurück, indem sie zeigt wie man, wenn eine Gleichung

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 \dots$$

gegeben ist, den Werth von x durch eine nach Potenzen von y geordnete Reihe ausdrücken kann, so dafs man

$$x = A + By + Cy^2 + \dots$$

hat. *Lagrange* bemerkt im Eingange zu dieser Abhandlung, dafs diese

---

*) Analyse des équations p. 6 et suiv.
**) Crelle Journ. für die Math. Bd. 11. p. [illegible]
***) Journ. de l'école polyt. cah. [illegible] p. [illegible]

Methode auch bei den transcendenten Gleichungen brauchbar sei, welche Logarithmen und Kreisbogen enthalten, woraus also hervorgeht, dafs er sie selbst nicht für eine allgemein auf transcendente Gleichungen anwendbare Methode gehalten hat. In der That ist sie aber auch erheblichen Schwierigkeiten unterworfen. Soll nemlich der Werth von x durch die nach Potenzen von y geordnete Reihe gefunden werden, so mufs diese Reihe convergiren; sie kann aber auch häufig divergiren und die Untersuchung, ob das eine oder das andere Statt findet, ist schwierig, da die Reihen häufig sehr verwickelt sein können. *Lagrange* selbst hat zwar gesucht Kennzeichen anzugeben, vermittelst welcher man die Convergenz oder Divergenz beurtheilen könne: diese Kennzeichen sind aber schon aus dem Grunde ungenügend, weil sie auf einer falschen Definition der Convergenz beruhen. *Lagrange* nennt nemlich convergirend eine Reihe, deren Glieder unendlich klein werden, und er sucht daher nur zu bestimmen, ob die Reihen, welche die Wurzeln der Gleichungen ausdrücken, diese Eigenschaft haben, oder nicht. Es ist aber hinlänglich bekannt, dafs die Glieder einer Reihe unendlich klein werden können, während die Reihe dennoch divergirt, das heifst, während ihr Werth über alle Grenzen hinaus wächst und also zur Berechnung untauglich ist. Hierzu kommt noch, dafs wenn man auch den Werth einer Wurzel durch eine convergirende Reihe gefunden hat, es doch äufserst schwierig ist, die verschiedenen Reihen, welche verschiedene Wurzeln ausdrücken, zu finden und von einander zu unterscheiden; wie man es schon aus *Lagrange's* Untersuchungen sehen kann, die sich nur auf algebraische Gleichungen beziehen. Auch darf nicht übersehen werden, dafs es nicht möglich ist, auf diesem Wege die einzelnen Wurzeln allmälig nach ihrer Gröfse zu finden; was doch ein wesentliches Erfordernifs einer tauglichen Auflösungsmethode ist, da es besonders bei den transcendenten Gleichungen in der Regel nur darauf ankommt, die kleinsten Wurzeln zu kennen. In dem besonderen Falle, wo man den Werth der Wurzeln schon beinahe kennt, kann diese Methode allerdings oft mit Nutzen gebraucht werden, um genauere Werthe zu finden.

3. Einen anderen Weg hat *Cauchy* eingeschlagen *). Seine Methode beruht auf dem Verfahren, dessen sich *Legendre* bedient **), um einen

---

*) Leçons sur le calcul différentiel ch. 14.
**) Théorie des nombres T. 1. art. 119.

ersten Näherungswerth einer imaginären Wurzel algebraischer oder transcendenter Gleichungen zu finden. Ist nemlich die Gleichung $Fx = 0$ gegeben, so setzt *Legendre* $x = \alpha + \beta\sqrt{-1}$, wo α und β beliebige reelle Zahlen sind, und substituirt diesen Werth in $F(x)$, so dafs $F(\alpha + \beta\sqrt{-1}) = P + Q\sqrt{-1}$ ist, wo P und Q wieder reelle Gröfsen sind. Ferner substituire man diese Werthe von x in $\frac{\partial Fx}{\partial x}$ und es sei unter dieser Voraussetzung $\frac{\partial Fx}{\partial x} = M + N\sqrt{-1}$. Nimmt man nun eine reelle oder imaginäre unbestimmte Gröfse ω, die aber im Verhältnifs zu $\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}$ sehr klein ist, so hat man, wenn man $x = \alpha + \beta\sqrt{-1} + \omega$ setzt und die höheren Potenzen von ω vernachlässigt,

$$F(\alpha + \beta\sqrt{-1} + \omega) = P + Q\sqrt{-1} + \omega(M + N\sqrt{-1}).$$

Da nun ω willkürlich ist, so kann man

$$\omega(M + N\sqrt{-1}) = -n(P + Q\sqrt{-1})$$

setzen, wo n ein ächter Bruch ist. Man hat also einen neuen Näherungswerth

$$F(x) = (1-n)(P + Q\sqrt{-1}),$$

welcher im Verhältnifs von $1-n$ zu 1 kleiner ist als der frühere Näherungswerth. Fährt man auf diese Weise fort, indem man wieder x um eine unbestimmte reelle oder imaginäre Gröfse wachsen läfst, deren Werth man nachher genauer bestimmt, so kann man sich dem wahren Werthe von x immer mehr nähern. Würde $\frac{\partial Fx}{\partial x}$ durch die Substitution eines Werthes von $x = \alpha + \beta\sqrt{-1}$ auf Null reducirt, so müfste man, statt dieser Function, die Function $\frac{\partial^2 Fx}{\partial x^2}$ betrachten und überhaupt mufs man sich, wenn mehrere der Functionen $\frac{\partial Fx}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 Fx}{\partial x^2}$, ... durch einen Werth $x = \alpha + \beta\sqrt{-1}$ auf Null reducirt werden, an den ersten Differentialquotienten halten, der nicht Null wird. Auf diese Weise glaubt *Legendre* zu beweisen, dafs jede algebraische oder transcendente Gleichung eine Wurzel von der Form $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ hat, wo β auch Null sein kann. Dieses Resultat ist aber nicht richtig, und es läfst sich auch leicht zeigen, dafs *Legendre*'s Verfahren mit mehreren bedeutenden Irrthümern behaftet ist. *Legendre* selbst hat schon eine Mangelhaftigkeit desselben bemerkt *), welche darin besteht, dafs man den ersten Näherungswerth ganz willkürlich annimmt, so dafs dieser hypothetische Werth vom wahren Werthe

*) Theor. des nombres ed. 3. T. II. p. 490.

bedeutend abweichen kann und man daher nothwendig sehr weitläuftige Rechnungen machen mufs. Dies ist aber nur eine Unbequemlichkeit. Unrichtig ist es dagegen, dafs *Legendre* bei der Entwicklung von $F(\alpha+\beta\sqrt{-1})$ nur die zwei ersten Glieder berücksichtigt, die vermittelst der *Taylor*'schen Reihe gefunden werden, und den Rest ganz vernachlässigt. Dieses Verfahren, welches der *Newton*'schen Approximationsmethode ähnlich ist, leidet auch an demselben Fehler, indem die successiven Näherungswerthe, statt gegen den wahren Werth zu convergiren, auch divergiren können, da man Glieder vernachlässigt, deren Werth man nicht kennt. Ferner kann es aber auch sein, dafs die Substitution von $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ für x einen der Differentialquotienten auf $\frac{1}{0}$ reducirt, und alsdann hört natürlich die Brauchbarkeit des Verfahrens ganz auf.

Diese Fehler hat *Cauchy* dadurch vermieden, dafs er nicht eine beliebige Function $F(x)$ betrachtet, sondern die Untersuchung auf Functionen beschränkt, welche nebst ihren sämmtlichen Differentialquotienten für alle endlichen reellen oder imaginären Werthe von x endlich und stetig bleiben, und unendlich grofs werden, wenn der Modulus der Veränderlichen x unendlich grofs wird. *Cauchy* zeigt alsdann, wie man bei solchen Functionen nach *Legendre's* Verfahren unter gewissen Voraussetzungen Näherungswerthe finden und die Grenzen der begangenen Fehler bestimmen kann. Mithin ist diese Methode keine allgemein gültige. Ich begnüge mich daher, nur Folgendes darüber zu bemerken. Vermittelst dieser Methode will man sowohl die imaginären als die reellen Wurzeln finden. Soll die Wurzel reell sein, so mufs der imaginäre Theil des gefundenen Werthes verschwinden. Hat nun aber die Gleichung reelle Wurzeln und man hat durch fortgesetzte Annäherung einen Werth $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ gefunden, in welchem β sehr klein ist, so kann man immer noch nicht wissen, ob β eigentlich gleich Null und also eine reelle Wurzel der Gleichung $=\alpha$ ist, oder ob die Gleichung eine imaginäre Wurzel $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ hat, in welcher β sehr klein ist. Grade die reellen Wurzeln, welche vom wichtigsten Interesse sind, können also nach dieser Methode am wenigsten sicher gefunden werden.

4. In der neuesten Zeit haben wir durch *Fourier* eine Methode zur Auflösung der algebraischen Gleichungen erhalten, welche, insofern man diese Auflösung auf die Bestimmung des Werthes der reellen Wurzeln und das Erkennen der imaginären einschränkt, vollkommen genügt. *Fourier* hat nun mehrfach die Behauptung ausgesprochen, dafs seine Methode nicht

auf die algebraischen Gleichungen beschränkt sei, sondern auch auf die transcendenten angewandt werden könne. Es sollte sogar das leider nicht erschienene fünfte Buch seines Werkes über die Gleichungen, wie wir aus dem *Exposé synoptique* ersehen, diese Anwendung seiner Methode ausführlich behandeln. Ich werde mich im Folgenden bemühen, mit Hülfe der Andeutungen, die *Fourier* an mehreren Orten, und besonders in dem erwähnten *Exposé* gegeben hat, diesen Theil seines Werkes wieder herzustellen und zu zeigen, wie man vermittelst der *Fourier*schen Methode die transcendenten Gleichungen vollständig auflösen kann, und hoffe auf diese Weise der zweiten Anforderung der Societät d. W. Genüge zu leisten.

II. Auflösung der transcendenten Gleichungen.

5. Der Begriff der *Wurzel* einer *algebraischen* Gleichung kann auf zweierlei Arten erklärt werden, die ihrem Wesen nach identisch sind. Ist nemlich eine solche Gleichung

$$1. \quad f(x) = 0$$

gegeben, so nennt man jeden Werth von x, der statt x in fx substituirt, diese Function auf Null reducirt, eine Wurzel der Gleichung (1.). Aufserdem weifs man aber auch, dafs $f(x)$ das Product einer Anzahl einfacher reeller oder imaginärer Factoren ist, so dafs man

$$f(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3) \dots.$$

hat, wo α_1, α_2, α_3 .... reelle oder imaginäre Gröfsen sind. Da nun $f(x)$ nur dann den Werth Null annehmen kann, wenn einer dieser Factoren verschwindet und unter dieser Voraussetzung gleich Null wird, da das Product der übrigen Factoren immer eine endliche Gröfse bleibt, so kann man auch sagen: die Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$ sind die Werthe α_1, α_2, α_3, ..., welche den einfachen Factoren von $f(x)$ entsprechen. Man kann daher auch behaupten, dafs der erste Theil einer algebraischen Gleichung dem Producte der einfachen Factoren gleich ist, die den Wurzeln dieser Gleichung entsprechen. Anders aber ist es bei den *transcendenten* Gleichungen. Für diese pafst nur die erste Definition des Begriffs der Wurzel und man mufs sagen: die Wurzel einer transcendenten Gleichung $f(x)=0$ ist jeder Werth von x, welcher $f(x)$ auf Null reducirt. Weifs man nemlich, dafs $f(x)=(x-a)Fx$ ist, so folgt hieraus noch keinesweges, dafs a eine Wurzel der Gleichung $f(x)=0$ ist. Denn substituirt man statt x den Werth a, so wird zwar $x-a=0$, aber es

kann sein, dafs zu gleicher Zeit $F(a)=\infty$ wird. Man hätte daher in diesem Falle $f(a)=0.\infty$, welcher Ausdruck keinesweges immer $=0$ sein mufs. Mithin ist zwar hier $x-a$ ein einfacher Factor von $f(x)$, aber dennoch ist a keine Wurzel der Gleichung $f(x)=0$, und es folgt hieraus, dafs bei den transcendenten Gleichungen keinesweges jeder einfache Factor des ersten Theils der Gleichung einer Wurzel entspricht, obwohl umgekehrt jede Wurzel einem einfachen Factor. Ist z. B. die Gleichung

$$\operatorname{tang} x = 0$$

gegeben, so kann man $\operatorname{tang} x$ als das Product der zwei Factoren $\sin x$ und $\sec. x$ ansehen. Der Factor $\sin x$ ist nun bekanntlich das Product einer unendlichen Anzahl einfacher Factoren, da

$$\sin x = x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\ldots.$$

ist; und dieses Product wird Null, sobald man einen der Factoren gleich Null setzt; das heifst, die Wurzeln der Gleichung

$$\sin x = 0$$

sind $x=0$, $x=\pi$, $x=2\pi$, $x=3\pi$, ... Diese Wurzeln sind zugleich Wurzeln der Gleichung $\operatorname{tang} x=0$; denn sobald $\sin x=0$ ist, ist $\sec. x=1$, also in diesem Falle $\operatorname{tang} x=0.1=0$. Dagegen sind die Wurzeln der Gleichung $\sec. x=0$ keinesweges Wurzeln der Gleichung $\operatorname{tang} x=0$. Soll nemlich $\sec. x$ oder $\frac{1}{\cos x}$ Null werden, so mufs $\cos x$ unendlich grofs sein. So lange aber x eine reelle Gröfse ist, kann dies nicht sein, das heifst, die Gleichung $\sec. x=0$ hat keine reelle Wurzel. Setzt man dagegen $x=y+z\sqrt{-1}$, wo y und z reelle Gröfsen sind, so ist $\cos x = \frac{1}{2}(e^z+e^{-z})\cos y-\frac{1}{2}(e^z-e^{-z})\sin y\sqrt{-1}$. Soll nun dieser Ausdruck unendlich grofs werden, so mufs z unendlich grofs sein. In diesem Falle hat man also

$$\cos x = \tfrac{1}{2}e^{\infty}(\cos y-\sin y\sqrt{-1}).$$

Nun ist aber, wenn man $x=y+z\sqrt{-1}$ setzt,

$$\sin x = \tfrac{1}{2}(e^z+e^{-z})\sin y+\tfrac{1}{2}(e^z-e^{-z})\cos y\sqrt{-1}$$

und, wenn man $z=\infty$ setzt,

$$\sin x = \tfrac{1}{2}e^{\infty}(\sin y+\cos y\sqrt{-1});$$

also ist $\sin x=\infty$, wenn $\frac{1}{\cos x}=0$ ist, das heifst: wenn man statt x eine

Wurzel der Gleichung $\sec. x = 0$ substituirt, so wird $\tan x = \frac{1}{\cos x}$; was nicht nothwendig Null ist. Auch sieht man leicht, dass unter diesen Umständen $\tan x$ wirklich einen andern Werth als Null hat. Denn es ist in diesem Falle

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin y - \cos y\sqrt{-1}}{\cos y - \sin y\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}\ ^{*)}.$$

Das Product aller einfachen Factoren, welche den Wurzeln der Gleichung $\tan x = 0$ entsprechen, giebt also keineswegs $\tan x$, sondern $\sin x$.

3. Es kann auch sein, dass es transcendente Functionen giebt, welche durch keinen reellen oder imaginären Werth von x auf Null reducirt werden können; obwohl vielleicht noch keine solche Function bis jetzt bekannt ist. In diesem Falle würde also die Gleichung $f(x) = 0$ gar keine Wurzel haben. Es giebt zwar viele, sowohl algebraische als transcendente Functionen, von welchen sich nachweisen lässt, dass sie durch keinen *endlichen* reellen oder imaginären Werth von x auf Null reducirt werden können (dahin gehören die Functionen $\frac{1}{x}$, e^x, $e^{x\sqrt{-1}}$); demnach aber darf nicht behauptet werden, dass z. B. die Gleichung $e^x = 0$ keine Wurzel habe, indem sich vielmehr nachweisen lässt, dass sie deren unendlich viele hat, die sämmtlich in der Form $x = -\infty$ enthalten sind. Es wäre aber offenbar eine Einseitigkeit, wenn man die unendlich grossen Werthe nicht als Wurzeln gelten lassen wollte; auch wird sich später zeigen (§. 31.), dass die Betrachtung dieser Wurzeln in bestimmten Fällen durchaus nothwendig ist. Eben so hat die Gleichung $e^{x\sqrt{-1}} = 0$ eine unendliche Zahl von Wurzeln, die sämmtlich in der Form $x = -\infty\sqrt{-1}$ enthalten sind. Wenn ich aber sage, dass eine transcendente Gleichung $f(x) = 0$ gar keine Wurzeln hat, so verstehe ich darunter, dass sie weder durch endliche noch durch unendliche Werthe auf Null reducirt werden kann, und es ist bis jetzt nicht ausgemacht, ob solche Functionen vorhanden sein können oder nicht **).

---

*) Dass $\tan x = \sqrt{-1}$ wird, wenn $\sec. x = 0$ ist, hat bereits *Fourier* in einer Abhandlung bewiesen, die jedoch bis jetzt nicht erschienen ist. Man vergleiche *Mém. de l'acad. d. sc.* T. X. pag. 129.

**) Auch *Fourier* drückt sich darüber zweifelhaft aus, indem er sagt (*Exposé synopt.* p. 55. a): „Mais s'il pouvait exister une fonction Fx qui ne cesserait point d'avoir une valeur finie, quelque valeur réelle ou imaginaire que l'on attribuât à x."

7. Ist mithin eine transcendente Function gegeben (sie heifse $f(x)$) und man kennt alle reellen oder imaginären Wurzeln der Gleichung $fx = 0$, nemlich α, β, γ, δ .... und bezeichnet durch $\varphi(x)$ das Product

$$\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)\left(1-\frac{x}{\beta}\right)\left(1-\frac{x}{\gamma}\right)\ldots\ldots$$

aller einfachen Factoren, welche den Wurzeln der Gleichung $\varphi(x) = 0$ entsprechen, so kann es sein, dafs dieses Product nicht $= f(x)$ ist. Es kann nemlich, wenn $fx = \varphi x . Fx$ ist, der Factor Fx so beschaffen sein, dafs er nur durch solche Werthe von x auf Null reducirt wird, die, in φx substituirt, diese Function auf ∞ reduciren, so dafs die Wurzeln von Fx nicht zugleich Wurzeln von fx sind; oder es kann auch Fx eine Function sein, die durch keinen reellen oder imaginären Werth von x auf Null gebracht wird *). Läfst sich dagegen die Function fx in einfache Factoren zerlegen, die den Wurzeln der Gleichung $fx = 0$ entsprechen, so dafs man

$$fx = \left(1-\frac{x}{\alpha}\right)\left(1-\frac{x}{\beta}\right)\left(1-\frac{x}{\gamma}\right)\ldots\ldots$$

hat und diese Factoren so beschaffen sind, dafs, wenn man einen derselben gleich Null setzt und den daraus entspringenden Werth von x in die übrigen Factoren substituirt, keiner dieser übrigen Factoren unendlich grofs wird, so kann die Gleichung keine anderen Wurzeln als α, β, γ .... haben. Denn substituirt man statt x irgend einen anderen Werth, so kann dieser keinen der Factoren, aus welchen fx besteht, und also auch fx selbst nicht auf Null reduciren.

8. Das Aufsuchen der reellen Wurzeln einer transcendenten, wie einer algebraischen Gleichung, geschieht dadurch, dafs man Grenzen sucht, zwischen welchen die einzelnen Wurzeln enthalten sind und dafs man diese Grenzen immer enger zusammenzieht. Eine algebraische Function fx ist aber immer eine continuirliche, das heifst, eine Function, die nur um ein unendlich Kleines wächst, wenn die Veränderliche x einen unendlich kleinen Zuwachs erhält. Der Werth einer solchen Function kann daher nicht vom Positiven zum Negativen und umgekehrt übergehen, ohne dazwischen Null zu werden. Eine transcendente Function fx dagegen kann auch eine discontinuirliche sein, das heifst, es können Grenzwerthe von x vorkommen, die so beschaffen sind, dafs einem unendlich kleinen Zuwachse von x ein

*) Es versteht sich von selbst, dafs das Product der den Wurzeln entsprechenden einfachen Factoren einer Gleichung $A.fx = 0$, wenn A eine Constante ist, nicht $A.fx$, sondern nur fx werden kann.

endlicher oder unendlich großer Zuwachs von fx entspricht. Zwischen solchen zwei benachbarten Grenzwerthen, bei welchen die Continuität aufhört, wird also die transcendente Function continuirlich sein. Sucht man daher die Wurzeln einer transcendenten Gleichung $fx = 0$, so muſs man zuerst sehen, ob fx eine continuirliche oder eine discontinuirliche Function ist. Diese Untersuchung gehört nicht in das Gebiet der Theorie der Gleichungen. Dieselbe setzt sie vielmehr voraus. Hat man gefunden, daſs fx eine discontinuirliche Function ist, und kennt man die Grenzwerthe, bei welchen die Continuität aufhört, so betrachtet man, statt der Function im Allgemeinen, die einzelnen Theile derselben, welche zwischen je zwei Grenzwerthen enthalten sind und sucht die in diesen Zwischenräumen enthaltenen Wurzeln. Insofern man daher voraussetzt, *wie es im Folgenden immer geschieht*, daſs man die in den transcendenten Gleichungen vorkommenden Functionen nur innerhalb der Grenzen betrachtet, zwischen welchen sie continuirliche Gröſsen sind, gilt auch für diese Gleichungen folgender Lehrsatz.

„Wenn die Gleichung $fx = 0$ gegeben ist, und man substituirt statt x die Werthe x_1 und x_2, so werden, wenn fx_1 und fx_2 entgegengesetzte Zeichen haben, eine oder mehrere Wurzeln dieser Gleichung zwischen den Grenzen x_1 und x_2 enthalten sein. Liegt keine reelle Wurzel der Gleichung zwischen diesen Grenzen, so haben fx_1 und fx_2 gleiche Zeichen."

Der Beweis dieses Satzes ist bekannt und folgt unmittelbar aus dem Begriffe der Continuität.

9. Ein anderer, ebenfalls bekannter Satz, von welchem später häufig Gebrauch gemacht werden wird, ist folgender.

„Wenn eine Function fx, so wie auch ihre Differentialquotienten $\frac{\partial fx}{\partial x}, \frac{\partial^2 fx}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 fx}{\partial x^3}$ .... zwischen den Grenzen x und $x+a$ continuirliche Gröſsen sind, so hat man

$$f(x+a) = fx + \frac{a \,.\, \partial f(x, x+a)}{\partial x},$$

$$f(x+a) = fx + \frac{a \,.\, \partial fx}{\partial x} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 f(x, x+a)}{\partial x^2},$$

$$f(x+a) = fx + \frac{a \,.\, \partial fx}{\partial x} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 fx}{\partial x^2} + \frac{a^3}{2.3} \frac{\partial^3 f(x, x+a)}{\partial x^3}$$

etc. etc.,

wo $(x, x+a)$ eine Gröſse bedeutet, die zwischen x und $x+a$ enthalten ist, aber in den verschiedenen Gleichungen verschiedene Werthe haben

kann. Den Beweis dieses Satzes findet man z. B. in *Lagrange Leçons sur le calc. des fonct. leç. 9.* Er gilt auch für den Fall, wenn fx eine continuirliche imaginäre Function ist.

10. Nach diesen Vorbereitungen will ich nun zuerst zeigen, wie man die Grenzen finden kann, zwischen welchen die reellen Wurzeln der transcendenten Gleichungen enthalten sind. Wiewohl ich die Untersuchungen *Fourier's* über die Theorie der algebraischen Gleichungen als bekannt voraussetzen mufs, will ich doch zuerst, zur deutlicheren Einsicht, in der Kürze das Verfahren andeuten, vermittelst dessen er die Grenzen der reellen Wurzeln findet.

Ist eine algebraische Gleichung

$$fx = x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \dots + a_m = 0$$

gegeben, so bilde man die successiven Differenzialquotienten $f^1 x$, $f^2 x$, $f^3 x, \dots$ Der letzte Differentialquotient $f^m x$ ist eine constante Gröfse. Nimmt man statt x irgend eine Zahl a und substituirt dieselbe in die Ausdrücke

$$f^m x, \quad f^{m-1} x, \quad \dots \quad f^1 x, \quad fx,$$

so werden die sich hieraus ergebenden Werthe das Zeichen von Positiv oder Negativ vor sich haben. Diese Zeichen schreibe man in der Ordnung, wie man sie erhält, neben einander, in eine horizontale Reihe, von der Linken zur Rechten fortgehend, und bezeichne die Reihe von Zeichen durch $[a]$. Die Zeichenreihe $[-\infty]$ wird nur Zeichenwechsel enthalten, die Zeichenreihe $[\infty]$ nur Zeichenfolgen; und zwar verliert die Zeichenreihe ihre Zeichenwechsel beim Uebergange von $-\infty$ zu ∞ allmälig, ohne jemals einen Zeichenwechsel, den sie verloren hat, wieder zu erhalten, oder neue zu bekommen. Sobald man nämlich statt x eine reelle Zahl α substituirt, welche fx auf Null reducirt, so verliert die Zeichenreihe einen Zeichenwechsel, den sie nicht wieder erhält. Sie kann aber auch Zeichenwechsel dadurch verlieren, dafs einer oder mehrere der Differentialquotienten Null wird, ohne dafs fx Null wird. In diesem Falle verliert sie aber die Zeichenwechsel immer paarweise, und der Verlust eines jeden solchen Paares von Zeichenwechseln deutet auf zwei imaginäre Wurzeln. Man besitzt nun Mittel, um zu unterscheiden, ob der Verlust der Zeichenwechsel von reellen oder imaginären Wurzeln berührt. Sind daher α und β zwei reelle Zahlen, ist $\beta > \alpha$ und man findet, dafs $[\alpha]$ n Zeichenwechsel mehr enthält als $[\beta]$, so werden zwischen den Grenzen α und β n Wurzeln angedeutet und man kann alsdann untersuchen, ob und wie

viele reelle Wurzeln wirklich zwischen diesen Grenzen liegen, oder ob der Verlust der Zeichenwechsel ganz oder theilweise von imaginären Wurzeln herrührt.

11. Die besondere Eigenthümlichkeit einer ganzen algebraischen Function fx besteht darin, dafs man durch fortgesetzte Differentiation zuletzt zu einem Differentialquotienten kommt, der einen constanten Werth hat; und vermöge dieser Eigenthümlichkeit ist es möglich, jedesmal die Anzahl der Zeichenwechsel in den zwei Zeichenreihen $[\alpha]$ und $[\beta]$ zu bestimmen und hieraus zu schliefsen, wie viel Wurzeln zwischen den Grenzen α und β enthalten sind. Bei den transcendenten Functionen dagegen kann man die Differentiation in's Unendliche fortsetzen, und kommt nie zu einem constanten Werthe. Eben deswegen kann man bei den transcendenten Gleichungen nicht ohne Weiteres bestimmen, wie viele reelle Wurzeln zwischen zwei *beliebig gewählten* Grenzen enthalten sind, wenn auch die transcendente Function, welche den ersten Theil der Gleichung bildet, zwischen diesen Grenzen continuirlich ist. Dennoch aber kann man auch bei diesen Gleichungen, auf ganz ähnliche Weise wie bei den algebraischen, alle reelle Wurzeln, die zwischen $-\infty$ und ∞ enthalten sind, mit Bestimmtheit entdecken, sobald man nur diesen Zwischenraum in kleinere Zwischenräume theilt, die nach einem bestimmten Gesetze gebildet werden müssen. Man kann nemlich für jede transcendente Function fx einen Differentialquotienten $f^m x$ finden, der so beschaffen ist, dafs er zwischen zwei Grenzen α und β sein Zeichen nicht ändert, dafs also die Gleichung $f^m x = 0$ zwischen diesen Grenzen keine Wurzel hat; und dieser Differentialquotient spielt in Beziehung auf diese Grenzen dieselbe Rolle, wie der constante Differentialquotient bei den algebraischen Gleichungen, indem man vermittelst desselben bestimmen kann, wie viele Wurzeln die transcendente Gleichung $fx = 0$ zwischen den Grenzen α und β hat. Dafs man wirklich jedesmal einen solchen Differentialquotienten finden kann, ist klar. Denn die gegebene Gleichung $fx = 0$ ist nothwendig eine bestimmte, das heifst, die Function fx ist von der Art, dafs man aus ihr für jeden Werth γ, den man statt x substituirt, den Werth von $f(\gamma)$ mit Bestimmtheit finden kann, sei es nun, dafs man ihn genau angeben, oder in beliebig enge Grenzen einschliefsen kann; was z. B. der Fall ist, wenn fx eine convergirende Reihe ist. Wäre fx eine unbestimmte Function, so könnte natürlich von der Auflösung der Gleichung $fx = 0$ nicht die Rede sein.

Es müssen mithin auch die successiven Differentialquotienten von fx nothwendig bestimmte Functionen sein. Man wird also aus der Natur irgend eines Differentialquotienten erkennen können, ob er für einen bestimmten Werth $x=\alpha$, positiv oder negativ ist, und da dieser Differenzialquotient, wie hier immer vorausgesetzt wird, zwischen bestimmten Grenzen eine continuirliche Gröfse ist, so wird man immer einen Zuwachs δ von x bestimmen können, so beschaffen, dafs der Differentialquotient, welcher $f^m x$ heifsen mag, innerhalb der Grenzen $x=\alpha$, $x=\alpha+\delta$, immer dasselbe Zeichen behält. Sobald diese Grenzen gefunden sind, kann man, auf dieselbe Weise wie bei den algebraischen Gleichungen, bestimmen, wie viele Wurzeln die gegebene Gleichung zwischen diesen Grenzen hat. Es mufs nur eine Modification in Beziehung auf die Bildung der Zeichenreihen eintreten. Bei den algebraischen Gleichungen bildet man die Zeichenreihe, indem man zuerst alle Differentialquotienten, vom letzten anfangend, in eine Reihe schreibt, und alsdann statt x den Werth α substituirt. Die hieraus entspringende Zeichenreihe wurde oben durch $[\alpha]$ bezeichnet. Bei den transcendenten Gleichungen sucht man zuerst einen Differentialquotienten, der zwischen zwei Grenzen α und β dasselbe Zeichen behält *). Schreibt man diesen Differentialquotienten, und alle folgenden, nach der Ordnung in eine horizontale Linie und substituirt alsdann statt x einen Werth a, der zwischen α und β liegt, in alle diese Functionen, so erhält man wieder eine Reihe von Zeichen, die im Allgemeinen theils positiv, theils negativ sein werden. Diese Zeichenreihe soll im Folgenden durch $[a]$ bezeichnet werden. Ich werde auch zur Abkürzung die zwei Grenzen, zwischen welchen ein bestimmter Differentialquotient sein Zeichen nicht ändert, die *bestimmenden Grenzen* und diesen Differentialquotienten den *bestimmenden* nennen.

12. Liegt eine Zahl a zwischen den bestimmenden Grenzen α und β, so ist es einleuchtend, dafs die Zeichenreihe $[a]$ mit der Zeichenreihe $[\alpha]$ identisch ist, so lange nicht zwischen α und a eine Zahl liegt, die, statt x substituirt, eine oder mehrere der auf den bestimmenden Differentialquotienten folgenden Functionen auf Null reducirt. Denn eine Aenderung in der Zeichenreihe kann nur dadurch entstehen, dafs eine oder mehrere die-

*) Es wird im Folgenden immer vorausgesetzt, dafs β, mit Rücksicht auf das Zeichen, immer gröfser ist als α.

ser Functionen vom Positiven zum Negativen, und umgekehrt, übergehen; und da vorausgesetzt wird, dafs alle Functionen zwischen den bestimmenden Grenzen continuirlich sind, so kann dieser Uebergang nicht Statt haben, wenn die Functionen nicht durch den Werth Null gehen. Man nehme daher zuerst an, die Zahl a sei so beschaffen, dafs sie nur fx und keine der übrigen Functionen auf Null reducirt, so dafs also a eine Wurzel der Gleichung $fx = 0$ ist. Man setze in allen Functionen statt x nach einander die drei Werthe $a - \partial a$, a, $a + \partial a$ und schreibe die hierdurch entstehenden drei Zeichenreihen $[a - \partial a]$, $[a]$, $[a + \partial a]$ auf drei horizontale Linien unter einander. Diese drei Zeichenreihen werden nur in Absicht auf das letzte Zeichen verschieden sein; denn da der Werth von da ganz unbestimmt ist und nach der Voraussetzung die Substitution von a für x nur fx auf Null reducirt, so kann man ihn immer so klein annehmen, dafs keine der übrigen Functionen ihr Zeichen zwischen den Grenzen $a - \partial a$ und $a + \partial a$ ändert. Es wird aber $f(a + \partial a)$ positiv oder negativ und $f(a - \partial a)$ negativ oder positiv sein, je nachdem $f'a$ positiv oder negativ ist. Ist $f'a$ positiv, so hat man das Schema

$$\begin{aligned} [a - \partial a] &= \ldots\ldots + - \\ [a] &= \ldots\ldots + 0 \\ [a + \partial a] &= \ldots\ldots + + \end{aligned}$$

Ist $f'a$ negativ, so hat man das Schema

$$\begin{aligned} [a - \partial a] &= \ldots\ldots - + \\ [a] &= \ldots\ldots - 0 \\ [a + \partial a] &= \ldots\ldots - - \end{aligned}$$

In beiden Fällen verliert also die Zeichenreihe einen Zeichenwechsel beim Uebergange von $a - \partial a$ zu $a + \partial a$, sobald a eine Wurzel der Gleichung $fx = 0$ ist.

13. Ist dagegen die zwischen den bestimmenden Grenzen enthaltene Zahl a so beschaffen, dafs sie eine der auf den bestimmenden Differentialquotienten folgenden Functionen, z. B. $f^n x$, *und nur diese* auf Null reducirt, so werden auch in diesem Falle alle Zeichen der drei Reihen $[a - \partial a]$, $[a]$ und $[a + \partial a]$ bezüglich gleich sein, bis auf dasjenige, welches durch die Substitution der drei Werthe $a - \partial a$, a und $a + \partial a$ in $f^n x$ entsteht, und man hat daher nur nöthig, die drei auf einander folgenden Functionen $f^{n+1} x$, $f^n x$, $f^{n-1} x$ zu betrachten, wenn man wissen will, wie sich die drei Reihen $[a - \partial a]$, $[a]$ und $[a + \partial a]$ gegen einander verhalten. Die Function

$f^n(a-\partial a)$ ist negativ oder positiv, die Function $f^n(a+\partial a)$ positiv oder negativ, je nachdem $f^{n+1}a$ positiv oder negativ ist. Die Function $f^{n-1}a$ kann aber ebenfalls positiv oder negativ sein. Hierdurch entstehen vier verschiedene Combinationen. Sind nemlich $f^{n+1}a$ und $f^{n-1}a$ positiv, so hat man, wenn man nur die Zeichen der Functionen $f^{n+1}x$, $f^n x$, $f^{n-1}x$, schreibt:

$$\begin{aligned}[a-\partial a] &= \dots + - + \dots \\ [a] &= \dots + 0 + \dots \\ [a+\partial a] &= \dots + + + \dots\end{aligned}$$

Sind $f^{n+1}a$ und $f^{n-1}a$ beide negativ, so hat man

$$\begin{aligned}[a-\partial a] &= \dots - + - \dots \\ [a] &= \dots - 0 - \dots \\ [a+\partial a] &= \dots - - - \dots\end{aligned}$$

Ist $f^{n+1}a$ negativ und $f^{n-1}a$ positiv, so hat man

$$\begin{aligned}[a-\partial a] &= \dots - - + \dots \\ [a] &= \dots - 0 + \dots \\ [a+\partial a] &= \dots - + + \dots\end{aligned}$$

Ist $f^{n+1}a$ positiv und $f^{n-1}a$ negativ, so hat man

$$\begin{aligned}[a-\partial a] &= \dots + - - \dots \\ [a] &= \dots + 0 - \dots \\ [a+\partial a] &= \dots + + - \dots\end{aligned}$$

In den zwei Fällen, wenn $f^{n+1}a$ und $f^{n-1}a$ gleiche Zeichen haben, enthält also $[a+\partial a]$ zwei Zeichenwechsel weniger als $[a-\partial a]$. In den zwei Fällen dagegen, wenn diese Functionen verschiedene Zeichen haben, enthält $[a+\partial a]$ eben so viele Zeichenwechsel als $[a-\partial a]$.

14. Es ist noch der Fall übrig, wenn die Zahl a so beschaffen ist, dafs sie, statt x substituirt, mehrere auf einander folgende der zu betrachtenden Functionen auf Null reducirt. Da indessen die Untersuchung dieses Falles ebenfalls ganz auf dieselbe Weise ausgeführt werden kann wie bei den algebraischen Gleichungen, für welche sie schon *Fourier* ausführlich angestellt hat, so will ich nur das Resultat hersetzen, wie es in Beziehung auf die transcendenten Gleichungen ausgesprochen werden mufs. Man nehme an, es sei eine zwischen den bestimmenden Grenzen α und β liegende Zahl so beschaffen, dafs sie, statt x substituirt, die i auf einander folgenden Functionen

$$f^n x,\ f^{n-1}x,\ \dots\ f^{n-i+1}x$$

auf Null reducirt, so sind zwei Fälle zu unterscheiden. Ist i eine gerade Zahl, so enthält $[a+\partial a]$ die Zahl i von Zeichenwechseln weniger als $[a-\partial a]$; ist aber i eine ungerade Zahl, so kommt es darauf an, ob $f^{n+1}a$ und $f^{n-i}a$ gleiche oder ungleiche Zeichen haben. Im ersten Falle hat $[a+\partial a]$ $i+1$, im zweiten $i-1$ Zeichenwechsel weniger als $[a-\partial a]$. Verschwinden nun durch die Substitution eines Werthes a von x, an verschiedenen Stellen verschiedene Gruppen von Functionen, so dafs die Anzahl der verschwindenden Functionen an einer Stelle i, an einer anderen i' u. s. w. beträgt, so braucht man nur für jede Gruppe die Regeln in Anwendung zu bringen, die so eben für eine einzelne Gruppe gegeben worden sind und findet auf diese Weise die Totalsumme der Zeichenwechsel, die $[a+\partial a]$ weniger enthält als $[a-\partial a]$.

15. Aus dem Vorhergehenden ergiebt sich deutlich, wie man die Zahl finden kann, welche angiebt, wie viele reelle Wurzeln der Gleichung $fx=0$ zwischen den bestimmenden Grenzen α und β liegen können. So lange nemlich zwischen α und β keine Zahl liegt, welche eine oder mehrere der zu betrachtenden Functionen auf Null reducirt, sind die Zeichenreihen $[\alpha]$ und $[\beta]$ identisch. Diese Zeichenreihen können nur dann von einander verschieden sein, wenn die Function fx, oder einer ihrer Differentialquotienten zwischen den Grenzen α und β Null wird. In diesem Falle mufs aber die Zeichenreihe $[\beta]$ immer weniger Zeichenwechsel als die Reihe $[\alpha]$ haben, indem, wenn man den Werth von x wachsen läfst, nur Zeichenwechsel verschwinden, nie aber die verlorenen wieder erscheinen, oder neue hinzu kommen können.

Liegen n reelle Wurzeln zwischen α und β, so mufs $[\beta]$ wenigstens n Zeichenwechsel weniger als $[\alpha]$ enthalten. Denn bezeichnet man die Wurzeln, nach ihrer Gröfse geordnet, durch $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots$, so hat $[\alpha_1+\partial\alpha_1]$ *wenigstens* einen Zeichenwechsel weniger als $[\alpha]$; eben so $[\alpha_2+\partial\alpha_2]$ wenigstens einen Zeichenwechsel weniger als $[\alpha_1+\partial\alpha_1]$ u. s. w.

Umgekehrt darf man aber aus dem Umstande, dafs $[\beta]$ die Zahl n von Zeichenwechseln weniger enthält als $[\alpha]$, nicht schliefsen, dafs zwischen α und β wirklich n reelle Wurzeln liegen, weil das Verschwinden der Zeichen auch daraus entstehen kann, dafs einer oder mehrere der Differentialquotienten von fx durch die Substitution eines zwischen α und β liegenden Werthes auf Null reducirt werden, ohne dafs dies bei fx der Fall wäre. Soviel aber ist gewifs, dafs, wenn n eine ungerade Zahl ist, zwischen α

und β wenigstens eine reelle Wurzel liegt, weil, wenn einer oder mehrere der Differentialquotienten Null werden, entweder gar kein Zeichenwechsel, oder eine gerade Zahl von Zeichenwechseln verschwindet.

16. Der Zweifel, ob der Verlust der Zeichenwechsel auf reelle Wurzeln deute, die zwischen den bestimmenden Grenzen α und β enthalten sind, oder ob er davon herrühre, dafs einer oder mehrere der Differentialquotienten zwischen diesen Grenzen Null werden, kann bei den transcendenten Gleichungen durch dieselbe Regel gelöset werden, die *Fourier* für den ähnlichen Fall bei den algebraischen Gleichungen gegeben hat. Ich werde hier aber um so lieber einen analytischen Beweis hersetzen, der auf die transcendenten und algebraischen Gleichungen zugleich anwendbar ist, als *Fourier* diese Regel durch geometrische Betrachtungen erwiesen hat.

Man betrachte zuerst den Fall, wenn $[\alpha]$ nur zwei Zeichenwechsel mehr als $[\beta]$ hat, und setze zugleich voraus, dafs dieser Unterschied sich erst in den zwei letzten Zeichen jeder Reihe zeigt, so dafs die vorhergehenden, sich entsprechenden Zeichen in beiden Reihen dieselben sind, so ist ein doppeltes Schema möglich. Entweder ist

$$[\alpha] = \dots + - +$$
$$[\beta] = \dots + + +$$

oder

$$[\alpha] = \dots - + -$$
$$[\beta] = \dots - - -$$

In beiden Fällen hat $f^2 x = 0$ keine Wurzel, die zwischen α und β enthalten ist, weil, sobald man die zwei letzten Zeichen vernachlässigt, die Zeichenreihe $[\alpha]$ nicht mehr Zeichenwechsel hat als die Zeichenreihe $[\beta]$. Man kann daher $f^2 x$ als die bestimmende Function annehmen. Dagegen hat $f^1 x = 0$ eine Wurzel zwischen diesen Grenzen und es entsteht nun die Frage ob $fx = 0$ zwei reelle Wurzeln oder keine zwischen diesen Grenzen habe. Es wird hierbei vorausgesetzt, dafs man sich schon versichert hat, die Gleichung $fx = 0$ habe nicht zwei gleiche Wurzeln zwischen α und β, das heifst, dafs man untersucht hat, ob fx und $f^1 x$ einen gemeinschaftlichen Factor haben und ob dieser gemeinschaftliche Factor, wenn er existirt, eine Wurzel zwischen α und β habe.

Man betrachte zunächst das erste Schema. Man sieht sogleich, dafs, wenn a die Wurzel der Gleichung $f^1 x = 0$ ist, die zwischen α und β liegt, alsdann die Zeichenreihe $[a]$ mit $+ 0 -$ schliefsen mufs, sobald zwischen

α und β zwei reelle Wurzeln der Gleichung $fx=0$ liegen sollen, weil in dem anderen Falle, der hier noch möglich ist, wenn nemlich $[a]$ mit $+0+$ schliefst, hieraus von selbst das Nichtvorhandensein der reellen Wurzeln folgt. Denn im letzteren Falle hätte man

$$[a-\partial a] = \ldots.+-+$$
$$[a+\partial a] = \ldots.+++$$

Die zwei Zeichenwechsel würden also zwischen den Grenzen $a-\partial a$ und $a+\partial a$, zwischen welchen nach der Voraussetzung keine reelle Wurzel der Gleichung $fx=0$ liegt, verloren gehen. Mithin mufs man, wenn die zwei reellen Wurzeln vorhanden sind, nothwendig folgendes Schema haben:

$$[\alpha] = \ldots.+-+$$
$$[a-\partial a] = \ldots.+--$$
$$[a+\partial a] = \ldots.++-$$
$$[\beta] = \ldots.+++$$

und es ist eine reelle Wurzel zwischen α und $a-\partial a$, die andere zwischen $a+\partial a$ und β enthalten. Es sei die kleinere Wurzel $x_1=\alpha+b$, die gröfsere $x_2=\beta-b'$. Hieraus folgt (9)

$$f(\alpha+b) = f\alpha+bf'(\alpha,\alpha+b) = f\alpha+(x_1-\alpha)f'(\alpha,\alpha+b) = 0$$

oder

$$x_1 = \alpha-\frac{f\alpha}{f'(\alpha,\alpha+b)}.$$

Auf dieselbe Weise findet man

$$x_2 = \beta-\frac{f\beta}{f'(\beta-b',\beta)}.$$

Da $f'x$ zwischen den Grenzen α und β continuirlich ist, so bleibt der Werth dieser Function negativ, so lange man für x eine Zahl substituirt, die zwischen α und a liegt; und zwar wird der numerische Werth der Function kleiner, je näher die statt x substituirte Zahl dem Werthe a kommt. Aus demselben Grunde bleibt $f'x$ positiv, so lange man statt x eine Zahl substituirt, die zwischen a und β liegt, und der Werth dieser Function wächst, je mehr sich die statt x substituirte Zahl dem Werthe β nähert. Es ist also (ohne Rücksicht auf das Zeichen)

$$f'(\alpha,\alpha+b)<f'\alpha$$
$$f'(\beta-b',\beta)<f'\beta,$$

folglich

$$x_1>\alpha-\frac{f\alpha}{f'\alpha}$$
$$x_2<\beta-\frac{f\beta}{f'\beta},$$

und um so mehr

$$\alpha - \frac{f\alpha}{f'\alpha} < \beta - \frac{f\beta}{f'\beta}$$

da x_1 kleiner als x_2 ist, das heifst, es mufs

$$\frac{f\beta}{f'\beta} + \frac{f\alpha}{-f'\alpha} < \beta - \alpha$$

sein.

Dasselbe Resultat findet man aus dem zweiten Schema, wenn man bedenkt, dafs in diesem Falle die Zeichenreihe $[\alpha]$ mit den Zeichen $-0+$ schliefsen mufs, wenn a die zwischen α und β liegende Wurzel der Gleichung $f'x = 0$ ausdrückt. Man hat daher folgende Regel. Soll die Gleichung $fx = 0$ unter den erwähnten Umständen zwei reelle Wurzeln haben, die zwischen α und β liegen, so mufs die Summe der Quotienten $\frac{f\beta}{f'\beta}$, $\frac{f\alpha}{-f'\alpha}$ kleiner sein als der Unterschied der Grenzen; im entgegengesetzten Falle kann man mit Sicherheit annehmen, dafs zwischen den erwähnten Grenzen keine Wurzel liegt. Ist aber diese Summe wirklich kleiner als $\beta - \alpha$, so folgt daraus noch nicht, dafs die zwei reellen Wurzeln wirklich vorhanden sind, sondern man sieht daraus nur, dafs die Grenzen nicht eng genug gezogen sind. In diesem Falle substituire man statt x eine zwischen α und β liegende Zahl c. Hat fc nicht dasselbe Zeichen wie $f\alpha$ und $f\beta$, so folgt daraus, dafs eine reelle Wurzel zwischen α und c, die andere zwischen c und β liegt. Hat aber fc dasselbe Zeichen, so sehe man ob $f'c$ in Absicht auf das Zeichen mit $f'\alpha$ oder $f'\beta$ übereinstimmt. Man nenne ∂ diejenige der Zahlen α und β, die, in $f'x$ substituirt, ein Resultat giebt, dessen Zeichen dem von $f'c$ entgegengesetzt ist. Die zwei möglicherweise vorhandenen Wurzeln müssen also zwischen c und ∂ liegen. Man wende daher auf diese Grenzen dasselbe Verfahren an, welches früher bei den Grenzen α und β angewandt wurde. Fährt man auf diese Weise fort, so findet man zuletzt, entweder dafs keine reelle Wurzel zwischen den Grenzen α und β liegt, oder man gelangt dahin, die Wurzeln zu trennen.

Bisher ward f^2x als die bestimmende Function angenommen. Nähme man aber einen höheren Differentialquotienten zur bestimmenden Function, so könnte es sein, dafs der Unterschied der Zwischenwechsel in den Reihen $[\alpha]$ und $[\beta]$ gröfser als 2 wäre; auch könnte sich dieser Unterschied früher als bei den zwei letzten Zeichen zeigen. Da indessen schon *Fourier* ausführlich gezeigt hat, dafs auch in diesen Fällen dieselbe Regel hin-

reicht, um das Vorhandensein oder die Abwesenheit der reellen Wurzeln zu erkennen, und dieselben Betrachtungen ohne irgend eine Aenderung auch für die Wurzeln einer transcendenten Gleichung gelten, die zwischen den bestimmenden Grenzen α und β angedeutet werden, so halte ich es für überflüssig, diese Betrachtungen zu wiederholen.

17. Durch das Vorhergehende ist die Frage, wie man die Grenzen finden kann, zwischen welchen die einzelnen reellen Wurzeln enthalten sind, erledigt. Es kommt blofs darauf an, dafs man den Zwischenraum von $-\infty$ zu ∞ in Unterabtheilungen theilt, so dafs für jede solche Unterabtheilung irgend ein Differentialquotient zwischen den Grenzen, die diese Unterabtheilung einschliefsen, dasselbe Zeichen behält; alsdann findet man, wie viele Wurzeln zwischen diesen Grenzen liegen. Dies Verfahren wird durch die folgenden Beispiele noch deutlicher werden. Ich will nur noch eine Bemerkung hier anknüpfen. Da eine algebraische Gleichung vom $n$ten Grade immer das Product von n einfachen Factoren ist, die den n reellen oder imaginären Wurzeln entsprechen, so kann man aus dem Verluste der Zeichenwechsel, die nicht reellen Wurzeln der Gleichung entsprechen, schliefsen, dafs die Gleichung eben so viel imaginäre Wurzeln hat, als sie solcher Zeichenwechsel verliert. Denn da die Zeichenreihe überhaupt zwischen den Grenzen $-\infty$ und ∞ immer n Zeichenwechsel verliert und jeder reellen Wurzel der Verlust eines Zeichenwechsels entspricht, so folgt daraus, dafs die Zeichenwechsel, welche nicht wegen reeller Wurzeln verloren gehen, eben so viele imaginäre Wurzeln andeuten. Dieser Schlufs ist aber auf die transcendenten Gleichungen im *Allgemeinen* nicht anwendbar. Denn, wie früher bewiesen wurde, bestehen diese Gleichungen nicht immer aus Producten einfacher Factoren, die den Wurzeln der Gleichung entsprechen. Wenn man daher findet, dafs zwischen den zwei bestimmenden Grenzen α und β mehr Zeichenwechsel verloren gehen als reelle Wurzeln zwischen diesen Grenzen enthalten sind, so folgt daraus noch nicht, dafs die Gleichung imaginäre Wurzeln hat.

18. Sobald einmal die reellen Wurzeln getrennt sind, so geht die genauere Berechnung ihrer Werthe *ohne allen Unterschied* auf dieselbe Weise fort, wie bei den algebraischen Gleichungen. Wendet man die verbesserte *Newton*sche Näherungsmethode an, wie man sie bei *Fourier* findet, so mufs man von dem in (9.) gegebenen Satze Gebrauch machen, und verfährt auf dieselbe Weise, wie *Fourier* im zweiten Buche seines Werkes

über die Gleichungen. Ich kann daher wieder nur auf dieses Werk verweisen und will blofs in der Kürze die Regeln der Berechnung zusammenstellen, damit ihre Anwendung auf die Lösung einzelner Gleichungen, die später folgen soll, deutlicher werde.

Man zieht zuerst die Grenzen so eng zusammen, dafs nur eine Wurzel der Gleichung $fx = 0$ und keine Wurzel der Gleichungen $f''x = 0$, $f'x = 0$ zwischen denselben enthalten ist. Es ist immer möglich, so enge Grenzen zu ziehen, sobald die Functionen $f''x$ und $f'x$ nicht einen gemeinschaftlichen Factor mit fx haben; im entgegengesetzten Falle müfste man erst diesen Factor suchen und absondern. Sind diese Grenzen gefunden und nennt man die kleinere α, die gröfsere β, so bemerke man, welche derselben so beschaffen ist, dafs sie, statt x in $f^2 x$ und fx substituirt, diesen Functionen gleiche Zeichen giebt: diese Grenze heifse die äufsere. Man bezeichne sie durch ∂, so sind

$$\alpha - \frac{f\alpha}{f'\partial}, \quad \beta - \frac{f\beta}{f'\partial}$$

zwei neue Näherungswerthe von x, und zwar liegt der erste zwischen α und x, der zweite zwischen x und β. Mit diesen neuen Näherungswerthen kann man wieder wie mit α und β verfahren und daraus zwei andere Näherungswerthe herleiten, die der Wurzel noch näher liegen, und dieses Verfahren läfst sich so weit man will fortsetzen. Man wird aber diese zwei Grenzen nicht jedesmal zu berechnen, sondern nur folgende Regel zu beobachten haben. Man ziehe zuerst die Grenzen α und β so eng zusammen, dafs sie nur um eine Decimal-Einheit verschieden sind: ihr Unterschied sei $(\frac{1}{10})^n$. Man nehme alsdann diejenige der Gröfsen $f''\alpha$ und $f''\beta$, deren numerischer Werth der gröfste ist, und dividire ihn durch diejenige der Gröfsen $2f'\alpha$, $2f'\beta$, die den kleinsten Zahlenwerth hat. Es sei $(\frac{1}{10})^k$ die Decimal-Einheit, welche unmittelbar gröfser ist als dieser Quotient. Man untersuche nun ob n gleich $1-k$, oder gröfser als diese Zahl ist. Ist $n < 1-k$, so mufs man die Grenzen enger zusammenziehen, bis die Bedingung $n \geqq 1-k$ erfüllt ist. Man nehme alsdann, wenn β die äufsere Grenze ist, den Quotienten $\frac{f\beta}{f'\beta}$ und entwickele ihn bis zur $2n+k^{\text{ten}}$ Decimalstelle einschliefslich. Die letzte Stelle des Quotienten vermehre man um eine Einheit und addire den so gefundenen Werth zur Grenze β, oder ziehe ihn davon ab, je nachdem $f\beta$ und $f'\beta$ verschiedene oder gleiche Zeichen haben. Der so ent-

stehende neue Näherungswerth β' kann gröfser oder kleiner als die Wurzel sein; was man leicht erfährt, wenn man β' statt x in fx substituirt. In jedem Falle aber ist β' von x um eine Gröfse verschieden, die weniger als $(\frac{1}{10})^{2n+k}$ beträgt. Wenn man daher die letzte Decimalstelle im Werthe von β' um eine Einheit vermehrt oder vermindert, so findet man eine zweite Grenze, die kleiner oder gröfser als die Wurzel ist, je nachdem β' gröfser oder kleiner als diese ist. Mit diesen neuen Grenzen verfahre man wieder wie mit den vorhergehenden, so erhält man allmälig Resultate, die bis auf die Decimalstellen vom Range $2n+k$, $4n+3k$, $8n+7k$ u. s. w. genau sind.

III. Beispiele.

19. Ich werde nun, theils um das Vorhergehende zu erläutern, theils um der dritten Anforderung der Societät Genüge zu leisten, die Werthe einiger Wurzeln verschiedener transcendenter Gleichungen berechnen, und will nur noch eine allgemeine Bemerkung machen. Im Allgemeinen steht es frei, irgend einen beliebigen Differentialquotienten als bestimmende Function zu nehmen, sobald man Grenzen kennt, zwischen welchen er beständig dasselbe Zeichen behält. In der Regel wird es aber am zweckmäfsigsten sein, die Grenzen zu suchen, zwischen welchen $f''x$ dasselbe Zeichen behält, da gewöhnlich die Differentialquotienten einer transcendenten Function desto verwickelter werden, je weiter man die Differentiation fortsetzt, es also auch schwerer sein wird, die Grenzen zu bestimmen, zwischen welchen eine solche Function dasselbe Zeichen behält. Besteht aber der erste Theil der Gleichung theils aus transcendenten, theils aus algebraischen Functionen, so wird es häufig nützlich sein, die Differentiation so weit fortzusetzen, bis die algebraischen Functionen verschwunden sind. Hätte man z. B. die Gleichung

$$fx = \sin x + 5x^3 - 4x^2 + 3x - 6 = 0,$$

so würde man viermal zu differentiiren haben. Dies giebt $f^4 x = \sin x$, und man nimmt alsdann $\sin x$ als bestimmende Function.

20. In Beziehung auf die Schwierigkeit, welche die Auflösung der transcendenten Gleichungen im Verhältnifs zu der der algebraischen Gleichungen macht, kann man die transcendenten Gleichungen in verschiedene Classen eintheilen.

Am leichtesten sind offenbar diejenigen Gleichungen aufzulösen, deren einzelne Glieder nur ganze oder gebrochene Potenzen einer und derselben transcendenten Function enthalten. Solche Gleichungen sind z. B. die folgenden:

$$1. \quad A(\sin x)^\alpha + B(\sin x)^\beta + C(\sin x)^\gamma + \dots M(\sin x)^\mu = 0,$$

$$2. \quad Ae^{\alpha t} + Be^{\beta t} + Ce^{\gamma t} + \dots Me^{\mu t} = 0,$$

wo $A, B, C, \dots M$ bestimmte Zahlen und α, β, γ ebenfalls reelle, ganze oder gebrochene Zahlen sind. Solche Gleichungen kann man nemlich unmittelbar auf algebraische bringen. Man braucht nur statt $\sin x$ in der ersten oder statt e^t in der zweiten Gleichung eine neue unbekannte Gröfse, etwa y zu setzen, so gehen die Gleichungen in folgende Gleichung über:

$$3. \quad Ay^\alpha + By^\beta + Cy^\gamma + \dots My^\mu = 0.$$

Dasselbe ist der Fall bei der Gleichung

$$4. \quad Aa^x + Bb^x + Cc^x + \dots + Mm^x = 0,$$

wo $A, B, C, \dots$ beliebige Zahlen und $a, b, c, \dots$ positive Zahlen sind. Man braucht nur $a = e^\alpha$, $b = e^\beta$, $c = e^\gamma \dots$ zu setzen, so geht die Gleichung (4.) in die Gleichung (2.) über. Sind die Exponenten α, β, γ, ... in der Gleichung (3.) ganze positive Zahlen, so ist die Gleichung eine gewöhnliche algebraische. Sind aber einige dieser Exponenten negative oder gebrochene Zahlen, so hat man nicht nöthig, wie es gewöhnlich in solchen Fällen geschieht, diese Exponenten durch Potenzüren wegzuschaffen, sondern man kann sie unmittelbar nach denselben Regeln behandeln, welche *Fourier* für die gewöhnlichen algebraischen Gleichungen gegeben hat. Da hierüber *Sturm* schon eine Abhandlung geschrieben hat, die vielleicht bereits gedruckt ist, so werde ich mich nicht länger bei diesem Gegenstande aufhalten und verweise auf dessen Bemerkungen *).

21. Zunächst lasse ich die transcendenten Gleichungen folgen, bei welchen sich zwar der erste Theil der Gleichung selbst nicht auf eine algebraische Function zurückführen läfst, aber die sämmtlichen Differentialquotienten algebraische Functionen sind. Dies ist der Fall, wenn in der Gleichung die Functionen $\log x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\text{arc tang}\, x$ etc. vorkommen. Eine solche Gleichung ist z. B.

$$x \log x - 100 = 0,$$

welche *Euler* behandelt hat **). Hier ist, wenn man die natürlichen Loga-

*) Bulletin des sciences par *Férussac*, Sect. I. T. II. 1829.

**) Instit. calc. differ. Tom. II. §. 243.

rithmen anwendet,

$$fx = x \log x - 100,$$
$$f^1 x = \log x + 1,$$
$$f^2 x = \frac{1}{x}.$$

Da $f^2 x$ zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = \infty$ positiv ist, so nehme man diese Function zwischen diesen Grenzen als die bestimmende an. Da x und $\log x$ fortwährend wachsen, so folgt, dafs zwischen diesen Grenzen nur eine Wurzel der Gleichung $fx = 0$ liegen kann. Setzt man $x = 3$, und dann $x = 4$, so findet man

$$[3] = \underset{\frac{1}{3}}{+} \quad \underset{2{,}098\ldots.}{+} \quad \underset{0{,}3093\ldots.}{-}$$
$$[4] = \underset{\frac{1}{4}}{+} \quad \underset{2{,}386\ldots.}{+} \quad \underset{0{,}940\ldots.}{+}$$

Es liegt also die Wurzel zwischen 3 und 4. Nun ist $4 - 3 = (\frac{1}{10})^0$ und $\frac{\frac{1}{3}}{2.2{,}098} = 0{,}07$, also (nach §. 18.)

$$k = 1, \quad n = 0,$$

mithin $n = 1 - k$. Die Grenzen sind also eng genug zur nähernden Berechnung gezogen. Die äufsere Grenze ist hier 4, mithin $\frac{f\beta}{f'\beta} = \frac{0{,}940}{2{,}386}$, und da $2n + k = 1$ ist, so mufs die Division bis zur ersten Decimalstelle ausgeführt werden: also ist $\frac{f\beta}{f'\beta} = 0{,}3$ und mithin *der erste Näherungswerth* $= 4 - 0{,}4 = 3{,}6$.

Substituirt man in fx statt x den Werth 3,6, so erhält man ein *positives* Resultat. Der Werth 3,6 ist also zu grofs, und die Wurzel liegt zwischen 3,5 und 3,6. Nun ist $n = 1$, also $2n + k = 3$. Da 3,6 die äufsere Grenze ist, so hat man $\frac{f(3{,}6)}{f'(3{,}6)} = \frac{0{,}00619\ldots.}{2{,}28093\ldots.} = 0{,}002$; also ist der *zweite Näherungswerth* $3{,}6 - 0{,}003 = 3{,}597$ bis auf $(\frac{1}{10})^3$ genau. Da $f(3{,}597)$ negativ ist, so liegt die Wurzel zwischen 3,597 und 3,598, und da 3,598 die äufsere Grenze ist, so hat man $\frac{f(3{,}598)}{f'(3{,}598)} = \frac{0{,}00163032}{2{,}28037813}$, welcher Quotient bis zur 7ten Decimalstelle entwickelt werden mufs, indem $2n + k = 7$ ist. Dies giebt 0,0007149; also ist der dritte Näherungswerth $3{,}598 - 0{,}000715 = 3{,}597285$ bis auf $(\frac{1}{10})^7$ genau, und zwar liegt der Werth zwischen 3,5972850 und 3,5972851. *Euler* findet 3,5972852.

22. Ich werde nun einige Gleichungen abhandeln, für welche die Differentialquotienten ebenfalls transcendente Gröfsen sind, jedoch von der Art, dafs die numerischen Werthe der darin vorkommenden transcendenten Functionen bereits in Tafeln berechnet sind. Hierher gehören zunächst die trigonometrischen Functionen. Es sei also z. B. die Gleichung

$$fx = x - \cos x = 0$$

gegeben, welche *Euler* ebenfalls behandelt hat *). Es ist einleuchtend, dafs diese Gleichung *nur eine* reelle Wurzel haben kann. Nun ist

$$f'x = 1 + \sin x,$$
$$f''x = \cos x.$$

Da $\cos x$ zwischen den Grenzen $x = 0$, $x = 90^0$ immer positiv ist, so kann $f''x$ zwischen diesen Grenzen als bestimmende Function angenommen werden; $x - \cos x$ ist aber negativ, wenn man $x = 0$ setzt, und positiv, wenn man $x = 90^0$ setzt, woraus schon folgt, dafs eine Wurzel der Gleichung $x - \cos x = 0$ zwischen diesen Grenzen enthalten ist. Zieht man die Grenzen enger zusammen und nimmt als solche zuerst $x = 0{,}7$, $x = 0{,}8$, so findet man

$$[0{,}7] = \underset{0{,}764\ldots}{+} \quad \underset{1{,}644\ldots}{+} \quad \underset{0{,}064\ldots}{-}$$
$$[0{,}8] = \underset{0{,}696\ldots}{+} \quad \underset{1{,}717\ldots}{+} \quad \underset{0{,}103\ldots}{+}$$

Hier ist $\frac{0{,}764}{2.1{,}644} = 0{,}2$ also $k = 0$; auch ist $m = 1$; mithin sind die Grenzen eng genug zur nähernden Berechnung. Die äufsere Grenze ist $x = 0{,}8$, und da $2n + k = 2$ ist, so entwickele man $\frac{f(0{,}8)}{f'(0{,}8)} = \frac{0{,}103}{1{,}717}$ bis zur zweiten Decimalstelle. Dies giebt 0,06: also ist *der erste Näherungswerth* $= 0{,}8 - 0{,}07 = 0{,}73$ bis auf $(\frac{1}{10})^2$ genau. Substituirt man diesen Werth statt x, so findet man, dafs er zu klein ist; der Werth von x liegt also zwischen 0,73 und 0,74 und man hat $\frac{f(7{,}4)}{f'(7{,}4)} = \frac{0{,}001531}{1{,}674\ldots}$, welcher Quotient bis auf die vierte Decimalstelle entwickelt werden mufs. Dies giebt 0,0009; also ist *der zweite Näherungswerth* $0{,}74 - 0{,}001 = 0{,}739$ bis auf $(\frac{1}{10})^4$ genau. Durch Substitution dieses Werthes statt x findet man, dafs die Wurzel zwischen 0,739 und 0,7391 liegt. Der nächste Quotient mufs bis auf die 8te Decimalstelle berechnet werden. Dies giebt $\frac{f(0{,}7391)}{f'(0{,}7391)} =$

*) Introd. in anal. infinit. L. II. §. 531.

$\frac{0,000024887\ldots}{1,67362\ldots} = 0,00001487$; also ist der *dritte Näherungswerth* 0,7391 $-0,00001488 = 0,73908512$ bis auf $(\frac{1}{10})^8$ genau. *Euler* findet 0,7390847.

23. Es sei ferner die Gleichung

$$x - \operatorname{tang} x = 0$$

gegeben, welche in der Theorie der Schwingungen elastischer Körper und in der Theorie der Wärme vorkommt. Statt dieser Gleichung kann man auch schreiben $\frac{x \cos x - \sin x}{\cos x} = 0$, und man kann hier wieder wie früher beweisen, dafs die Wurzeln der Gleichung $\frac{1}{\cos x} = 0$ nicht Wurzeln der gegebenen Gleichung sind. (Vergl. §. 5.) Man braucht daher nur die Gleichung $x \cos x - \sin x = 0$ zu betrachten. Da diese Gleichung unverändert bleibt, wenn man $-x$ statt x setzt, so folgt, dafs jeder positiven Wurzel α eine negative $-\alpha$ entspricht. Man braucht daher nur die positiven Wurzeln zu suchen. Es ist

$$fx = x \cos x - \sin x,$$
$$f'x = -x \sin x,$$
$$f''x = -(x \cos x + \sin x).$$

Die kleinste Wurzel ist $x = 0$. Bezeichnet man durch ω ein Unendlich-Kleines, so ist klar, dafs $f''x$ zwischen den Grenzen $x = \omega$ und $x = 90$ immer negativ ist. Man hat also

$$[\omega] = - - -$$
$$[90^0] = - - -$$

Zwischen diesen Grenzen liegt mithin keine Wurzel. Es ist ferner einleuchtend, dafs keine Wurzel zwischen den Grenzen $x = 90^0$ und $x = 180^0$ enthalten ist, da $\cos x$ zwischen diesen Grenzen immer negativ und $\sin x$ immer positiv ist. Zwischen den Grenzen $x = 180^0$ und $x = 270^0$ ist $f''x$ immer positiv, und kann daher zwischen diesen Grenzen als bestimmende Function angenommen werden. Nun findet man

$$[180^0 + \omega] = + + -$$
$$[270^0] = + + +;$$

also hat die Zeichenreihe $[180 + \omega]$ einen Zeichenwechsel mehr als die Zeichenreihe $[270^0]$, und es liegt daher eine Wurzel zwischen diesen Grenzen. Zieht man die Grenzen enger zusammen, so ergiebt sich, dafs die Wurzel zwischen $x = 4,4$ und $x = 4,5$ liegt, und zwar ist

$$[4,4] = \underset{2,3}{+} \quad \underset{4,187\ldots}{+} \quad \underset{0,4006\ldots,}{-}$$

$$[4,5] = \underset{1,92}{+} \quad \underset{4,398885}{+} \quad \underset{0,028949}{+}$$

Nun ist $\frac{2,3}{8,37} = 0,2$, also $k = 0$; ferner ist $n = 1$; mithin sind die Grenzen eng genug zur nähernden Berechnung. Die äufsere Grenze ist 4,5. Man mufs also den Quotienten $\frac{0,028\ldots}{4,398\ldots}$ bis auf die zweite Decimalstelle entwickeln. Dies giebt 0,00. Mithin ist der erste Näherungswerth $4,5 - 0,01 = 4,49$. Da $f(4,49)$ negativ ist, so folgt hieraus, dafs die Wurzel zwischen 4,49 und 4,5 enthalten ist. Nun ist 4,5 die äufsere Grenze, und der Quotient $\frac{0,028949}{4,398885}$, auf vier Decimalstellen entwickelt, giebt 0,0065; also ist der zweite Näherungswerth $4,5 - 0,0066 = 4,4934$. Dieser Werth ist zu klein; also liegt die Wurzel zwischen 4,4934 und 4,4935. Der Quotient $\frac{f(4,4935)}{f'(4,4935)} = \frac{0,000396339}{4,38627}$ auf 8 Decimalstellen entwickelt, giebt 0,00009035: also ist der dritte Näherungswerth $4,4935 - 0,00009036 = 4,49340964$ bis auf $(\frac{1}{10})^8$ genau. In Bogen-Einheiten ausgedrückt, giebt dieses 257°27′12″, 268. ***Euler*** findet den Näherungswerth 257°27′12″ = 4,49340834 *). Man kann aber vermittelst der ***Euler***schen Methode den Werth noch genauer finden, wenn man alle Glieder der Reihe, die er zur Berechnung anwendet und welche noch auf die achte Decimalstelle Einflufs haben, berücksichtigt. Man findet alsdann, nahe mit unserem Resultate zusammentreffend, den Werth 4,49340968. ***Poisson*** findet **) 4,49331, welcher Werth schon in der vierten Decimalstelle ungenau ist und wahrscheinlich 4,49341 heifsen soll.

Auf dieselbe Weise, wie hier die kleinste positive Wurzel gefunden wurde, können nun auch die übrigen Wurzeln berechnet werden. Es ist aber einleuchtend, dafs es unendlich viele solche Wurzeln giebt und dafs die $n$te Wurzel zwischen den Grenzen $n\pi$ und $(n + \frac{1}{2})\pi$ enthalten ist, wo π die halbe Peripherie bedeutet.

Bemerkenswerth ist auch die Art, wie ***Euler*** durch Umkehrung der Reihen Näherungswerthe für jede $n$te Wurzel findet, die desto genauer sind,

---

*) Introd. in anal. infinit. L. II. §. 539.

) Mém. de l'acad. des sciences T. VIII. p. 420. Als Werth der zweiten Wurzel giebt ***Poisson* 7,73747, was schon in der zweiten Decimalstelle unrichtig ist, indem der wahre Werth 7,725 .... ist.

je gröfser n ist. Die Brauchbarkeit dieses Verfahrens in diesem besondern Falle hängt aber von dem besondern Umstande ab, dafs sich die $n$te Wurzel dem Werthe $(n + \frac{1}{2}\pi)$ immer mehr nähert, je gröfser n ist (vergl. §. 2.).

24. Eine andere Gleichung dieser Art, welche in der Theorie der Schwingungen einer elastischen Kugel vorkommt, ist folgende:

$$(4 - 3x^2)\sin x - 4x\cos x = 0.$$

Auch hier entspricht jeder positiven Wurzel α eine negative $-\alpha$; man braucht daher nur die positiven Wurzeln zu suchen. Die kleinste entspricht dem Werthe $x = 0$. Die nächste Wurzel findet man wie folgt. Es ist

$$fx = (4 - 3x^2)\sin x - 4x\cos x,$$
$$f'x = -x(3x\cos x + 2\sin x),$$
$$f''x = (3x^2 - 2)\sin x - 8x\cos x.$$

Die Function $f''x$ ist zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = 45^0$ immer negativ. Denn ist $3x^2 < 2$ oder $x < \sqrt{\frac{2}{3}}$, das heifst $x < 45^0$, so ist $3x^2 - 2$ und also auch $f''x$ negativ: mithin kann $f''x$ zwischen diesen Grenzen zur bestimmenden Function genommen werden. Bezeichnet man durch ω ein Unendlich-Kleines, so hat man

$$[\omega] = - - -$$
$$[45^0] = - - -.$$

Es liegt also keine Wurzel zwischen 0 und 45^0. Zwischen den Grenzen $x = 45^0$ und $x = 90^0$ kann aber $f''x$ nicht als bestimmende Function gebraucht werden, weil sie zwischen diesen Grenzen das Zeichen wechselt. Man könnte nun zwar den Zwischenraum in kleinere theilen, wird aber schneller zum Ziele kommen, wenn man die höhern Differentialquotienten entwickelt. Denn es ist

$$f'''x = (3x^2 - 10)\cos x + 14x\sin x$$
$$f^{\text{IV}}x = (24 - 3x^2)\sin x + 20x\cos x.$$

Offenbar ist $f^{\text{IV}}x$ zwischen den Grenzen 0 und 90^0 immer positiv und folglich zwischen diesen Grenzen als bestimmende Function zu gebrauchen. Die Zeichenreihen sind

$$[\omega] = + - - - -$$
$$[90^0] = + + + - -.$$

Da nun jede Zeichenreihe nur einen Zeichenwechsel enthält, so liegt keine Wurzel zwischen diesen Grenzen.

Zwischen den Grenzen $x = 90^0$ und $x = 180^0$ ist $f''x$ immer positiv und daher zwischen diesen Grenzen als bestimmende Function brauchbar.

Man findet

$$[90^0] = + - -$$
$$[180^0] = + + +;$$

also ist zwischen diesen Grenzen eine Wurzel enthalten. Die Grenzen sind aber noch nicht eng genug zur nähernden Berechnung, da auch $f'x = 0$ eine Wurzel zwischen diesen Grenzen hat. Zieht man die Grenzen enger zusammen und setzt allenfalls $x = 2{,}5$ und $x = 2{,}6$, so hat man

$$[2{,}5] = \begin{array}{ccc} + & + & - \\ 26{,}04 & 12{,}029 & 0{,}816\ldots \end{array}$$
$$[2{,}6] = \begin{array}{ccc} + & + & + \\ 27{,}2 & 14{,}707 & 0{,}519\ldots \end{array}$$

Hier ist $\frac{27{,}2}{2.12{,}029} = 1, \ldots$, also $k = -1$; auch ist $n = 1$; mithin wird die Bedingung $n \overline{\overline{>}}\, 1 - k$ nicht erfüllt und die Grenzen müssen enger gezogen werden. Setzt man $x = 2{,}56$, $x = 2{,}57$, so findet man

$$[2{,}56] = \begin{array}{ccc} + & + & - \\ 26{,}81 & 13{,}901\ldots & \end{array}$$
$$[2{,}57] = \begin{array}{ccc} + & + & + \\ 26{,}92 & 13{,}88437 & 0{,}09057\ldots \end{array}$$

Hier ist $\frac{26{,}92}{2.13{,}8} = 0{,}9$, also $k = 0$; ferner $n = 2$; folglich sind die Grenzen hinlänglich nahe. Die äufsere Grenze ist 2,57; der Quotient $\frac{0{,}09057}{13{,}88437}$ auf vier Stellen entwickelt, giebt 0,0065: also ist der *erste Näherungswerth* $2{,}75 - 0{,}0066 = 2{,}5634$. Dieser Werth ist zu klein; die Wurzel liegt also zwischen 2,5634 und 2,5635. Bei der nächsten Operation erhält man den Werth bis auf 8 Stellen genau, und zwar ist

$$\frac{f(2{,}5635)}{f'(2{,}5635)} = \frac{0{,}00090157}{13{,}7095659} = 0{,}00006576,$$

also der *zweite Näherungswerth* $2{,}5635 - 0{,}00006577 = 2{,}56343423$. *Poisson* findet 2,56334 *).

Zwischen den Grenzen $x = 180^0$ und $x = 270^0$ ist fx immer positiv, mithin keine Wurzel zwischen diesen Grenzen enthalten. Im vierten Quadranten dagegen liegt eine Wurzel; denn $f''x$ ist zwischen diesen Grenzen immer negativ. Man kann also diese Function wieder als bestimmende ansehen und findet

$$[270^0] = - + +$$
$$[360^0] = - - -$$

*) Mémoires de l'acad. des sc. T. VIII. p. 420.

Die Zeichenreihe [360°] hat also einen Zeichenwechsel weniger als die Zeichenreihe [270°]. Zieht man die Grenzen enger zusammen, so findet man

$$[6{,}0] = \underset{75{,}7}{-} \quad \underset{100{,}34}{-} \quad \underset{6{,}01}{+}$$

$$[6{,}1] = \underset{67{,}95}{-} \quad \underset{107{,}53}{-} \quad \underset{4{,}38}{-}$$

Hier ist $\frac{75{,}7}{2.100{,}34} = 0{,}3$, also $k = 0$, $n = 1$ und $n = 1 - k$.

Da 6,1 die äufsere Grenze ist, so entwickele man den Quotienten $\frac{4{,}38}{107{,}53}$ bis auf die zweite Decimalstelle. Dies giebt 0,04; also ist der *erste Näherungswerth* $6{,}1 - 0{,}05 = 6{,}05$. Da $f(6{,}05)$ negativ ist, so liegt die Wurzel zwischen 6,05 und 6,06. Nun ist $\frac{f(6{,}06)}{f'(6{,}06)} = \frac{0{,}1393}{104{,}75} = 0{,}0013$; also ist der *zweite Näherungswerth* $6{,}06 - 0{,}0014 = 6{,}0586$. Dieser Werth ist zu klein und daher die Wurzel zwischen 6,0586 und 6,0587 enthalten. Nun ist $\frac{f(6{,}0587)}{f'(6{,}0587)} = \frac{0{,}0031285}{104{,}662} = 0{,}00002989$; also ist der *dritte Näherungswerth* $6{,}0587 - 0{,}0000299 = 6{,}0586701$ bis auf $\frac{1}{10^8}$ genau. *Poisson* hat 6,05973.

Es ist einleuchtend, dafs auch diese Gleichung unendlich viele reelle Wurzeln hat und dafs die $n$te Wurzel zwischen $(n - \frac{1}{2})\pi$ und $n\pi$ enthalten ist. Jede dieser Wurzeln kann nach dem vorhergehenden Verfahren bis auf jede beliebige Decimalstelle genau gefunden werden. Wo es sich aber nur um eine ungefähre Annäherung handelt, kann man auch hier mit Nutzen das bei dem früheren Beispiele erwähnte *Euler*sche Verfahren anwenden und durch Umkehrung der Reihen eine Formel finden, welche die folgenden Wurzeln desto genauer giebt, je gröfser n ist.

26. Ich werde nun einige Aufgaben behandeln, bei welchen aufser den trigonometrischen Functionen auch die Functionen $e^x + e^{-x}$ und $e^x - e^{-x}$ vorkommen. Auch zur Berechnung dieser Functionen besitzen wir jetzt Tafeln in der vortrefflichen Abhandlung *Gudermanns* über die Theorie der Potenzialfunctionen *). Ich werde nach dem Vorgange dieses Gelehrten zur Abkürzung $\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \text{Cos}\,x$ und $\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \text{Sin}\,x$ setzen.

Es sei nun die Gleichung

$$fx = (e^x + e^{-x})\cos x - 2 = 0$$

*) Crelle, Journal für die Mathematik, Bd. 6. u. 7.

gegeben, statt welcher man auch

$$\operatorname{Cos} x \cos x - 1 = 0$$

setzen kann. Es ist klar, dafs jeder positiven Wurzel x eine negative $-x$ und eine imaginäre $\pm x\sqrt{-1}$ entspricht.

Hier hat man nun

$$fx = \operatorname{Cos} x \cos x - 1,$$
$$f'x = \cos x \operatorname{Sin} x - \sin x \operatorname{Cos} x,$$
$$f''x = -2 \sin x \operatorname{Sin} x.$$

Die kleinste positive Wurzel der Gleichung ist $x = 0$. Bezeichnet alsdann ω ein Unendlich-Kleines, so ist $f''x$ zwischen den Grenzen $x = \omega$ und $x = 90^0$ immer negativ und kann daher zwischen diesen Grenzen als bestimmende Function gebraucht werden. Es ist aber

$$[\omega] = - - -$$
$$[90^0] = - - -;$$

also liegt keine Wurzel zwischen diesen Grenzen. Dafs zwischen $x = 90^0$ und $x = 270^0$ keine Wurzel liegt, ist von selbst klar, da fx zwischen diesen Grenzen immer negativ ist. Zwischen den Grenzen $x = 270^0$ und $x = 360^0$ ist $f''x$ immer positiv und kann daher wieder als bestimmende Function gebraucht werden. Nun ist

$$[270^0] = + + -$$
$$[360^0 - \omega] = + + +;$$

also ist eine Wurzel zwischen diesen Grenzen enthalten. Zieht man die Grenzen enger zusammen und setzt zuerst $x = 4{,}7$ und dann $x = 4{,}8$, so ergiebt sich

$$[4{,}7] = \underset{109{,}8}{+} \quad \underset{54{,}28}{+} \quad \underset{1{,}68}{-}$$
$$[4{,}8] = \underset{118{,}2}{+} \quad \underset{65{,}84}{+} \quad \underset{4{,}31.}{+}$$

Es ist aber $\frac{118{,}2}{2 \cdot 54{,}2} = 1, \ldots.,$ also $k = -1$, $n = 1$, das heifst, die Grenzen sind nicht eng genug zur nähernden Berechnung. Setzt man ferner $x = 4{,}73$, $x = 4{,}74$, so ergiebt sich

$$[4{,}73] = \underset{113{,}26}{+} \quad \underset{57{,}6409}{+} \quad \underset{0{,}0023}{-}$$
$$[4{,}74] = \underset{114{,}38}{+} \quad \underset{58{,}7791}{+} \quad \underset{0{,}5796.}{+}$$

Hier ist $\frac{114{,}3}{2 \cdot 57{,}6} = 0{,}9$, also $k = 0$, $n = 2$.

Die äufsere Grenze ist 4,74 und der Quotient $\frac{f(4,74)}{f'(4,74)} = \frac{0,5796}{58,7791}$ mufs auf vier Decimalstellen entwickelt werden. Dies giebt 0,0098; also ist der *erste Näherungswerth* 4,74 — 0,0099 = 3,7301. Dieser Werth ist zu grofs, mithin die Wurzel zwischen 4,7300 und 4,7301 enthalten. Der Quotient $\frac{f(4,7301)}{f'(4,7301)}$ auf 8 Decimalstellen entwickelt, giebt $\frac{0,00340159}{57,6512988} = 0,00005900$; also ist der *zweite Näherungswerth* 4,7301 — 0,00005901 = 4,73004099.

Die hier abgehandelte Gleichung kommt bekanntlich in der Theorie der Schwingungen elastischer Stäbe vor. Statt des hier gefundenen Werthes der ersten Wurzel hat *Poisson* 4,73003 *).

26. Auch die Gleichung

$$(e^x + e^{-x}) \cos x + 2 = 0,$$

statt welcher man

$$\cos x \operatorname{Cos} x + 1 = 0$$

schreiben kann, kommt in der Theorie der Schwingungen elastischer Stäbe vor. Hier ist

$$fx = \cos x \operatorname{Cos} x + 1,$$
$$f'x = \cos x \operatorname{Sin} x - \sin x \operatorname{Cos} x,$$
$$f''x = -2 \sin x \operatorname{Sin} x.$$

Zwischen $x = 0$ und $x = 90^0$ ist fx immer positiv; es kann also keine Wurzel zwischen diesen Grenzen liegen. Zwischen den Grenzen $x = 90^0$ und $x = 180^0$ ist $f''x$ immer negativ und kann daher als bestimmende Function gebraucht werden. Man hat

$$[90^0] = - - +$$
$$[180^0] = - - -;$$

es liegt also eine Wurzel zwischen diesen Grenzen. Nimmt man nun die engeren Grenzen $x = 1,8$ und $x = 1,9$, so findet man

$$[1,8] = \underset{5,7}{-}\ \underset{3,69}{-}\ \underset{0,29}{+}$$
$$[1,9] = \underset{6,11}{-}\ \underset{4,29}{-}\ \underset{0,10}{-}$$

Hier ist $\frac{6,1}{2.3,69} = 0,8$, also $k = 0$, $n = 1$; der Quotient $\frac{0,10}{4,29}$ mufs da-

*) Mém. de l'acad. des sc. T. VIII. p. 485. In dem Traité de mécanique ed. 2. T. 2. p. 389 dagegen steht der Werth 4,74503; was aber offenbar 4,73003 heifsen mufs, da dieser Werth = $\frac{3}{2}\pi + 0,01765$ sein soll.

her auf zwei Decimalstellen entwickelt werden. Dies giebt 0,02; also ist *der erste Näherungswerth* 1,9 — 0,03 = 1,87. Nun ist $f(1,87)$ positiv; folglich mufs die Wurzel zwischen 1,87 und 1,88 liegen. Man hat $\frac{f(1,88)}{f'(1,88)} = \frac{0,02033}{4,16792} = 0,0048$; also ist *der zweite Näherungswerth* 1,88 — 0,0049 = 1,8751. Dieser Werth ist zu klein; mithin liegt die Wurzel zwischen 1,8751 und 1,8752. Der folgende Näheruugswerth kann bis auf 8 Stellen genau gefunden werden, und zwar findet man $\frac{f(1,8752)}{f'(1,8752)} = \frac{0,00039722}{4,138717} = 0,00009597$; also ist *der dritte Näherungswerth* 18752 — 0,00009598 = 1,87510402. *Poisson* findet in der erwähnten Abhandlung 1,8756 *).

27. Ich will nun noch einige Gleichungen abhandeln, bei welchen der Werth von fx in einer convergirenden Reihe ausgedrückt ist, für welche *noch keine* Tafeln berechnet sind. Ich nehme zuerst die Gleichung

$$1. \quad fx = 1 - x + \frac{x^2}{(1.2)^2} - \frac{x^3}{(1.2.3)^2} + \frac{x^4}{(1.2.3.4)^2} - \dots = 0,$$

welche bekanntlich in der Theorie der Bewegung der Wärme in einem Cylinder und bei mehreren anderen physikalisch-mathematischen Untersuchungen vorkommt **). Diese Gleichung kann keine negativen Wurzeln haben, da alle Glieder der Reihe positiv werden, sobald man statt x eine negative Zahl setzt. Man braucht also nur die positiven Wurzeln zu suchen. Hier ist

$$2. \quad f'x = -1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2^2.3} + \frac{x^3}{2^2.3^2.4} - \frac{x^4}{2^2.3^2.4^2.5} + \dots$$

$$3. \quad f''x = \tfrac{1}{2} - \frac{x}{2.3} + \frac{x^2}{2^2.3.4} - \frac{x^3}{2^2.3^2.4.5} + \dots$$

Die drei Reihen (1., 2., 3.) sind nach bekannten Sätzen convergirende Reihen, und es kann daher vermittelst ihrer der Werth von fx, $f'x$, $f''x$ für jedes gegebene x mit jedem beliebigen Grade von Genauigkeit berechnet werden, sobald x eine endliche, reelle Gröfse ist. Bei diesen Reihen kommt man nemlich, wenn man statt x irgend einen beliebigen endlichen reellen Werth setzt, jedesmal an ein Glied, von welchem an gerechnet der Zahlenwerth

*) Der Werth 1,87011, den *Poisson* im Traité de méc. T. II. p. 390 giebt, ist offenbar unrichtig und mufs 1,87511 heifsen, da dieser Werth $= \frac{1}{2}\pi + \delta'$ sein soll, wo $\delta' = 0,30431$ ist.

**) Auch diese Gleichung behandelt *Poisson* in der erwähnten Abhandlung p. 522.

jedes Gliedes gröfser ist als der des nachfolgenden. Bei der Reihe (1.) z. B. erhält man aus jedem Gliede $\frac{x^m}{2^2.3^2....m^2}$, wenn man es mit $\frac{x}{(m+1)^2}$ multiplicirt, das nachfolgende. Sobald also m so grofs ist, dafs $x<(m+1)^2$ ist, so wird jedes folgende Glied kleiner als das vorhergehende und die Glieder convergiren zu dem Werthe Null hin. Bezeichnet man daher im Allgemeinen diese Reihe durch

$$f(x) = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + ... + a_m - a_{m+1} + a_{m+2} - a_{m+3} ....,$$

setzt $a_0 - a_1 + a_2 - .... - a_{m-1} = S$ und nimmt an, dafs von a_m an jedes Glied gröfser ist als das folgende, so hat man

$$fx > S, \quad fx < S + a_m, \quad fx > S + a_m - a_{m-1} \text{ etc.},$$

so dafs man also, indem man die einzelnen Glieder der Reihe zusammen addirt, sich nicht blofs dem wahren Werthe immer mehr nähert, sondern auch fortwährend zwei Grenzen hat, zwischen welchen der Werth der Reihe eingeschlossen ist. Die ersten Ziffern, welche den beiden Grenzen gemeinschaftlich sind, müssen daher auch nothwendig dem wahren Werthe der Reihe angehören, und man kann mithin diesen Werth bis auf jede beliebige Stelle genau berechnen. Aehnliches gilt auch von den übrigen Reihen.

In der Reihe $f''x$ werden zwei auf einander folgende Glieder allgemein durch

$$\frac{x^m}{2^2.3^2....m^2(m+1)(m+2)}, \quad \frac{x^{m+1}}{2^2.3^2....(m+1)^2(m+2)(m+3)}$$

ausgedrückt. Soll nun $\frac{x^m}{2^2.3^2....m^2(m+1)(m+2)} > \frac{x^{m+1}}{2^2.3^2....(m+1)^2(m+2)(m+3)}$ sein, so mufs $1 > \frac{x}{(m+1)(m+3)}$ oder $x < (m+1)(m+3)$ sein. Setzt man $m=2$, so ist $(m+1)(m+3) = 15$: sobald also x kleiner als 15 ist, ist jedes positive Glied der Reihe $f''x$, von $\frac{x^2}{2^2.3.4}$ an gerechnet, gröfser als das nachfolgende negative: so lange aber x nicht gröfser als 3 ist, bleibt auch $\frac{1}{2} - \frac{x}{2.3}$ positiv. Die Function $f''x$ ist daher zwischen den Grenzen $x=0$ und $x=3$ immer positiv und kann als bestimmende Function gebraucht werden.

Es ist

$$[0] = + - +$$
$$[3] = + - - ;$$

mithin ist zwischen diesen Grenzen eine Wurzel der Gleichung $fx=0$ enthalten. Zieht man die Grenzen enger zusammen, damit sie nur um eine

Decimal-Einheit verschieden sind, so findet man

$$[1] = \underset{0,35}{+}\quad \underset{0,57}{-}\quad \underset{0,2}{+}$$

$$[2] = \underset{0,23}{+}\quad \underset{0,28}{-}\quad \underset{0,19}{-}\ ^{*)}.$$

Hier ist 1 die äufsere Grenze. Nun ist $\frac{0,35}{2.0,28} = 0,6$; **also** $k = 0$, **und aufserdem** $n = 0$; **mithin sind die Grenzen nicht eng genug zur nähernden Berechnung. Setzt man** $x = 1,4$ **und** $x = 1,5$, **so findet man**

$$[1,4] = \underset{0,303}{+}\quad \underset{0,445}{-}\quad \underset{0,020}{+}$$

$$[1,5] = \underset{0,292}{+}\quad \underset{0,415}{-}\quad \underset{0,0232.}{-}$$

Nun ist $\frac{0,303}{2.0,415} = 0,3$, **also** $k = 0$, $n = 1$; **mithin sind die Grenzen eng genug zur nähernden Berechnung. Der Quotient** $\frac{0,020}{0,445}$, **auf zwei Decimalstellen berechnet, giebt 0,04; also ist** ***der erste Näherungswerth*** $1,4 + 0,05 = 1,45$. **Dieser Werth ist zu grofs und die Wurzel ist zwischen 1,44 und 1,45 enthalten. Da 1,44 die äufsere Grenze ist, so mufs man den Quotienten** $\frac{f(1,44)}{f'(1,44)}$ **auf vier Decimalstellen entwickeln. Dieses giebt** $\frac{0,002508}{0,4334} = 0,0057$; **also ist** ***der zweite Näherungswerth*** $1,44 + 0,0058 = 1,4458$ **bis auf** $(\frac{1}{10})$ **genau. Auch** ***Poisson*** **findet 1,4457.**

Die nächste Wurzel findet man am leichtesten durch folgende Betrachtungen. So wie früher nachgewiesen wurde, dafs die Function $f''x$ **zwischen den Grenzen** $x = 0$ **und** $x = 3$ **immer positiv ist, so lassen sich auch leicht ähnliche, aber weitere Grenzen angeben, zwischen welchen die folgenden Differentialquotienten beständig dasselbe Zeichen haben. Denn man hat**

$$4.\quad f'''x = -\left(\frac{1}{2.3} - \frac{x}{2.3.4} + \frac{x^2}{2^2.3.4.5} - \frac{x^3}{2^2.3^2.4.5.6} + \frac{x^4}{2^2.3^2.4^2.5.6.7} - \ldots\right),$$

$$5.\quad f^{IV}x = \frac{1}{2.3.4} - \frac{x}{2.3.4.5} + \frac{x^2}{2^2.3.4.5.6} - \frac{x^3}{2^2.3^2.4.5.6.7} + \ldots),$$

$$6.\quad f^{V}x = -\left(\frac{1}{2.3.4.5} - \frac{x}{2.3.4.5.6} + \frac{x^2}{2^2.3.4.5.6.7} - \frac{x^3}{2^2.3^2.4.5.6.7.8} + \ldots\right),$$

---

*) Man bemerke, dafs es nur nöthig ist, die Werthe von zwei der Functionen $f''x$, $f'x$, fx zu berechnen, indem man daraus den Werth der dritten finden kann, da diese drei Functionen durch die Gleichung

$$fx + f'x = -xf''x$$

mit einander verbunden sind.

7. $f^{\text{VI}}x = \frac{1}{2.3.4.5.6} - \frac{x}{1.3.4.5.6.7} + \frac{x^2}{2^2.3.4.5.6.7.8} - \frac{x^3}{2^2.3^2.4.5.6.7.8.9} + \dots,$

8. $f^{\text{VII}} = -\left(\frac{1}{2.3.4.5.6.7} - \frac{x}{2.3.4\,5.6.7.8} + \frac{x^2}{2^2.3.4.5.6.7.8.9} - \frac{x^3}{2^2.3^2 4.5.6.7.8.9.10} + \dots\right).$

In der Reihe (4.) ist nun der Zahlenwerth jedes Gliedes gröfser als der des folgenden, sobald x nicht gröfser als 4 ist: daher ist $f^{\text{III}}x$ zwischen den Grenzen $x=0$ und $x=4$ immer negativ. Eben so findet man aus den Reihen (5., 6., 7., 8.), dafs $f^{\text{IV}}x$ zwischen den Grenzen $x=0$ und $x=5$ immer positiv ist, dafs $f^{\text{V}}x$ zwischen den Grenzen $x=0$ und $x=6$ immer negativ ist, dafs $f^{\text{VI}}x$ zwischen den Grenzen $x=0$ und $x=7$ immer positiv ist und $f^{\text{VII}}x$ zwischen den Grenzen $x=0$ und $x=8$ immer negativ. Man kann daher jede dieser Functionen zwischen den entsprechenden Grenzen als bestimmende Function ansehen. Nimmt man z. B. $f^{\text{VII}}x$ als bestimmende Function, so hat man

	$f^{\text{VII}}x$	$f^{\text{VI}}x$	$f^{\text{V}}x$	$f^{\text{IV}}x$	$f^{\text{III}}x$	$f^{\text{II}}x$	$f^{\text{I}}x$	fx
[0] =	−	+	−	+	−	+	−	+
[8] =	−	+	−	+	−	−	+	+ *).

Die obere Reihe enthält 7, die untere 5 Zeichenwechsel: es sind also zwischen den Grenzen $x=0$ und $x=8$ zwei Wurzeln der Gleichung $fx=0$ enthalten. Da wir aber bereits wissen, dafs eine Wurzel, und nur eine zwischen den Grenzen $x=0$ und $x=3$ enthalten ist, so mufs die andere nothwendig zwischen den Grenzen $x=3$ und $x=8$ liegen. Substituirt man allmälig die dazwischen fallenden Werthe 4, 5, 6, 7, so findet man, dafs die Wurzel zwischen 7 und 8 enthalten ist; denn es ist

$$[7] = -+-+--+-,$$

das heifst die Zeichenreihe [7] hat 6 Zeichenwechsel, während die Zeichenreihe [8] nur 5 hat. Zugleich ergiebt sich aus dem Vergleiche der zwei Reihen [7] und [8], dafs die Gleichung $f^{\text{II}}x=0$ zwischen den Grenzen $x=7$ und $x=8$ keine Wurzel hat und dafs also $f^{\text{II}}x$ zwischen diesen Grenzen als bestimmende Function gebraucht werden kann. Und zwar

---

*) Da je drei aufeinanderfolgende Differentialquotienten $f^n x$, $f^{n+1}x$, $f^{n+2}x$ durch die Gleichung

$$f^n x + (n+1) f^{n+1} x + x f^{n+2} x = 0$$

mit einander verbunden sind, so ist klar, dafs man die Werthe aller folgenden Differentialquotienten unmittelbar aus den Werthen von fx und $f'x$ finden kann.

hat man

$$[7] = \underset{0{,}007}{-}\quad\underset{0{,}13}{+}\quad\underset{0{,}07}{-}$$

$$[8] = \underset{0{,}02}{-}\quad\underset{0{,}27}{+}\quad\underset{0{,}04}{+}$$

Nun ist $\frac{0{,}02}{2.0{,}13} = 0{,}07$, also $k = 1$; auch ist $n = 0$; mithin die Bedingung $n = 1 - k$ erfüllt. Hier ist 7 die äufsere Grenze und es mufs der Quotient $\frac{0{,}07}{0{,}13}$ auf eine Decimalstelle entwickelt werden. Dies giebt 0,5; also ist *der erste Näherungswerth* $7 + 0{,}6 = 7{,}6$. Dieser Werth ist zu klein; mithin liegt die Wurzel zwischen 7,6 und 7,7. Ferner hat man, wenn man den Quotienten $\frac{f(7{,}6)}{f'(7{,}6)} = \frac{0{,}002}{0{,}123}$ auf drei Decimalstellen entwickelt, 0,016; also ist *der zweite Näherungswerth* $7{,}6 + 0{,}017 = 7{,}617$. Dieser Werth ist zu klein. Die Wurzel liegt mithin zwischen 7,617 und 7,618. Der Quotient $\frac{f(7{,}617)}{f'(7{,}617)}$ $= \frac{0{,}0001005}{0{,}12326}$ kann auf 7 Stellen entwickelt werden. Dieses giebt 0,0008153; also ist *der dritte Näherungswerth* 7,6178153. *Poisson* findet 7,6243, welcher Werth schon in der zweiten Decimalstelle unrichtig ist.

Auf dieselbe Weise können nun auch die übrigen Wurzeln leicht mit Hülfe der höheren Differentialquotienten gefunden werden.

28. Die Gleichung

$$Fx = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3.2^2} - \frac{x^3}{4(2.3)^2} + \frac{x^4}{5(2.3.4)^2} \dots = 0,$$

welche in der Theorie der Bewegung eines elastischen Membrans vorkommt, steht mit der vorhergehenden in genauer Verbindung, indem $Fx = -f'x$ ist. Diese Gleichung hat ebenfalls nur positive Wurzeln und es ergiebt sich aus den im Vorhergehenden angestellten Betrachtungen, dafs $F''x$ zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = 4$ immer positiv ist und mithin zwischen diesen Grenzen als bestimmende Function gebraucht werden kann. Man findet

$$[0] = + - +$$
$$[4] = + + -$$

Offenbar liegt also eine Wurzel der Gleichung zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = 4$. Da aber auch eine Wurzel der Gleichung $F'x = 0$ zwischen diesen Grenzen liegt, so mufs man engere Grenzen nehmen. Man findet

$$[3] = + - +$$
$$[4] = + + -$$

Diese Grenzen sind noch nicht eng genug. Dagegen hat man

$$[3,6] = \underset{0,06}{+} \quad \underset{0,11}{-} \quad \underset{0,007}{+}$$

$$[3,7] = \underset{0,05}{+} \quad \underset{0,10}{-} \quad \underset{0,003.}{-}$$

Hier ist $\frac{0,06}{2.0,10} = 0,3$, also $k = 0$, $n = 1$. Die äufsere Grenze ist 3,6 und man hat $\frac{0,007}{0,11} = 0,06$; also ist *der erste Näherungswerth* $3,6 + 0,07 = 3,67$. Dieser Werth ist zu klein; also ist die Wurzel zwischen 3,67 und 3,68 enthalten. Ferner ist $\frac{F(3,67)}{F'(3,67)} = \frac{0,000053}{0,1097} = 0,0004$, also *der zweite Näherungswerth* 3,6705 bis auf $(\frac{1}{10})^4$ genau. Statt dieses Werthes hat *Poisson* den Werth 3,55, der schon in der ersten Decimalstelle abweicht *).

Um die nächste Wurzel zu finden, betrachte man die höheren Differentialquotienten. Es ergiebt sich aus dem Früheren, dafs allgemein $F^{2m}x$ positiv ist zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = 2m + 2$, und dafs $F^{2m+1}x$ negativ ist zwischen den Grenzen $x = 0$, $x = 2m + 3$. Diese Functionen können also zwischen den entsprechenden Grenzen als bestimmende gebraucht werden. Nimmt man z. B. die Function $F^{11}x$ zur bestimmenden, so weifs man, dafs diese Function zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = 13$ beständig negativ ist. Nun ist

	$F^{\text{xi}}x$	$F^{\text{x}}x$	$F^{\text{ix}}x$	$F^{\text{viii}}x$	$F^{\text{vii}}x$	$F^{\text{vi}}x$	$F^{\text{v}}x$	$F^{\text{iv}}x$	$F^{\text{iii}}x$	$F^{\text{ii}}x$	$F^{\text{i}}x$	Fx
[0] =	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+
[13] =	−	+	−	+	−	+	−	+	−	−	+	+

Die Zeichenreihe [0] enthält 11 Zeichenwechsel, die Zeichenreihe [13] nur 9. Es werden also zwischen den Grenzen 0 und 13 zwei Wurzeln der Gleichung $Fx = 0$ angedeutet, und da man schon weifs, dafs eine dieser Wurzeln zwischen 0 und 4 enthalten ist, so mufs die andere zwischen 4 und 13 liegen.

Uebrigens wäre es nicht nöthig gewesen, bis zur Function $f'x$ zurückzugehen, um zu finden, wie viele Wurzeln zwischen den Grenzen 0 und 13 liegen. Das vorstehende Schema zeigt nämlich, dafs die Gleichung $F'''x = 0$ zwischen den Grenzen 0 und 13 keine Wurzel hat, und dafs $F'''x$ zwischen diesen Grenzen beständig negativ ist. Dies hätte

*) In der angeführten Abhandlung p. 506.



man auch unmittelbar aus der Reihe finden können, welche den Werth von $F'''x$ angiebt. Substituirt man in derselben statt x den Werth 13, so ist zwar das erste Glied $\frac{1}{2.3.4}$ kleiner als das darauf folgende $\frac{13}{2.3.4.5}$: bei den spätern Gliedern ist aber jedes positive Glied gröfser als das darauf folgende negative; mithin ist die Summe dieser Glieder positiv. Nun ist aber schon der Werth der Summe der ersten Glieder

$$\frac{1}{2.3.4}-\frac{13}{2.3.4.5}+\frac{13^2}{2^2.3.4.5.6}-\frac{13^3}{2^2.3^2.4.5.6.7}+\frac{13^4}{2^2.3^2.4^2.5.6.7.8}-\frac{13^5}{2^2.3^2.4^2.5^2.6.7.8.9}$$

positiv: mithin ist um so mehr $-F'''13$ positiv oder $F'''13$ negativ; und eben so ist es bei den kleineren Zahlen. Um die zweite Wurzel zu finden, braucht man daher nur das Schema

$$\begin{array}{rcccc} & F''' & F''x & F'x & Fx \\ [4] = & - & + & + & - \\ [13] = & - & - & + & + \end{array}$$

zu betrachten. Da aber $F''x$ zwischen diesen Grenzen eine Wurzel hat, so mufs man die Grenzen enger ziehen. Man findet

$$\begin{array}{rccc} [12] = & \underset{0,003}{-} & \underset{0,025}{+} & \underset{0,007}{-} \\ [13] = & \underset{0,004}{-} & \underset{0,021}{+} & + \end{array}$$

Hier ist $\frac{0,004}{2.0,021}=0,9$; also ist $k=0$, $n=0$. Die Grenzen sind daher nicht eng genug zur nähernden Berechnung.

Man findet ferner

$$\begin{array}{rccc} [12,3] = & \underset{0,004}{-} & \underset{0,024}{+} & \underset{0,000113}{-} \\ [12,4] = & \underset{0,004}{-} & \underset{0,024}{+} & + \end{array}$$

Es ist $\frac{0,004}{2.0,024}=0,08$, also $k=1$; auch ist $n=1$, mithin die Bedingung $n>1-k$ erfüllt. Da $2n+k=3$ ist, so mufs der Quotient $\frac{0,000113}{0,024}$ auf drei Decimalstellen entwickelt werden. Dies giebt 0,004; also ist der *erste Näherungswerth* 12,305. Dieser Werth ist zu grofs; mithin ist die Wurzel zwischen 12,304 und 12,305 enthalten. Der nächste Näherungswerth kann nun auf 7 Decimalstellen genau gefunden werden. Es ist

$$\frac{F(12,304)}{F'(12,304)}=\frac{0,000014980}{0,024393}=0,0006141;$$

also ist der nächste Näherungswerth 12,3046142. *Poisson* findet den Werth 12,41 (ebend.).

29. Diese Beispiele werden genügen, um zu zeigen, wie man in ähnlichen Fällen zu verfahren hat, und um zu beweisen, dafs man vermittelst der angegebenen Methode alle reellen Wurzeln der transcendenten Gleichungen mit jedem beliebigen Grade von Genauigkeit finden kann. Ich will nun schliefslich noch eine besonders interessante Frage berühren, nemlich die, wie man erkennen kann, ob eine transcendente Gleichung nur reelle Wurzeln hat. Auf diese Frage ist man besonders durch mathematisch-physikalische Untersuchungen gekommen, welche häufig auf transcendente Gleichungen führen, und wo es sich oft unmittelbar aus der Natur der Untersuchung selbst ergiebt, dafs solche Gleichungen keine imaginären Wurzeln haben. Es kommt darauf an, dasselbe auf rein analytischem Wege nachzuweisen. Allgemeine Regeln, vermittelst deren man in jedem Falle unmittelbar aus dem Bau der Gleichung entscheiden könnte, ob eine transcendente Gleichung nur reelle Wurzeln hat, giebt es bis jetzt nicht; und dies darf um so weniger auffallen, da die ähnliche Untersuchung in Beziehung auf die algebraischen Gleichungen ebenfalls nicht ohne Schwierigkeiten ist. Durch verschiedene besondere Betrachtungen kann man aber allerdings von einer Menge transcendenter Gleichungen beweisen, dafs sie *nur* reelle Wurzeln haben. Am einfachsten geschieht es natürlich in dem Falle, wenn eine Gleichung $fx = 0$ gegeben ist und man weifs, dafs fx das Product einer Anzahl einfacher Factoren ist, die alle reellen Wurzeln der gegebenen Gleichung entsprechen. So z. B. hat die Gleichung $\sin x = 0$ nothwendig nur reelle Wurzeln, da

$$\sin x = y\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\ldots\ldots$$

ist; dasselbe ist bei der Gleichung $\cos x = 0$ der Fall.

Eine andere sehr fruchtbare Betrachtungsweise besteht darin, dafs man in der gegebenen Gleichung $fx = 0$ statt x seines Werths $a+b\sqrt{-1}$ substituirt, wo a und b reelle Gröfsen bedeuten, und dann nachweiset, dafs die Annahme auf Widersprüche führt, wenn man nicht $b = 0$ setzt. Diese Beweisführung scheint zuerst *Fourier* angewendet zu haben, welcher bemerkt*), dafs es hinreiche, den Werth $a+b\sqrt{-1}$ statt x in die Gleichung $x-\lambda\tan x = 0$ zu substituiren, wo λ eine Zahl bedeutet, die kleiner als die Einheit ist, um zu beweisen, dafs die Gleichung keine Wurzel dieser Art haben könne. Später hat *Cauchy* in einer besonderen Abhandlung

*) Théorie de la chaleur p. 366.

diese Idee ausführlich behandelt und auf eine grofse Anzahl von Gleichungen angewendet *). Indem ich auf diese Abhandlung verweise, werde ich mich begnügen, hier noch einige Gleichungen abzuhandeln, die nicht bei *Cauchy* vorkommen, und Gelegenheit finden, dabei noch einige besondere Kunstgriffe anzuwenden. Ich werde besonders die im Früheren abgehandelten Gleichungen berücksichtigen.

Die Gleichung

$$\sin x = a$$

kann keine imaginären Wurzeln von der Form $y + z\sqrt{-1}$ haben, wenn a eine Zahl bedeutet, die nicht gröfser als die Einheit ist. Denn substituirt man statt x den Werth $y + z\sqrt{-1}$, so erhält man die zwei Gleichungen

$$1. \quad \sin y \,.\, \tfrac{1}{2}(e^z + e^{-z}) = a,$$

$$2. \quad \cos y \,.\, \tfrac{1}{2}(e^z - e^{-z}) = 0.$$

Soll nun z nicht 0 sein, so kann man der zweiten Gleichung nur dann Genüge leisten, wenn man $\cos y = 0$ setzt. In diesem Falle ist aber $\sin y = 1$, also ginge die Gleichung (1.) in folgende über

$$3. \quad \tfrac{1}{2}(e^z + e^{-z}) = a.$$

Nun ist aber

$$\tfrac{1}{2}(e^z + e^{-z}) = 1 + \tfrac{1}{2}z^2 + \frac{z^4}{2.3.4} + \dots > 1:$$

also kann die Gleichung (3.) nicht bestehen, wenn a der Einheit gleich oder kleiner als dieselbe ist. Der Beweis gilt auch noch in dem Falle, wenn $y = 0$ ist.

Auch die Gleichung

$$\cos x = a$$

kann keine imaginären Wurzeln von der Form $x = y + z\sqrt{-1}$ haben, wenn a nicht gröfser als die Einheit ist. Denn substituirt man diesen Werth statt x, so findet man die zwei Gleichungen

$$4. \quad \cos y \,.\, \tfrac{1}{2}(e^z + e^{-z}) = a,$$

$$5. \quad \sin y \,.\, \tfrac{1}{2}(e^z - e^{-z}) = 0.$$

Soll nun z nicht gleich Null sein, so mufs $\sin y = 0$, also $\cos y = 1$ sein; mithin hat man wieder

$$\tfrac{1}{2}(e^z + e^{-z}) = a;$$

welche Gleichung nicht bestehen kann, wenn $a \overline{\gtrless} 1$ ist.

Auch die in §. 24. abgehandelte Gleichung

$$(4 - 3x^2)\sin x - 4x\cos x = 0$$

---

*) *Cauchy* Exercices des Mathemat. T. I. p. 297 ff.

hat keine imaginären Wurzeln. Diese Gleichung kann auch wie folgt geschrieben werden:

$$6.\quad \operatorname{tang} x = \frac{-\frac{1}{3}x}{x^2-\frac{1}{3}};$$

sie ist mithin in der allgemeineren Gleichung

$$\operatorname{tang} x = \frac{ax}{x^2+b}$$

enthalten, welche bereits *Cauchy* in der erwähnten Abhandlung (§. 4.) abgehandelt hat. Gerade den Fall aber, der hier zur Betrachtung kommt, wo nemlich a negativ und $b=a$ ist, hat er nicht erörtert. Man kann nun zuerst beweisen, dafs die Gleichung (6.) keine imaginäre Wurzel von der Form $x=y\sqrt{-1}$ haben kann; oder, man kann noch allgemeiner beweisen, dafs die Gleichung

$$7.\quad \operatorname{tang} x = -\frac{ax}{x^2-a}$$

keine solche Wurzel haben kann, sobald $a>3$ ist. Denn setzt man in (7.) statt x den Werth $y\sqrt{-1}$, so erhält man

$$\frac{a}{a+y^2} = \frac{1+\frac{y^2}{1.2.3}+\frac{y^4}{1.2.3.4.5}+\dots}{1+\frac{y^2}{1.2}+\frac{y^4}{1.2.3.4}+\dots}$$

oder

$$8.\quad a+\frac{ay^2}{1.2}+\frac{ay^4}{1.2.3.4}+\dots = a+\left.\begin{matrix}\frac{a}{1.2.3}\\ +1\end{matrix}\right\} y^2 + \left.\begin{matrix}\frac{a}{1.2.3.4.5}\\ +\frac{1}{1.2.3}\end{matrix}\right\} y^4+\dots$$

Ist nun aber $a<3$, so ist offenbar der Coefficient jeder Potenz von y in der ersten Reihe kleiner als der Coefficient der entsprechenden Potenz in der zweiten, nemlich

$$\frac{a}{1.2} < 1+\frac{a}{1.2.3},$$

$$\frac{a}{1.2.3.4} < \frac{1}{1.2.3}+\frac{a}{1.2.3.4.5},$$

$$\frac{a}{1.2.3.4.5.6} < \frac{1}{1.2.3.4.5}+\frac{a}{1.2.3.4.5.6.7}$$

etc.

und die Gleichung (8.) kann daher unter diesen Umständen nicht Statt finden. Auf dieselbe Weise läfst sich auch zeigen, dafs die Gleichung

$$\operatorname{tang} x = \frac{-ax}{x^2-b}$$

keine imaginäre Wurzel von der Form $y\sqrt{-1}$ hat, sobald $a<3$ und $b>a$ ist.



Die Gleichung (7.) kann aber auch keine Wurzel von der Form $x = y + z\sqrt{-1}$ haben, sobald a kleiner als 3 ist. Um dies zu beweisen, setze man $y + z\sqrt{-1} = \varrho(\cos\alpha + \sin\alpha\sqrt{-1})$ und substituire diesen Werth statt x. Dieses giebt

$$\frac{\operatorname{tg}x}{x} = \frac{1 - \frac{\varrho^2(\cos 2\alpha + \sin 2\alpha\sqrt{-1})}{1.2.3} + \frac{\varrho^4(\cos 4\alpha + \sin 4\alpha\sqrt{-1})}{1.2.3.4.5} - \frac{\varrho^6(\cos 6\alpha + \sin 6\alpha\sqrt{-1})}{1.2.3 \ldots 7} \ldots}{1 - \frac{\varrho^2(\cos 2\alpha + \sin 2\alpha\sqrt{-1})}{1.2} + \frac{\varrho^4(\cos 4\alpha + \sin 4\alpha\sqrt{-1})}{1.2.3.4} - \frac{\varrho^6(\cos 6\alpha + \sin 6\alpha\sqrt{-1})}{1.2 \ldots 7} \ldots}$$
$$= \frac{-a}{\varrho^2(\cos 2\alpha + \sin 2\alpha\sqrt{-1}) - a}.$$

Hieraus findet man

$$-a\left[1 - \frac{\varrho^2\cos 2\alpha + \sin 2\alpha\sqrt{-1}}{1.2} + \frac{\varrho^4(\cos 4\alpha + \sin 4\alpha\sqrt{-1})}{1.2.3.4} - \frac{\varrho^6(\cos 6\alpha + \sin 6\alpha\sqrt{-1})}{1.2 \ldots 6} \ldots\right]$$
$$= \varrho^2(\cos 2\alpha + \sin 2\alpha\sqrt{-1}) - \frac{\varrho^4(\cos 4\alpha + \sin 4\alpha\sqrt{-1})}{1.2.3} + \frac{\varrho^6(\cos 6\alpha + \sin 6\alpha\sqrt{-1})}{1.2.3.4.5} - \ldots$$
$$-a\left[1 - \frac{\varrho^2(\cos 2\alpha + \sin 2\alpha\sqrt{-1})}{1.2.3} + \frac{\varrho^4(\cos 4\alpha + \sin 4\alpha\sqrt{-1})}{1.2.3.4.5} - \frac{\varrho^6(\cos 6\alpha + \sin 6\alpha\sqrt{-1})}{1.2 \ldots 7} \ldots\right]$$

und wenn man die reellen Glieder einander gleich setzt,

$$\frac{a}{1.2}\varrho^2\cos 2\alpha - \frac{a}{1.2.3.4}\varrho^4\cos 4\alpha + \frac{a}{1.2 \ldots 6}\varrho^6\cos 6\alpha - \ldots$$
$$= \left(1 + \frac{a}{1.2.3}\right)\varrho^2\cos 2\alpha - \left(\frac{1}{1.2.3} + \frac{a}{1.2.3.4.5}\right)\varrho^4\cos 4\alpha$$
$$+ \left(\frac{1}{1.2.3.4.5} + \frac{a}{1.2.3 \ldots 7}\right)\varrho^6\cos 6\alpha - \ldots$$

also

$$\frac{a}{1.2} = 1 + \frac{a}{1.2.3},$$
$$\frac{a}{2.3.4} = \frac{1}{1.2.3} + \frac{a}{1.2.3.4.5}$$
etc.,

welche Gleichungen, wie schon früher bemerkt wurde, nicht Statt haben können, sobald $a < 3$ ist.

Aus denselben Gründen folgt, dafs auch die Gleichung

$$\operatorname{tang}x = \frac{-ax}{x^2 - b}$$

keine Wurzel von der Form $y + z\sqrt{-1}$ haben kann, sobald $b > a$ und $a < 3$ ist.

Die in §§. 25. und 26. abgehandelten Gleichungen,

$$(e^x + e^{-x})\cos x - 2 = 0,$$
$$(e^x + e^{-x})\cos x + 2 = 0$$

haben zwar, wie schon dort bemerkt wurde, imaginäre Wurzeln, deren

reeller Theil Null ist: sie können aber keine imaginären Wurzeln haben, von welchen der reelle Theil nicht Null ist. Ich will zuerst die Gleichung

$$9.\quad (e^x + e^{-x})\cos x - 2 = 0$$

betrachten. Man substituire statt x den Werth $y + z\sqrt{-1}$, so findet man

$$10.\quad e^{y+z\sqrt{-1}} + e^{-(y+z\sqrt{-1})} = (e^y + e^{-y})\cos z + (e^y - e^{-y})\sin z\sqrt{-1},$$

$$11.\quad \cos(y + z\sqrt{-1}) = \tfrac{1}{2}(e^z + e^{-z})\cos y - \tfrac{1}{2}(e^z - e^{-z})\sin y\sqrt{-1}.$$

Man erhält also statt der Gleichung (9.) die zwei Gleichungen

$$12.\quad (e^y + e^{-y})\tfrac{1}{2}(e^z + e^{-z})\cos y\cos z + (e^y - e^{-y})\tfrac{1}{2}(e^z - e^{-z})\sin y\sin z = 2.$$

$$13.\quad (e^y - e^{-y})\tfrac{1}{2}(e^z + e^{-z})\cos y\sin z - (e^y + e^{-y})\tfrac{1}{2}(e^z - e^{-z})\sin y\cos z = 0.$$

Statt der Gleichung (13.) kann man auch schreiben

$$14.\quad \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} \cdot \frac{\cos y}{\sin y} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} \cdot \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Soll nun diese Gleichung bestehen, ohne dafs y oder z Null sind, so mufs nothwendig $y = z$ sein. Alsdann geht aber die Gleichung (12.) in folgende über:

$$15.\quad (e^y + e^{-y})^2(\cos y)^2 + (e^y - e^{-y})^2(\sin y)^2 = 4,$$

oder, wenn man statt $(\sin y)^2$ seinen Werth $1 - (\cos y)^2$ setzt, und reducirt, in

$$16.\quad (e^y - e^{-y})^2 + 4(\cos y)^2 = 4,$$

also in $(e^y - e^{-y})^2 = 4(\sin y)^2$,

oder $e^y - e^{-y} = 2\sin y$;

welches ungereimt ist, da $e^y - e^{-y}$ immer gröfser als $2\sin y$ ist.

Man sieht zugleich, dafs die Gleichung (9.) nur ein specieller Fall einer allgemeineren Gleichung ist, indem man auf dieselbe Weise zeigen kann, dafs die Gleichung

$$(e^x + e^{-x})\cos x - a = 0$$

keine imaginäre Wurzel von der Form $y + z\sqrt{-1}$ hat, sobald a nicht gröfser als 2 ist *).

---

*) Die specielle Gleichung

$$(e^x + e^{-x})\cos x - 2 = 0$$

kann auch auf eine andere Gleichung zurückgeführt werden, von welcher schon *Cauchy* bewiesen hat, dafs sie keine imaginäre Wurzeln hat, von der Form $x = y + z\sqrt{-1}$. Man hat nemlich, da allgemein

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}x = \pm\left(\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}\right)^{\frac{1}{2}}$$

ist, wenn man statt $\cos x$ den Werth $\dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$ substituirt,

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}x = \pm\frac{e^{\frac{1}{2}x} - e^{-\frac{1}{2}x}}{e^{\frac{1}{2}x} + e^{-\frac{1}{2}x}};$$

für welche Gleichung *Cauchy* bewiesen hat, dafs x nicht $= y + z\sqrt{-1}$ sein kann.

Aus einem noch allgemeineren Gesichtspuncte kann man die Gleichung

$$(e^x + e^{-x}) \cos x + 2 = 0$$

betrachten, indem man die Behauptung aufstellt, dafs die Gleichung

$$17. \quad (e^x + e^{-x}) \cos x + a = 0$$

keine imaginäre Wurzel von der Form $y + z\sqrt{-1}$ haben kann, sobald a irgend eine positive Zahl bedeutet. Denn substituirt man wirklich $y + z\sqrt{-1}$ statt x, so erhält man die zwei Gleichungen

$$18. \quad (e^y + e^{-y}) \tfrac{1}{2}(e^z + e^{-z}) \cos y \cos z + (e^y - e^{-y}) \tfrac{1}{2}(e^z - e^{-z}) \sin y \sin z = -a,$$

$$19. \quad \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} \cdot \frac{\cos y}{\sin y} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} \cdot \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Aus (19.) folgt aber $y = z$; also geht die Gleichung (18.) in folgende über:

$$(e^y + e^{-y})^2 (\cos y)^2 + (e^y - e^{-y})^2 (\sin y)^2 = -2a;$$

was ungereimt ist, da der erste Theil der Gleichung positiv und der zweite negativ ist.

30. Die vorhergehende Beweisführung scheint, so weit sie auch ausreicht, dennoch auf Gleichungen, wie die in §. 27. behandelte, nicht wohl anwendbar zu sein. *Fourier* hat aber bewiesen, dafs auch diese Gleichung keine imaginären Wurzeln hat. Die Methode, die er hierzu anwendet, ist insofern allgemeiner als die erste, dafs man nicht, wie dort, nöthig hat anzunehmen, dafs die imaginären Wurzeln in der Form $y + z\sqrt{-1}$ enthalten sind, sondern den Beweis ganz unabhängig von der Form der Wurzeln führen kann; und sie erfordert um so mehr eine ausführliche Darstellung, da *Fourier* dieselbe nicht völlig entwickelt und man auch ihre Richtigkeit in Zweifel gezogen hat. Für die algebraischen Gleichungen hat bekanntlich schon vorlängst *de Gua* ein Kennzeichen angegeben, durch welches man mit Bestimmtheit erkennen kann, dafs alle Wurzeln gewisser Gleichungen reell sind, und der darauf bezügliche Satz zeigt sich als eine sehr einfache Folgerung aus *Fourier's* Theorie der Gleichungen. Bei einer algebraischen Gleichung vom $m$ten Grade, $fx = 0$, enthält nemlich die Zeichenreihe $[-\infty]$ m Zeichenwechsel und die Zeichenreihe $[\infty]$ gar keinen Zeichenwechsel, und diese Zeichenwechsel gehen zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ aus zwei Gründen verloren. Es entspricht nemlich *erstens* jeder reellen, zwischen diesen Grenzen liegenden Wurzel ein Zeichenverlust; es können aber *zweitens* auch Zeichenwechsel verloren gehen, ohne dafs

solches auf eine reelle Wurzel deutete. So viele Zeichenwechsel nun auf diese zweite Art verloren gehen: eben so viel reelle Wurzeln fehlen der Gleichung, und sie mufs daher nothwendig eben so viele imaginäre Wurzeln haben, weil jede algebraische Gleichung vom *m*ten Grade nicht mehr und nicht weniger als *m* reelle oder imaginäre Wurzeln hat. Der Verlust von Zeichenwechseln, der nicht auf reelle Wurzeln deutet, kann aber nur in dem Falle vorkommen, wenn es einen reellen Werth α giebt, der so beschaffen ist, dafs zwar $f(\alpha)$ nicht Null ist, dafs aber eine der algebraischen Functionen, etwa $f^n x$, durch die Substitution dieses Werthes statt x auf Null reducirt wird, während zu gleicher Zeit die abgeleiteten Functionen $f^{n+1}x$ und $f^{n-1}x$ dasselbe Zeichen behalten. Sobald also *jeder reelle* Werth von x, der eine der abgeleiteten Functionen auf Null reducirt, zwei Ausdrücke mit entgegengesetztem Zeichen giebt, wenn man ihn in die vorhergehende und in die folgende Function substituirt, so kann die algebraische Gleichung nur reelle Wurzeln haben. Dies ist der *de Gua*'sche Satz, den auch *Fourier* in seinem Werke ausführlich abgehandelt hat. Diese Betrachtungen lassen sich aber nicht unmittelbar auf die transcendenten Gleichungen ausdehnen. Ich habe zwar im Früheren gezeigt, dafs die Grenzen der reellen Wurzeln der transcendenten Gleichungen auf ganz ähnliche Weise gefunden werden, wie die der algebraischen Gleichungen: ich habe aber zugleich auf einen Unterschied zwischen den algebraischen und den transcendenten Gleichungen aufmerksam gemacht, welcher im Wesentlichen darin besteht, dafs der erste Theil einer algebraischen Gleichung immer eine continuirliche Gröfse und zugleich das Product einer Anzahl einfacher reeller oder imaginärer Factoren ist, die den Wurzeln dieser Gleichung entsprechen, während der erste Theil einer transcendenten Gleichung auch eine discontinuirliche Gröfse sein und von dem Producte der einfachen Factoren, die den Wurzeln entsprechen, wesentlich verschieden sein kann. Hieraus folgt schon, dafs man bei diesen Gleichungen von der Abwesenheit reeller Wurzeln nicht auf das Vorhandensein imaginärer, und umgekehrt, schliefsen darf. Es wurde ferner früher gezeigt, dafs man die Grenzen, zwischen welchen die reellen Wurzeln liegen, auf folgende Weise findet. Man sucht zuerst die Grenzen α und β, zwischen welchen eine der abgeleiteten Functionen, etwa $f^{mx}x$, immer dasselbe Zeichen behält, und bildet alsdann die zwei Zeichenreihen $[\alpha]$ und $[\beta]$, so entspricht jeder reellen Wurzel, die zwischen diesen Grenzen enthalten ist, der Verlust eines Zeichenwechsels, den die Reihe $[\beta]$

weniger enthält als $[\alpha]$. Es können aber, wie gezeigt wurde, auch hier Zeichenwechsel verloren gehen, ohne das solches auf reelle Wurzeln deutete; jedoch nur in dem Falle, wenn ein zwischen diesen Grenzen liegender Werth eine der in Betracht kommenden abgeleiteten Functionen auf Null reducirt, während er der vorhergehenden und der folgenden Function, wenn er in dieselben substituirt wird, gleiche Zeichen giebt. Enthält nun die Zeichenreihe $[\beta]$ etwa $2n$ Zeichenwechsel weniger als $[\alpha]$, und weifs man, dafs zwischen den Grenzen α und β keine reelle Wurzel liegt, so darf man hieraus nicht, wie bei den algebraischen Gleichungen, schliefsen, dafs die Gleichung $2n$ imaginäre Wurzeln habe, weil hier die Abwesenheit der reellen Wurzeln durchaus nicht auf das Vorhandensein imaginärer deutet. Weifs man umgekehrt, dafs es keinen Werth giebt, der eine der abgeleiteten Functionen auf Null reducirt, während er, in die vorhergehende und folgende substituirt, Resultate von gleichem Zeichen giebt, so darf man daraus nicht schliefsen, dafs die transcendente Gleichung nur reelle Wurzeln habe: es kann vielmehr sein, dafs weder reelle noch imaginäre Wurzeln vorhanden sind. Anders aber verhält es sich, wenn man mit Bestimmtheit weifs, dafs die transcendente Gleichung $fx = 0$ so beschaffen ist, dafs fx das Product einer unendlichen Anzahl einfacher, reeller oder imaginärer Factoren ist, die eben so vielen Wurzeln der Gleichung entsprechen. In diesem Falle ist fx, und jeder daraus abgeleitete Differentialquotient, für jeden Werth von x eine continuirliche Gröfse. Sind nun z. B. α und β zwei bestimmende Grenzen, und enthält die Zeichenreihe $[b]$ eine Anzahl δ von Zeichenwechseln weniger als die Zeichenreihe $[\alpha]$, so kann die Gleichung zwischen diesen Grenzen nicht mehr als δ reelle Wurzeln haben; sind dagegen weniger als δ reelle Wurzeln zwischen diesen Grenzen enthalten, so müssen nothwendig mehrere Zeichenwechsel zwischen den Grenzen α und β verloren gehen, deren Verlust nicht auf reelle Wurzeln deutet, das heifst, es müssen eine oder mehrere der abgeleiteten Functionen durch einen zwischen α und β liegenden Werth auf Null reducirt werden, während die vorhergehende und die folgende Function dasselbe Zeichen behält. Sobald es also keinen solchen Werth giebt, so müssen die sämmtlichen δ Wurzeln reell sein. Dieselbe Betrachtung gilt für jede zwei andere bestimmende Grenzen. Sobald es also *gar keinen reellen Werth* von x giebt, der so beschaffen ist, dafs er, während er eine abgeleitete Function auf Null reducirt, der vorhergehenden und den folgenden gleiche Zeichen giebt, so kann

auch die Gleichung keine imaginäre Wurzel haben, sondern die Wurzeln müssen sämmtlich reell sein.

Auf diesem Wege hat *Fourier* bewiesen, dafs die Gleichung

$$1.\quad fx = 1 - x + \frac{x^2}{2^2} - \frac{x^3}{2^2.3^2} + \frac{x^4}{2^2.3^2.4^2} - \ldots. = 0$$

keine imaginäre Wurzeln hat. Es wurde schon früher bemerkt (§. 27.), dafs je drei auf einander folgende Differentialquotienten durch die Gleichung

$$A.\quad f^n x + (n+1) f^{n+1} x + x f^{n+2} x = 0$$

mit einander verbunden sind. Es ist nun einleuchtend, dafs weder fx noch irgend eine der abgeleiteten Functionen $f'x$, $f''x$, ... durch einen negativen Werth von x auf Null reducirt werden können. Nimmt man nun an, dafs $f^{n+1}x$ durch irgend einen reellen positiven Werth von x auf Null reducirt wird, so folgt aus der Gleichung (*A.*)

$$f^n x = -x f^{n+2} x.$$

Hieraus folgt also, dafs jeder reelle Werth von x, der eine der abgeleiteten Functionen auf Null reducirt, der vorhergehenden und folgenden Function verschiedene Zeichen giebt. Man kann nun ferner zeigen, dafs fx das Product einer unendlichen Zahl einfacher Factoren ist. *Fourier* thut dies, indem er die transcendente Gleichung auf eine algebraische zurück führt. Diese Gleichung heifst

$$2.\quad Fy = 1 - ny + \frac{n.n-1}{1.2}.\frac{y^2}{2} - \frac{n.(n-1)(n-2)}{1.2.3}.\frac{y^3}{2.3} + \ldots. = 0,$$

wo n eine ganze Zahl ist. Die Anzahl der Glieder dieser Gleichung ist $n+1$, und wenn man n unendlich grofs setzt, so geht sie in die Gleichung (1.) über, sobald man $ny = x$ setzt. Da nun die Gleichung (2.), als eine algebraische, sich immer in Factoren zerlegen läfst, wie grofs auch n sein mag, so folgt hieraus, dafs es auch noch der Fall ist, wenn n unendlich grofs ist, das heifst, es mufs auch fx das Product einer unendlichen Zahl von Factoren sein, die den Wurzeln der Gleichung $fx = 0$ entsprechen. Diese Factoren müssen aber sämmtlich reell sein; wie aus dem Zusammenhange der Differentialquotienten folgt: und es ist daher bewiesen, dafs fx das Product von lauter reellen Factoren ist, die den Wurzeln der Gleichung $fx = 0$ entsprechen.

Auf dieselbe Weise könnte man auch, wenn es nicht schon bekannt wäre, zeigen, dafs die Functionen $\sin x$ und $\cos x$ aus dem Producte einfacher reeller Factoren zusammengesetzt sind, das heifst, dafs die Gleichungen $\sin x = 0$ und $\cos x = 0$ keine imaginären Wurzeln haben. Denn

die Gleichung

3. $fx = \sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots = 0$

ist nur ein besonderer Fall der allgemeinen Gleichung

4. $Fy = ny - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} y^3 + \frac{n.(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5} y^5 - \ldots = 0,$

indem man in der Gleichung (4.) nur $n = \infty$ und $ny = x$ zu setzen braucht, um die Gleichung (3.) zu erhalten. Da nun die Gleichung (4.) immer in Factoren zerlegbar ist, so folgt das Nemliche für die Gleichung (3.). Nun ist ferner

$$fx = \sin x,$$
$$f^{I}x = \cos x,$$
$$f^{II}x = -\sin x,$$
$$f^{III}x = -\cos x,$$
$$f^{IV}x = \sin x:$$

es ist also allgemein $f^n x = -f^{n+2}x$, und diese Ausdrücke haben also auch entgegengesetzte Zeichen, wenn man $f^{n+1}x = 0$ setzt. Hieraus folgt, daſs $\sin x = 0$ nur reelle Wurzeln hat. Dasselbe folgt auch für die Gleichung $\cos x = 0$.

31. Dieses von *Fourier* aufgestellte Princip, um die Realität sämmtlicher Wurzeln gewisser transcendenten Gleichungen zu erkennen, von welchem *Cauchy* sagt*), daſs es mehreren Schwierigkeiten unterworfen sei, ist von *Poisson* gradezu für falsch erklärt worden. *Poisson* will dies durch folgendes Beispiel beweisen. Es sei gegeben die Gleichung

$$fx = e^x - be^{ax} = e^x(1 - be^{(a-1)x}),$$

wo a und b bekannte Gröſsen sind und a positiv ist. Diese Gleichung hat nun offenbar unendlich viele imaginäre Wurzeln, die sämmtlich in der Form

$$x = \frac{\log b + 2i\pi\sqrt{-1}}{1-a}$$

enthalten sind. Differentiirt man aber, so findet man

$$f^n x = e^x - ba^n e^{ax},$$
$$f^{n+1}x = e^x - ba^{n+1}e^{ax},$$
$$f^{n+2}x = e^x - ba^{n+2}e^{ax}.$$

Setzt man nun $f^{n+1}x = 0$, so ergiebt sich

$$f^n x = -b(1-a)a^n e^{ax},$$
$$f^{n+2}x = +b(1-a)a^{n+1}e^{ax},$$

*) Exercices des mathém. T. I. p. 338.

folglich $f^n x . f^{n+2} x = -b^2 (1-a)^2 . a^{2n+1} . e^{2ax}$, welcher Werth für jeden reellen Werth von x negativ ist. Hieraus würde also folgen, dafs *jede* reelle Wurzel von $f^{n+1} x$, welche man in die zwei Functionen $f^n x$ und $f^{n+2} x$ substituirt, Resultate von verschiedenem Zeichen giebt, und es würde mithin nach *Fourier's* Regel folgen, dafs die Gleichung $fx = 0$ keine imaginären Wurzeln habe; was doch nicht der Fall ist. Hier ist aber wohl ein Trugschlufs. Der Ausdruck $f^{n+1} x$ enthält nemlich den Factor e^x, und wird Null, sobald dieser Factor Null wird: e^x wird aber Null, sobald man $x = -\infty$ setzt. Die Gleichung $e^x = 0$ hat mithin unendlich viele *reelle* Wurzeln, welche sämmtlich in dem Ausdruck $x = -\infty$ enthalten sind. Substituirt man aber einen dieser reellen Werthe in $f^n x$ und $f^{n+2} x$, so werden diese Functionen ebenfalls auf Null reducirt und man kann daher in diesem Falle nicht sagen, dafs sie verschiedene Zeichen haben. Es ist also nicht richtig, dafs jeder reelle Werth von x, der $f^{n+1} x$ auf Null reducirt, den Functionen $f^n x$ und $f^{n+1} x$ verschiedene Zeichen giebt, sondern es gilt dies nur für den reellen Werth, der sich aus dem Factor $1 - b a^{n+1} e^{(a-1)x}$ ergiebt. Dagegen giebt es unendlich viele Werthe von x, welche $f^{n+1} x$ auf Null reduciren und die dennoch, in $f^n x$ und $f^{n+2} x$ substituirt, nicht Resultate von verschiedenen Zeichen hervorbringen. Daher darf man auch nicht schliefsen, dafs die Gleichung $e^x - b e^{ax} = 0$ nur reelle Wurzeln haben könne *).

32. Eine dritte, sehr scharfsinnige Methode hat *Poisson* mehrfach angewendet, um die Abwesenheit der imaginären Wurzeln in gewissen transcendenten Gleichungen nachzuweisen. Diese Methode ist aber schon deswegen in ihrer Anwendung beschränkt, weil sie die Abwesenheit der imaginären Wurzeln nicht unmittelbar aus der Natur der Gleichung beweiset, sondern nur da anwendbar ist, wo man durch besondere Untersuchungen, die zu einer solchen transcendenten Gleichung geführt haben, zugleich einen anderen Ausdruck erhält, welchen man zum Beweise gebrauchen kann. Auch findet man vermittelst dieser Methode nur, dafs die transcendente Gleichung keine imaginären Wurzeln hat, die aus einem reellen und einem imaginären Theile bestehen, also in der Form $a + b\sqrt{-1}$ enthalten sind, wo weder a

*) *Fourier* hat den hier besprochenen Lehrsatz zuerst in seinem Werke Théorie de la chaleur p. 372 kurz vorgetragen. *Poisson* hat darauf in dem Journal de l'école polyt. cah. 19 p. 382 dessen Unrichtigkeit zu erweisen gesucht und dasselbe später in den Mém. de l'acad. des sc. T. VIII. p. 367 und ausführlicher T. IX. p. 89 wiederholt. *Fourier* hat hierauf zuerst kurz in T. VIII. p. 616 und ausführlicher T. X. p. 119 geantwortet.

noch b Null sind. Dagegen läfst sie es unbestimmt, ob die gegebene Gleichung nicht Wurzeln habe, die blofs aus einem imaginären Theile bestehen, also in der Form $b\sqrt{-1}$ enthalten sind. Ich habe früher (§. 29.) gezeigt, dafs die Gleichung

$$A.\quad (4-3\mu l)\sin\mu l - 4\mu l\cos\mu l = 0$$

keine imaginären Wurzeln hat: weder solche, bei welchen der reelle Theil Null ist, noch andere, welche aus einem reellen und einem imaginären Theile bestehen *). Auf diese Gleichung wird *Poisson* in seinen Untersuchungen über die Schwingungen einer elastischen Kugel geführt **), und er zeigt auf folgende Weise, dafs sie keine imaginären Wurzeln hat. Er findet nemlich durch dieselbe Untersuchung auch noch die Gleichung

$$B.\quad (\mu^2-\mu'^2)\int_0^l RR'\partial r = 0,$$

wo μ und μ' zwei Wurzeln der Gleichung (A.) bedeuten, die so beschaffen sind, dafs μ^2 und μ'^2 verschiedene Werthe haben, also $\mu^2-\mu'^2$ nicht Null und $R=(\mu r\cos\mu r-\sin\mu r)\frac{1}{r}$ ist, R' dagegen Dasjenige bedeutet, was R wird, wenn man in dem Werthe von R statt μ den Werth μ' substituirt. Hätte nun die Gleichung (A.) imaginäre Wurzeln, so dafs etwa $p+q\sqrt{-1}$ und $p-q\sqrt{-1}$ ein Paar solcher Wurzeln wären, so könnte man $\mu = p+q\sqrt{-1}$ und $\mu'=p-q\sqrt{-1}$ setzen und durch $R=P+Q\sqrt{-1}$ und $R'=P-Q\sqrt{-1}$ die entsprechenden Werthe von R und R' bezeichnen. Die Gleichung (B.) ginge also in

$$\int_0^l (P^2+Q^2)\partial r = 0$$

über. Da aber alle Elemente dieses Integrals positiv sind, so könnte es nicht Null werden, wenn man nicht $P=0$ und $Q=0$ für jeden Werth von r hätte. Aus diesen Werthen würden sich also Werthe von p und q ergeben, die von r abhängen; was unzuläfslich ist: also kann auch die Voraussetzung, dafs die Gleichung imaginäre Wurzeln habe, nicht richtig sein. Indessen sieht man, dafs dieser Schlufs darauf beruht, dafs μ^2 und μ'^2 ungleiche Werthe haben. Hätte aber die Gleichung (A.) zwei Wurzeln $q\sqrt{-1}$, $-q\sqrt{-1}$ und man substituirte dieselben statt μ und μ', so würde der Ausdruck (B.) Null werden, ohne dafs $\int RR'\partial r$ Null wird, und also der Schlufs nicht mehr gelten ***).

*) Man erhält nemlich diese Gleichung, wenn man in der dort behandelten Gleichung $(4-3x)\sin x - 4x\cos x = 0$ statt x den Werth μl substituirt.

**) Mémoire de l'acad. des sc. T. VIII. p. 417.

***) Eine andere Beweisführung von *Sturm* findet sich auch im Journ. des Mathém. par *Liouville* Nov. 1836 p. 384.

33. Wir wollen nun zeigen, in wiefern die *Bernoulli*sche Methode auch auf die transcendenten Gleichungen angewendet werden darf. (Vergl. §. 1.) Diese Methode beruht wesentlich auf der Eigenschaft der algebraischen Gleichungen, dafs der erste Theil derselben das Product einer Anzahl einfacher, reeller oder imaginärer Factoren vom ersten Grade ist. Es folgt nemlich aus dieser Eigenschaft, dafs die Coefficienten der einzelnen Glieder der Gleichung bestimmte Functionen der Wurzeln sind; und gerade diese Eigenschaft ist es, auf welcher die Anwendung der recurrirenden Reihen auf die Auflösung der Gleichungen beruht. Es ergiebt sich mithin von selbst, dafs die recurrirenden Reihen keinesweges zur *allgemeinen* Auflösung der transcendenten Gleichungen angewendet werden können. Denn es ist im Früheren nachgewiesen worden, dafs der erste Theil einer transcendenten Gleichung häufig von dem Producte der den Wurzeln der Gleichung entsprechenden Factoren wesentlich verschieden ist (§. 5. u. 6.). Auf eine solche Gleichung läfst sich also die *Bernoulli*sche Methode nicht anwenden, weil ihr diejenige Eigenschaft fehlt, auf welcher allein sie gegründet ist: oder man mufs wenigstens im Stande sein, den Factor des ersten Theils der Gleichung zu finden, welcher dem Producte aller den Wurzeln der Gleichung entsprechenden Factoren gleich ist. Sobald indessen die transcendente Gleichung von der Art ist, dafs ihr erstes Glied das Product von Factoren ist, die den Wurzeln der Gleichung entsprechen, so werden auch die Coefficienten der einzelnen Glieder der Gleichung auf dieselbe Weise, wie es bei den algebraischen Gleichungen der Fall ist, aus den Wurzeln der Gleichung zusammengesetzt sein, und es kann daher bei solchen transcendenten Gleichungen die *Bernoulli*sche Methode auf dieselbe Weise wie bei den algebraischen gebraucht werden.

Es ist schon oben (§. 1.) bemerkt worden, dafs die Ausbildung der *Bernoulli*schen Methode früher sehr mangelhaft war. Gegenwärtig besitzt man mehrere Bearbeitungen derselben, welche zeigen, wie man alle Wurzeln algebraischer Gleichungen finden kann und die daher ohne Schwierigkeit auf solche transcendente Gleichungen angewandt werden können, welche der oben angegebenen Bedingung entsprechen.

Ich habe zuerst *) mit Hülfe der bei *Fourier* vorkommenden Andeutungen eine solche Methode nachgewiesen. Einfacher ist die Methode,

*) *Crelle's* Journ. für die Mathem. Bd. 11. p. 283 ff.

welche *Jacobi* später gegeben hat *) und die ohne Zweifel mit derjenigen, welche *Fourier* selbst beabsichtigte, ganz identisch ist.

Ich werde mich hier begnügen, zu zeigen, wie man vermittelst dieser letzteren Methode die zwei gröfsten oder kleinsten, reellen oder imaginären Wurzeln der transcendenten Gleichungen finden kann. In Beziehung auf algebraische Gleichungen habe ich das hier anzuwendende Verfahren bereits früher mitgetheilt **).

34. Es sei also eine transcendente Gleichung

$$Fx = \left(1-\frac{x}{\alpha}\right)\left(1-\frac{x}{\beta}\right)\left(1-\frac{x}{\gamma}\right)\left(1-\frac{x}{\delta}\right)\ldots = 1-Ax+Bx^2-Cx^3+Dx^4\ldots$$

gegeben, so dafs α, β, γ, δ .... die reellen oder imaginären Wurzeln der Gleichung sind; nach der zunehmenden Gröfse geordnet. Setzt man

$$A_1 = \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}+\ldots$$
$$A_2 = \frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}+\frac{1}{\delta^2}+\ldots$$
$$A_3 = \frac{1}{\alpha^3}+\frac{1}{\beta^3}+\frac{1}{\gamma^3}+\frac{1}{\delta^3}+\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_n = \frac{1}{\alpha^n}+\frac{1}{\beta^n}+\frac{1}{\gamma^n}+\frac{1}{\delta^n}+\ldots$$

so hat man bekanntlich

$$A_1 = A,$$
$$A_2 = AA_1 - 2B,$$
$$A_3 = AA_2 - BA_1 + 3C,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ist nun α die kleinste Wurzel und zugleich reell, so kann man, wenn n grofs genug genommen wird, näherungsweise

$$A_n = \frac{1}{\alpha^n},$$
$$A_{n+1} = \frac{1}{\alpha^{n+1}},$$

setzen; und hieraus ergiebt sich der Werth der kleinsten Wurzel $\alpha = \frac{A_n}{A_{n+1}}$.

Bildet man daher eine Reihe, deren allgemeines Glied A_n ist, und dividirt jedes Glied dieser Reihe durch das folgende, so nähert sich der

---

*) *Crelle's* Journ. für die Mathem. Bd. 13. p. 399 ff.
**) Ebend. Bd. 9. p. 305.

Quotient immer mehr dem Werthe α. Diese Reihe werde ich im Folgenden (S) nennen.

Setzt man ferner näherungsweise

$$A_n = \frac{1}{\alpha^n} + \frac{1}{\beta^n}.$$
$$A_{n+1} = \frac{1}{\alpha^{n+1}} + \frac{1}{\beta^{n+1}},$$
$$A_{n+2} = \frac{1}{\alpha^{n+2}} + \frac{1}{\beta^{n+2}},$$
$$A_{n+3} = \frac{1}{\alpha^{n+3}} + \frac{1}{\beta^{n+3}},$$
$$A_{n+4} = \frac{1}{\alpha^{n+4}} + \frac{1}{\beta^{n+4}},$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

so findet man

$$A_n \cdot A_{n+2} - (A_{n+1})^2 = \frac{1}{\alpha^n} \cdot \frac{1}{\beta^n}\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right)^2,$$
$$A_{n+1} \cdot A_{n+3} - (A_{n+2})^2 = \frac{1}{\alpha^{n+1}} \cdot \frac{1}{\beta^{n+1}}\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right)^2,$$
$$A_{n+2} \cdot A_{n+4} - (A_{n+3})^2 = \frac{1}{\alpha^{n+2}} \cdot \frac{1}{\beta^{n+2}}\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right)^2,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

also

$$\frac{A_n \cdot A_{n+2} - (A_{n+1})^2}{A_{n+1} \cdot A_{n+3} - (A_{n+2})^2} = \alpha\beta.$$

Bildet man daher eine Reihe, deren allgemeines Glied $A_n A_{n+2} - (A_{n+1})^2$ ist, und dividirt jedes Glied durch das folgende, so nähert man sich immer mehr dem Werthe $\alpha\beta$. Diese Reihe werde ich im Folgenden (S_1) nennen.

Ist α reell, und hat man seinen Werth aus der Reihe (S) gefunden, so findet man den Werth von β, wenn man den aus der Reihe (S_1) gefundenen Werth von $\alpha\beta$ durch den gefundenen Werth von α dividirt. Ist dagegen α imaginär, so divergirt die Reihe (S) und es kann der Werth von α nicht aus derselben gefunden werden. Die Reihe (S_1) convergirt aber auch in diesem Falle und giebt den Werth von $\alpha\beta$. Um nun auch in diesem Falle die Werthe von α und β zu finden, bilde man eine dritte Reihe (S_2), deren allgemeines Glied

$$\frac{A_n \cdot A_{n+3} - A_{n+1} A_{n+2}}{A_n A_{n+2} - (A_{n+1})^2}$$

ist. Die Glieder dieser Reihe nähern sich dem Werthe $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ desto mehr,



je gröfser n ist; und diese Reihe wird immer convergiren, da α und β ein zusammengehörendes Paar imaginärer Wurzeln sind. Aus $\alpha\beta$ und $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$ findet man alsdann den Werth von α und β.

35. Ich will diese Erörterungen zunächst anwenden, um die zwei kleinsten Wurzeln der Gleichung

$$1-x+\frac{x^2}{2^2}-\frac{x^3}{2^2.3^2}+\frac{x^4}{2^2.3^2.4^2}-\ldots\ldots=0$$

zu finden. Bildet man die Reihe (S), so ergiebt sich

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{33}{144},\ \frac{19}{120},\ \frac{473}{4320},\ \frac{229}{3024},\ \frac{101369}{1935360},\ \ldots\ldots$$

Dividirt man das letzte Glied durch das vorletzte, so findet man als Näherungswerth der kleinsten Wurzel 1,4458....; was mit dem früher gefundenen Werthe (§. 27.) übereinstimmt.

Die ersten Glieder der Reihe (S_1) sind

$$\frac{1}{12},\ \frac{1}{288},\ \frac{1}{3840},\ \frac{23}{1036800},\ \frac{257}{130636800},\ \frac{10359}{58525286400},\ \ldots\ldots$$

Dividirt man das vorletzte Glied durch das letzte, so findet man 11,1145.... welches also das Product der zwei kleinsten Wurzeln ist, und wenn man diesen Werth durch den gefundenen Werth der ersten Wurzel dividirt, so ergiebt sich als Näherungswerth der zweiten Wurzel 7,68...; was schon bis zur zweiten Decimalstelle mit dem oben gefundenen Werthe übereinstimmt.

36. Ich will bei dieser Gelegenheit einen Lehrsatz beweisen, den *Fourier* in dem Exposé synoptique *) angedeutet hat. *Fourier* sagt nemlich, dafs wenn man vermittelst der angegebenen Methode die erste Wurzel sucht, und diese reell ist, dafs alsdann die Reihe der Quotienten so gegen den wahren Werth der Wurzel convergire, dafs zuletzt die Fehler, welche man bei der Annäherung begeht, wie die Glieder einer geometrischen Progression abnehmen, deren Exponent das Verhältnifs der zweiten Wurzel zur ersten sei. Hierbei wird vorausgesetzt, dafs die erste Wurzel die gröfste ist. In dem anderen Falle, welcher uns hier besonders interessirt, wo nemlich die erste Wurzel die kleinste ist, mufs dieser Satz so modificirt werden, dafs man als Exponenten der geometrischen Progression das Verhältnifs der ersten Wurzel zur zweiten nehmen mufs. Der Beweis ist

*) Analyse des équations p. 71.

für beide Fälle derselbe; ich werde daher nur den zweiten berücksichtigen Um den Werth der Wurzel α zu finden, setzt man $\frac{A_n}{A_{n+1}} = \alpha$: in Wahrhei ist aber

$$\frac{A_n}{A_{n+1}} = \alpha + \frac{\frac{1}{\beta^n}+\frac{1}{\gamma^n}+\frac{1}{\delta^n}+\ldots - \alpha\left(\frac{1}{\beta^{n+1}}+\frac{1}{\gamma^{n+1}}+\frac{1}{\delta^{n+1}}+\ldots\right)}{\frac{1}{\alpha^{n+1}}+\frac{1}{\beta^{n+1}}+\frac{1}{\gamma^{n+1}}+\frac{1}{\delta^{n+1}}+\ldots}.$$

Der begangene Fehler ist also

$$\frac{\frac{1}{\beta^n}+\frac{1}{\gamma^n}+\frac{1}{\delta^n}+\ldots - \alpha\left(\frac{1}{\beta^{n+1}}+\frac{1}{\gamma^{n+1}}+\frac{1}{\delta^{n+1}}+\ldots\right)}{\frac{1}{\alpha^{n+1}}+\frac{1}{\beta^{n+1}}+\frac{1}{\gamma^{n+1}}+\frac{1}{\delta^{n+1}}+\ldots}.$$

Ist jedoch n hinlänglich grofs, so kann man statt dessen auch

$$\frac{\frac{1}{\beta^n} - \alpha.\frac{1}{\beta^{n+1}}}{\frac{1}{\alpha^{n+1}}+\frac{1}{\beta^{n+1}}} = \frac{(\beta-\alpha)}{1+\frac{\alpha^{n+1}}{\beta^{n+1}}}.\frac{\alpha^{n+1}}{\beta^{n+1}}$$

setzen, und da, wenn n sehr grofs, $\frac{\alpha^{n+1}}{\beta^{n+1}}$ ein so kleiner Bruch ist, daſ man ihn gegen die Einheit vernachlässigen kann, so convergiren die Feh ler gegen die Grenze $(\beta-\alpha).\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n+1}$ hin und nehmen mithin im Verhältniſ der Glieder einer geometrischen Progression ab, deren Exponent $\frac{\alpha}{\beta}$ ist.

37. Um auch noch ein Beispiel der Berechnung der zwei klei sten imaginären Wurzeln zu geben, nehme ich die Gleichung

$$x = e^x.$$

Diese Gleichung kann keine reelle Wurzel haben, da, so lange x reell immer $x < e^x$ ist. Entwickelt man e^x in eine Reihe, so geht die Gleic! in folgende über:

$$x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4} + \ldots.$$

oder in

$$1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4} + \ldots = 0.$$

Vergleicht man diese Gleichung mit der algebraischen Gleichung

$$1 + \frac{n.n-1}{2}y^2 + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}y^3 + \ldots = 0,$$

so kann man wieder zeigen, dafs sie das Product einer unendli zahl von Factoren ist. Sie kann mithin durch die *Bernoulli*sche aufgelöset werden.

Bildet man die Reihe (S), so ergiebt sich

$$\begin{array}{cccccccccc} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6 & A_7 & A_8 & A_9 & A_{10} \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{8} & +\frac{3}{8} & \frac{-1}{4.5} & \frac{-31}{2.3.4.6} & \frac{-29}{3.5.6.7} & \frac{+63}{2^2.4.5.8} & \frac{+2087}{3.4.6.7.8.9} \cdots \end{array}$$

Hieraus ergiebt sich

$$\frac{A_7 A_9 - A_8^2}{A_8 A_{10} - A_9^2} = \frac{1364243616}{722045476} = 1{,}889415 \text{ und}$$

$$\frac{A_7 A_{10} - A_8 A_9}{A_7 A_9 - A_8^2} = \frac{14356678}{42632613} = 0{,}336753.$$

Nennt man nun die kleinsten Wurzeln α und β, so ist

$$\alpha\beta = 1{,}889415 \text{ und}$$

$$\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 0{,}336753;$$

mithin kann man, da α und β ein Paar conjugirte imaginäre Wurzeln sind,

$$\alpha = a + b\sqrt{-1} \quad \text{und} \quad \beta = a - b\sqrt{-1}$$

setzen und findet vermittelst der Werthe von $\alpha\beta$ und $\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$:

$$a = 0{,}318133,$$
$$b = 1{,}337238.$$

Die Wurzeln sind also $0{,}318133 \pm 1{,}337238\sqrt{-1}$.

Cauchy *) findet auf anderem Wege

$$0{,}3181317 \pm 1{,}3372357\sqrt{-1}.$$

38. Während ich im Begriff bin diese Abhandlung zu endigen, erhalte ich das *Compte rendu* No. 10. 1837, welche seine neue Methode von *Cauchy* enthält, die Näherungswerthe der reellen Wurzeln zu finden, welche zugleich auf transcendente Gleichungen anwendbar ist. Das Wesentlichste derselben ist in Folgendem enthalten. Es sei

$$1. \quad fx = 0$$

eine Gleichung, deren erstes Glied fx zwischen den Grenzen $x = x_0$ und $x = X$ continuirlich bleibt. Ferner sei die Function fx in zwei andere

$$\varphi x - \chi x$$

zerlegt, die ebenfalls zwischen den gegebenen Grenzen continuirlich und so beschaffen sind, dafs die Werthe von φx und χx mit den Werthen von x wachsen. Nennt man nun $-\frac{1}{\alpha}$ das kleinste und $-\frac{1}{\beta}$ das gröfste der Verhältnisse

$$\frac{\varphi' x^0 - \chi' X}{f x_0}, \quad \frac{\varphi' X - \chi' x_0}{f x_0}$$

*) Leçons sur le calc. différ., leç. 14.

und $\frac{1}{A}$ das kleinste, $\frac{1}{B}$ das gröfste der Verhältnisse

$$\frac{\varphi' x_0 - \chi' X}{fX}, \quad \frac{\varphi' X - \chi x_0}{fX},$$

und sind zwischen x_0 und X Wurzeln der Gleichung enthalten, so sind auch $x_0 + \alpha$, $X - A$ zwischen diesen Grenzen enthalten und bilden zugleich Grenzen jener Wurzeln. Ist übrigens eine der Gröfsen $x_0 + \beta$, $X - B$, zwischen den Grenzen x_0 und X enthalten, so hat die Gleichung (1.) gewifs Wurzeln zwischen diesen Grenzen.

Ist fx eine ganze Function, so kann man sie immer leicht in $\varphi x - \chi x$ zerlegen, wenn man für x_0 und X positive Grenzen nimmt, indem man die Summe der positiven Glieder durch φx, die Summe der negativen Glieder durch $-\chi x$ bezeichnet. Da man aber die negativen Wurzeln einer Gleichung, wie bekannt, immer in positive verwandeln kann, wenn man $-x$ statt x setzt, so kann man auch durch dieses Verfahren alle Wurzeln einer algebraischen Gleichung mit jedem beliebigen Grade von Genauigkeit finden, sobald man zwei Werthe kennt, zwischen welchen die Wurzeln enthalten sind. Dasselbe findet bei einer transcendenten Gleichung

$$fx = 0$$

statt, sobald man die Function fx in zwei andere $\varphi x - \chi x$ zerlegen kann, die so beschaffen sind, dafs φx und χx immer wachsen, wenn x gröfser wird.

Ich will nun zeigen, wie dieses Verfahren auch aus *Fourier's* Methode abgeleitet werden kann.

Ist nemlich eine Gleichung $fx = 0$ gegeben, und ist eine Wurzel zwischen zwei Grenzen enthalten, so kann man immer so enge Grenzen x_0 und X ziehen, dafs eines der vier folgenden Schemata Statt findet:

		$f''x$	$f'x$	fx
I.	$[x_0] = \ldots\ldots$	+	+	−
	$[X] = \ldots\ldots$	+	+	+
II.	$[x_0] = \ldots\ldots$	−	−	+
	$[X] = \ldots\ldots$	−	−	−
III.	$[x_0] = \ldots\ldots$	+	−	+
	$[X] = \ldots\ldots$	+	−	−
IV.	$[x_0] = \ldots\ldots$	−	+	−
	$[X] = \ldots\ldots$	−	+	+

In den zwei ersten Fällen hat man die Näherungswerthe

$$X-\frac{fX}{f'X}>x, \quad x_0-\frac{fx_0}{f'X}<x,$$

in den zwei andern die Näherungswerthe

$$X-\frac{fX}{f'x_0}>x, \quad x_0-\frac{fx_0}{f'x_0}<x.$$

Setzt man nun $fx=\varphi x-\chi x$, also $f'x=\varphi' x-\chi' x$, so gehen diese Werthe in folgende über. Nemlich in den zwei ersten Fällen hat man

$$X-\frac{fX}{\varphi'X-\chi'X}>x, \quad x_0-\frac{fx_0}{\varphi'X-\chi'X}<x$$

und in den zwei anderen

$$X-\frac{fX}{\varphi'x_0-\chi'x_0}>x, \quad x_0-\frac{fx_0}{\varphi'x_0-\chi'x_0}<x.$$

Im ersten Falle ist $\varphi'X-\chi'X$ positiv und kleiner als $\varphi'X-\chi'x_0$, mithin ist auch der letztere Ausdruck positiv, folglich, da fX positiv ist,

$$\frac{fX}{\varphi'X-\chi'x_0}<\frac{fX}{\varphi'X-\chi'X},$$

mithin

$$X-\frac{fX}{\varphi'X-\chi'x_0}>X-\frac{fX}{\varphi'X-\chi'X}>x.$$

Nun ist $\varphi'X-\chi'x_0>\varphi'x_0-\chi'X$, also ist, nach *Cauchy's* Bezeichnung,

$$\frac{fX}{\varphi'X-\chi'x^0}=A$$

und $X-A\lesseqgtr\begin{smallmatrix}x\\X\end{smallmatrix}$.

Eben so findet man im vierten Falle, dafs $\varphi'x_0-\chi'x_0$ positiv und kleiner als $\varphi'X-\chi'x_0$ ist; also mufs auch letzterer Ausdruck positiv sein. Da nun fX positiv ist, so hat man wieder

$$X-\frac{fX}{\varphi'X-\chi'x_0}>X-\frac{fX}{\varphi'x_0-\chi'x_0}>x,$$

folglich $X-A\gtreqless\begin{smallmatrix}x\\X\end{smallmatrix}$.

Im zweiten Falle dagegen ist $-(\varphi'X-\chi'X)$ positiv, oder $\chi'X-\varphi'X$ positiv. Nun ist $\chi'X-\varphi'x_0>\chi'X-\varphi'X$, folglich auch $-(\varphi'x_0-\chi'X)$ positiv, und da fX negativ ist,

$$X-\frac{fX}{\varphi'x_0-\chi'X}>X-\frac{fX}{\varphi'X-\chi'X}>X.$$

Offenbar ist aber hier $\frac{\varphi' x_0 - \chi' X}{fX} = \frac{\chi' X - \varphi' x_0}{-fX}$ gröfser als $\frac{\varphi' X - \chi' x_0}{fX} = \frac{\chi' x_0 - \varphi' X}{-fX}$, mithin nach *Cauchy*'s Bezeichnung $\frac{fX}{\varphi' x_0 - \chi' X} = A$, und daher $X - A \gtrless \frac{x}{X}$. Auf dieselbe Weise kann man zeigen, dafs auch im dritten Falle

$$X - \frac{fX}{\varphi' x_0 - \chi' X} > X - \frac{fX}{\varphi' x_0 - \chi' x_0} > X \text{ ist.}$$

Dieselbe Betrachtung führt nun auch zur Bestimmung des zweiten Näherungswerthes, der zwischen x_0 und x liegt.

Im ersten Falle ist $\varphi' x - \chi' X$ positiv, also auch der gröfsere Werth $\varphi' X - \chi' x_0$ positiv. Da nun $f x_0$ negativ ist, so ist $\frac{-f x_0}{\varphi' X - \chi' x_0}$ etwas kleineres Positives als $\frac{-f x_0}{\varphi' X - \chi' X}$, mithin

$$x_0 - \frac{f x_0}{\varphi' X - \chi' x_0} < x_0 - \frac{f x_0}{\varphi' X - \chi' X} \begin{matrix} < x \\ > x_0 \end{matrix},$$

und da $\varphi' X - \chi' x_0 > \varphi' x_0 - \chi' X$, so ist nach *Cauchy*'s Bezeichnung

$$x_0 - \frac{f x_0}{\varphi' X - \chi' x_0} = x_0 + a, \text{ indem, da } f x_0 \text{ negativ ist,}$$

$$\frac{\varphi' X - \chi' x_0}{f x_0} < \frac{\varphi' x_0 - \chi' X}{f x_0} \text{ ist.}$$

Eben so findet man im vierten Falle

$$x_0 - \frac{f x_0}{\varphi' X - \chi' x_0} < x_0 - \frac{f x_0}{\varphi' x_0 - \chi' x_0} \begin{matrix} < x \\ > x_0 \end{matrix}.$$

Im zweiten Falle findet man

$$x_0 - \frac{f x_0}{\varphi' x_0 - \chi' X} < x_0 - \frac{f x_0}{\varphi' X - \chi' X} \begin{matrix} < x \\ > x_0 \end{matrix}$$

und im dritten

$$x_0 - \frac{f x_0}{\varphi' x_0 - \chi' X} < x_0 - \frac{f x_0}{\varphi' x_0 - \chi' x_0} \begin{matrix} < x \\ > x_0 \end{matrix}.$$

Es ergiebt sich aus dieser Uebersicht, dafs bei der *Fourier*'schen Methode die Grenzen noch enger sind als bei der von *Cauchy*.

2.

Ueber die Zerlegung gebrochener algebraischer rationaler Functionen in Partialbrüche.

(Von Hrn. Prof. *Oettinger* zu Freiburg i. Br.)

I.

Die Zerlegung gebrochener Functionen ist schon vielfach und namentlich von dem Herausgeber dieses Journals *(Mémoire sur la décomposition des fractions algébriques rationelles. Vol. IX. et X.)* umfassend und gründlich behandelt worden.

Die Mittheilung nachstehender Methode über die Zerlegung gebrochener Functionen in Partialbrüche dürfte daher nur in so fern nicht unwillkommen sein, als sie, so viel mir bekannt ist, auf neue Resultate führt, welche, einmal gewonnen, den Vortheil haben, dafs sie in allen Fällen die Rechnung sehr erleichtern und ungemein schnell und bequem die Coefficienten der aufzusuchenden einzelnen Partialbrüche darstellen.

Unter der Voraussetzung, dafs jede ächte gebrochene Function von der Form

$$\frac{B_0+B_1x+B_2x^2+\dots B_zx^z}{(A_0+A_1x+A_2x^2+\dots A_mx^m)^p}$$

auf folgenden Ausdruck

$$\frac{B_0+B_1x+B_2x^2+\dots B_zx^z}{(x\pm a_1)^p(x\pm a_2)^p\dots(x\pm a_m)^p}$$

zurückgeführt werden kann, handelt es sich darum, die unter letzter Form erscheinende Function in Partialbrüche zu zerlegen.

Doch bleiben wir nicht bei dieser Form einer gebrochenen Function stehen, sondern wählen folgende allgemeinere:

$$1.\quad \frac{fx}{f(x\pm a_r)(x\pm b_1)^{p_1}(x\pm b_2)^{p_2}\dots(x\pm b_s)^{p_s}f(c_q-x)(d_1-x)^{t_1}(d^2-x)^{t_2}\dots(d_u-x)^{t_u}x^n},$$

wo

$$fx = B_0+B_1x+B_2x^2+\dots B_zx^z,$$
$$f(x\pm a_r) = (x\pm a_1)(x\pm a_2)\dots(x\pm a_r),$$
$$f(c_q-x) = (c_1-x)(c_2-x)\dots(c_q-x)$$

bedeutet; ferner

$$z < r + p_1 + p_2 + \dots p_s + q + t_1 + t_2 + \dots t_u + n$$

ist und

$$a_1, a_2, a_3, \dots a_r, \quad b_1, b_2, \dots b_s, \quad c_1, c_2, \dots c_q, \quad d_1, d_2, \dots d_u$$

in der Regel unter sich verschiedene Werthe bezeichnen. Die hier zu findenden Formeln werden erkennen lassen, wann hiervon eine Ausnahme Statt findet.

Die Zerlegung der vorstehenden Function in Partialbrüche führt auf folgendes allgemeine Schema:

2.
$$\frac{fx}{f(x\pm a_r)(x\pm b_1)^{p_1}(x\pm b_2)^{p_2}\dots(x\pm b_s)^{p_s}f(c_q-x)(d_1-x)^{t_1}\dots(d_u-x)^{t_u}x^n}$$
$$= \frac{D_1}{x\pm a_1} + \frac{D_2}{x\pm a_2} + \frac{D_3}{x\pm a_3} + \dots + \frac{D_r}{x\pm a_r}$$
$$+ \frac{{}^1E_0}{(x\pm b_1)^{p_1}} + \frac{{}^1E_1}{(x+b_1)^{p_1-1}} + \frac{{}^1E_2}{(x\pm b_1)^{p_1-2}} + \dots + \frac{{}^1E_{p_1-1}}{x\pm b_1}$$
$$+ \frac{{}^2E_0}{(x\pm b_2)^{p_2}} + \frac{{}^2E_1}{(x\pm b_2)^{p_2-1}} + \frac{{}^2E_2}{(x\pm b_2)^{p_2-2}} + \dots + \frac{{}^2E_{p_2-1}}{x\pm b_2}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$+ \frac{{}^sE_0}{(x\pm b_s)^{p_s}} + \frac{{}^sE_1}{(x-b_s)^{p_s-1}} + \frac{{}^sE_2}{(x\pm b_s)^{p_s-2}} + \dots + \frac{{}^sE_{p_s-1}}{x\pm b_s}$$
$$+ \frac{K_1}{c_1-x} + \frac{K_2}{c_2-x} + \frac{K_3}{c_3-x} + \dots + \frac{K_q}{c_q-x}$$
$$+ \frac{{}^1G_0}{(d_1-x)^{t_1}} + \frac{{}^1G_1}{(d_1-x)^{t_1-1}} + \frac{{}^1G_2}{(d_1-x)^{t_1-2}} + \dots + \frac{{}^1G_{t_1-1}}{d_1-x}$$
$$+ \frac{{}^2G_0}{(d^2-x)^{t_2}} + \frac{{}^2G_1}{(d_2-x)^{t_2-1}} + \frac{{}^2G_2}{(d_2-x)^{t_2-2}} + \dots + \frac{{}^2G_{t_2-1}}{d_2-x}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\cdot \frac{{}^uG_0}{(d_u-x)^{t_u}} + \frac{{}^uG_1}{(d_u-x)^{t_u-1}} + \frac{{}^uG_2}{(d_u-x)^{t_u-2}} + \dots + \frac{{}^uG_{t_u-1}}{d_u-x}$$
$$+ \frac{A_0}{x^n} + \frac{A_1}{x^{n-1}} + \frac{A_2}{x^{n-2}} + \dots + \frac{A_{n-1}}{x^{n-1}}.$$

Die Auflösung des vorliegenden Problems beruht auf der Auffindung von Formeln, durch welche die Werthe der Coefficienten D_1, D_2, ... ${}^1E_0$, ${}^2E_0$, ... nicht nur auf zurücklaufendem sondern auch auf unabhängigem Wege leicht und bequem mögen ermittelt werden können. Die Methode, welche uns zum Zwecke führen wird, ist im Allgemeinen die Methode der unbestimmten Coefficienten, angepafst an die Eigenthümlichkeit der vorliegenden Aufgabe.

Wegen anderer Methoden und wegen Feststellung der hierher gehörigen Vorbegriffe verweisen wir auf die schon angeführte Abhandlung

des Herrn Herausgebers, so wie auf die Mittheilungen im 1., 7. u. 8. Bd. dieses Journals von den Herren *Dirksen, Clausen* und *Beyer,* und bemerken, daſs uns die genannten Abhandlungen bei Aufsuchung der nachstehenden Resultate nicht zu Gebote standen, sondern erst später mit dieser Arbeit verglichen werden konnten.

Obgleich nun unsere Methode keineswegs auf combinatorischem Wege gesucht wurde, so führen doch ihre Entwickelungen auf mehrere Sätze, die den Combinationen angehören und von denen uns nicht bekannt ist, daſs sie schon irgendwo mitgetheilt worden sind. Um den Entwickelungsgang nicht zu unterbrechen, sollen diese Sätze und noch einige, die gerade nöthig werden, unserer Abhandlung voranstehen, um im Laufe der Untersuchung darauf zurückweisen zu können.

II.

Einige Hülfssätze von Combinationen.

Die Art, wie die Gruppen der Verbindungen einer bestimmten Classe in die niederer Classen zerlegt werden können, ist sehr mannigfaltig und leicht zu finden. Wir theilen folgende Art ohne weitere Begründung mit. Die Bezeichnungsweise ist diejenige, welche in unserer Lehre von den Combinationen zum Grunde gelegt ist.

$$3.\quad C(a_1, a_2, \ldots a_r)^k = a_1 C(a_2, a_3, \ldots a_r)^{k-1} + C(a_2, a_3, \ldots a_r)^k,$$

$$4.\quad C'(a_1, a_2, \ldots a_r)^k = a_1 C'(a_1, a_2, \ldots a_r)^{k-1} + C'(a_2, a_3, \ldots a_r)^k,$$

$$5.\quad C'(a_1, a_2, \ldots a_r)^k = (a_1)^k + (a_1)^{k-1} C'(a_2, a_3, \ldots a_r)^1 + (a_1)^{k-2} C'(a_2, a_3, \ldots a_r)^2 + \ldots$$
$$\ldots + a_1 C'(a_2, a_3, \ldots a_r)^{k-1} + C'(a_2, a_3, \ldots a_r)^k,$$

$$6.\quad C(a_1, a_2, \ldots a_r)^k = a_2 C(a_1)^1 C(a_3, a_4, \ldots a_r)^{k-2}$$
$$+ a_3 C(a_1, a_2)^1 C(a_4, a_5, \ldots a_r)^{k-2}$$
$$+ a_4 C(a_1, a_2, a_3)^1 C(a_5, a_6, \ldots a_r)^{k-2}$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$+ a_{r-k+2} C(a_1, a_2, \ldots a_{r-k+1})^1 C(a_{r-k+3}, \ldots a_r)^{k-2}$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$7.\quad C'(a_1, a_2, \ldots a_r)^k = a_1 C(a_1)^1 C'(a_1, a_2, \ldots a_r)^{k-2}$$
$$+ a_2 C(a_1, a_2)^1 C'(a_2, a_3, \ldots a_r)^{k-2}$$
$$+ a_3 C(a_1, a_2, a_3)^1 C'(a_3, a_4, \ldots a_r)^{k-2}$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$+ a_r C(a_1, a_2, \ldots a_r)^1 C'(a_r)^{k-2}.$$

Aus (1.) läſst sich leicht folgende Gleichung ableiten:

$$C(a_2,\ a_3,\ \ldots.\ a_r)^k = C(a_1,\ a_2,\ \ldots.\ a_r)^k - a_1 C(a_2,\ a_3,\ \ldots.\ a_r)^{k-1}.$$

Wird das Gesetz dieser Gleichung auf den zweiten Ausdruck rechts vom Gleichheitszeichen übertragen und wiederholt auf das sich ergebende Resultat angewendet, so erhält man folgenden Ausdruck:

$$8.\quad C(a_2,\ a_3,\ \ldots.\ a_r)^k = C(a_1,\ a_2,\ \ldots.\ a_r)^k - a_1 C(a_1,\ a_2,\ \ldots.\ a_r)^{k-1} \\ + a_1 a_1 C(a_1, a_2, \ldots. a_r)^{k-2} \ldots. (-)^k (a_1)^k C(a_1, a_2, \ldots. a_r)^0.$$

Werden die Stellenzahlen der Elemente dieser Gleichung um eine Einheit erhöht; wird dann $r-1$ statt r gesetzt und jeder Ausdruck auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens wieder nach der Gleichung (8.) selbst entwickelt und das erhaltene Resultat geordnet, so entsteht folgende Formel:

$$C(a_3,\ a_4,\ \ldots.\ a_r)^k =$$

$$C(a_1, a_2, \ldots. a_r)^k - \left.\begin{array}{c} a_1 a_1 \\ a_1 a_2 \\ a_2 a_2 \end{array}\right| C(a_1, a_2, \ldots. a_r)^{k-1} + \left.\begin{array}{c} a_1 a_1 a_1 \\ a_1 a_1 a_2 \\ a_1 a_2 a_2 \\ a_2 a_2 a_2 \end{array}\right| C(a_1, a_2, \ldots. a_r)^{k-2} - \ldots.$$

$$\ldots.\ (-)^k \left.\begin{array}{c} a_1^k \\ a_1^{k-1} a_2 \\ a_1^{k-2} a_2^2 \\ \ldots\ldots \\ (a_2)^k \end{array}\right| C(a_1,\ a_2,\ \ldots.\ a_r)^0.$$

Wird das eben beschriebene Verfahren widerholt angewendet und so fortgefahren, so führt es zu folgendem allgemeinen Gesetze:

$$9.\quad C(a_{p+1},\ a_{p+2},\ \ldots.\ a_r)^k =$$

$$C(a_1,\ a_2,\ \ldots.\ a_r)^k - C'(a_1,\ a_2,\ \ldots.\ a_p)^1 C(a_1,\ a_2,\ \ldots.\ a_r)^{k-1} \\ + C'(a_1,\ a_2,\ \ldots.\ a_p)^2 C(a_1,\ a_2,\ \ldots.\ a_r)^{k-2} \\ - C'(a_1,\ a_2,\ \ldots.\ a_p)^3 C(a_1,\ a_2,\ \ldots.\ a_r)^{k-3} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (-)^k C'(a_1,\ a_2,\ \ldots.\ a_p)^k C(a_1,\ a_2,\ \ldots.\ a_r)^0.$$

Diese und die vorhergehenden Gleichungen gelten nicht nur von den Gruppen, sondern auch, wie natürlich daraus folgt, von den Gruppen-Anzahlen. Aus (9.) läſst sich für diesen Fall folgende Gleichung ableiten:

$$10. \quad \frac{(r-p)^{k|-1}}{1^{k|1}} =$$

$$\frac{r^{k|-1}}{1^{k|1}} - \frac{p}{1}\cdot\frac{r^{k-1|-1}}{1^{k-1|1}} + \frac{p(p+1)}{1.2}\cdot\frac{r^{k-2|-1}}{1^{k-2|1}} - \frac{p(p+1)(p+2)}{1.2.3}\cdot\frac{r^{k-3|-1}}{1^{k-3|1}} + \ldots$$

$$\ldots (-)^{k-1}\frac{p^{k-1|1}}{1^{k-1|1}}\cdot r (-)^k\cdot\frac{p^{k|1}}{1^{k|1}}.$$

Der Ausdruck auf der linken Seite des Gleichheitszeichens führt nur so lange auf darstellbare Werthe, als die Elementenzahl der Classenzahl gleichkommt oder sie übertrifft, oder so lange

$$r - p \geqq k$$

ist. Wird aber $r - p < k$, so können keine Gruppen mehr entstehen und die Gleichung (9.) geht in folgende über:

$$11. \quad C(a_{p+1},\, a_{p+2},\, \ldots\, a_r)^k = 0$$
$$= C(a_1,\, a_2,\, \ldots\, a_r)^k - C'(a_1,\, a_2,\, \ldots\, a_p)^1\, C(a_1,\, a_2,\, \ldots\, a_r)^{k-1}$$
$$+ C'(a_1,\, a_2,\, \ldots\, a_p)^2\, C(a_1,\, a_2,\, \ldots\, a_r)^{k-2}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(-)^k\, C'(a_1,\, a_2,\, \ldots\, a_p)^k,$$

oder auch durch Umstellung in:

$$12. \quad C'(a_1,\, a_2,\, \ldots\, a_p)^k = C(a_1,\, a_2,\, \ldots\, a_r)^1\, C'(a_1,\, a_2,\, \ldots\, a_p)^{k-1}$$
$$- C(a_1,\, a_2,\, \ldots\, a_r)^2\, C'(a_1,\, a_2,\, \ldots\, a_p)^{k-2}$$
$$+ C(a_1,\, a_2,\, \ldots\, a_r)^3\, C'(a_1,\, a_2,\, \ldots\, a_p)^{k-3}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(-)^{k-1}\, C(a_1,\, a_2,\, \ldots\, a_r)^k.$$

Diese Gleichung gilt noch, wenn $r = p$ ist. Es ist alsdann

$$13. \quad C'^k = C'.C'^{k-1} - C^2.C'^{k-2} + C^3.C'^{k-3} - \ldots (-)^{k-1}\, C^k$$
$$(a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad a_4, \quad \ldots\ldots\ldots \quad a_r).$$

Hierin zeigen C^1, C^2, C^3, ... C'^1, C'^2, C'^3, ... die Gruppen der Verbindungen ohne und mit Wiederholungen, zur ersten, zweiten, dritten Classe u. s. w. aus den untergeschriebenen Elementen an. Aus (12.) und (13.) ergeben sich durch Substitution der Zahlenwerthe folgende Gleichungen:

$$14. \quad \left(\frac{p}{1}\right)^{k|1} = \frac{r}{1}\cdot\left(\frac{p}{1}\right)^{k-1|1} - \frac{r(r-1)}{1.2}\cdot\left(\frac{p}{1}\right)^{k-2|1} + \frac{r(r-1)(r+2)}{1.2.3}\cdot\left(\frac{p}{1}\right)^{k-3|+1} - \ldots$$
$$\ldots (-)^{k-1}\frac{r(r-1)\ldots(r-k+1)}{1.2\ldots k},$$

$$15. \quad \left(\frac{r}{1}\right)^{k|1} = \frac{r}{1}\cdot\left(\frac{r}{1}\right)^{k-1|1} - \frac{r(r-1)}{1.2}\cdot\left(\frac{r}{1}\right)^{k-2|1} + \frac{r(r-1)(r-2)}{1.2.3}\cdot\left(\frac{r}{1}\right)^{k-3|-1} - \ldots$$
$$\ldots (-)^{k-1}\frac{r(r-1)\ldots(r-k+1)}{1.2\ldots k}.$$

Der Satz (13.) kann auch unmittelbar auf folgende Art durch Zerlegung nachgewiesen werden:

$$C(a_1,\ a_2,\ \dots.\ a_r)\, C'(a_1,\ \dots.\ a_r)^{k-1} =$$
$$a_1 C(a_1)^1 C'(a_1,\ \dots.\ a_r)^{k-2} + a_2 C(a_1,\ a_2)^1 C'(a_2,\ \dots.\ a_r)^{k-2} + \dots$$
$$\dots. + a_r C(a_1,\ \dots.\ a_r)^1 C'(a_r)^{k-2}$$
$$+ a_1 C(a_2,\ \dots.\ a_r)^1 C'(a_1,\ \dots.\ a_r)^{k-2} + a_2 C(a_3,\ \dots.\ a_r)^1 C'(a_2,\ \dots.\ a_r)^{k-2} \dots$$
$$\dots. + a_{r-1} C(a_r)^1 C'(a_{r-1},\ a_r)^{k-2},$$
$$-C(a_1,\ \dots.\ a_r)^2 C'(a_1,\ \dots.\ a_r)^{k-2} =$$
$$-a_1 C(a_2,\ \dots.\ a_r)^1 C'(a_1,\ \dots.\ a_r)^{k-2} - a_2 C(a_3,\ \dots.\ a_r)^1 C'(a_2,\ \dots.\ a_r)^{k-2} \dots$$
$$\dots - a_{r-1} C(a_r)^1 C'(a_{r-1},\ a_r)^{k-2}$$
$$-a_1 C(a_2,\ \dots.\ a_r)^2 C'(a_1,\ \dots.\ a_r)^{k-2} - a_2 C(a_3,\dots.\ a_r)^2 C'(a_2,\ \dots.\ a_r)^{k-3} \dots$$
$$\dots. - a_{r-2} C(a_{r-1},\ a_r)^2 C'(a_{r-2},\ a_{r-1},\ a_r)^{k-3},$$

. . . .

$$\pm C(a_1,\ \dots.\ a_r)^{k-1} C'(a_1,\ \dots.\ a_r) =$$
$$\pm [a_1 C(a_2,\ \dots.\ a_r)^{k-2} C'(a_1,\ \dots.\ a_r)^1 + a_2 C(a_3,\ \dots.\ a_r)^{k-2} C(a_2,\dots.\ a_r)^1 \dots$$
$$\dots. + a_{r-k+2} C(a_{r-k+3},\ \dots.\ a_r)^{k-2} C(a_{r-k+2}\ \dots.\ a_r)^1]$$
$$\pm [a_2 C(a_1)^1 C(a_3,\ \dots.\ a_r)^{k-2} + a_3 C(a_1,\ a_2)^1 C(a_4,\ \dots.\ a_r)^{k-2}\ \dots.$$
$$\dots.\ a_{r-k+2} C(a_1,\ \dots.\ a_{r-k+1})^1 C(a_{r-k+3},\ \dots.\ a_r)^{k-2}],$$
$$\pm C(a_1,\ a_2,\ \dots.\ a_r) =$$
$$\pm [a_2 C(a_1)^1 C(a_3,\ \dots.\ a_r)^{k-2} + a_3 C(a_1,\ a_2)^1 C(a_4,\ \dots.\ a_r)^{k-2}\ \dots.$$
$$\dots.\ a_{r-k+2} C(a_1,\ \dots.\ a_{r-k+1})^1 C(a_{r-k+3}\ \dots.\ a_r)^{k-2}].$$

Werden die Ausdrücke auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens vereinigt, so findet man, mit Rücksicht auf die Gleichung (7.), durch Summirung der ersten Horizontalreihe

$$C'^k = C'C'^{k-1} - C^2 C'^{k-1}\ \dots.\ (-)^{k-1} C^k$$
$$(a_1,\quad a_2,\ a_3,\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ a_r)$$

Diese Gleichung fällt mit (13.) zusammen. An diese Gleichungen schliefsen sich nun leicht folgende, deren Begründung keine Schwierigkeit hat,

$$16.\quad C'(a_{p+1},\ a_{p+2},\ \dots.\ a_r)^k =$$
$$C'(a_1,\ a_2,\ \dots.\ a_r)^k - C'(a_1,\ a_2,\ \dots.\ a_p)^1 C'(a_1,\ \dots.\ a_r)^{k-1}$$
$$+ C'(a_1,\ a_2,\ \dots.\ a_p)^2 C'(a_1,\ \dots.\ a_r)^{k-2}$$
$$- C'(a_1,\ a_2,\ \dots.\ a_p)^3 C'(a_1,\ \dots.\ a_r)^{k-3}$$
$$.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$
$$(-)^k C'(a_1,\ a_2,\ \dots.\ a_p)^k,$$

$$17.\quad C(a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_r,\ b_1,\ b_2,\ \ldots\ b_p)^k =$$
$$C(a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_r)^k + C(a_1,\ \ldots\ a_r)^{k-1}C(b_1,\ b_2,\ \ldots\ b_p)^1$$
$$+ C(a_1,\ \ldots\ a_r)^{k-2}C(b_1,\ b_2,\ \ldots\ b_p)^2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ C(b_1,\ b_2,\ \ldots\ b_p)^k,$$

$$18.\quad C'(a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_r,\ b_1,\ b_2,\ \ldots\ b_p)^k =$$
$$C'(a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_r)^k + C'(a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_r)^{k-1}C'(b_1,\ b_2,\ \ldots\ b_p)^1$$
$$+ C'(a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_r)^{k-2}C'(b_1,\ b_2,\ \ldots\ b_p)^2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ C'(b_1,\ b_2,\ \ldots\ b_p)^k.$$

Diese Gleichungen gelten, wie leicht ersichtlich, nicht nur für die Gruppen, sondern auch für die Zahlen-Ausdrücke derselben. Deswegen ist auch

$$19.\quad \frac{(r-p)^{k|1}}{1^{k|1}} = \left(\frac{r}{1}\right)^{k|1} - \frac{p}{1}\cdot\left(\frac{r}{1}\right)^{k-1|1} + \frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}}\cdot\left(\frac{r}{1}\right)^{k-2|1} - \ldots (-)^k\frac{p^{k|-1}}{1^{k|1}},$$

$$20.\quad \left(\frac{r+p}{1}^{k|1}\right) = \left(\frac{r}{1}\right)^{k|1} + \frac{p}{1}\cdot\left(\frac{r}{1}\right)^{k-1|1} + \left(\frac{p}{1}\right)^{2|1}\left(\frac{r}{1}\right)^{k-2|1} + \ldots + \left(\frac{p}{1}\right)^{k|1},$$

$$21.\quad \frac{(r+p)^{k|-1}}{1^{k|1}} = \frac{r^{k|-1}}{1^{k|1}} + \frac{p}{1}\cdot\frac{r^{k-1|-1}}{1^{k-1|1}} + \frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}}\cdot\frac{r^{k-2|-1}}{1^{k-2|1}} + \ldots + \frac{p^{k|-1}}{1^{k|1}}.$$

Die Harmonie dieser Gleichungen mit der Gleichung (10.) tritt sehr deutlich hervor. Setzt man in den Gleichungen (17.) und (18.) die Elemente der einen Art einander gleich und $b_1 = b_2 = b_3 = \ldots b_p = b$, so gehen die Gruppen der Verbindungen in Potenzen über und es treten die Zahlen-Ausdrücke statt der Gruppen ein. Also wird dann

$$22.\quad C(a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_r,\ b^p)^k =$$
$$C(a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_r)^k + \frac{p}{1}C(a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_r)^{k-1}b$$
$$+ \frac{p(p-1)}{1.2}C(a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_r)^{k-2}b^2$$
$$+ \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}C(a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_r)^{k-3}b^3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \frac{p(p-1)(p-2)\ \ldots\ (p-k+1)}{1.2.3\ \ldots\ k}b^k,$$

$$23.\quad C'(a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_r,\ b^p)^k =$$
$$C'(a_1, a_2, \ldots a_r)^k + \frac{p}{1}C'(a_1, a_2, \ldots a_r)^{k-1}b + \left(\frac{p}{1}\right)^{2|1}C'(a_1, a_2, \ldots a_r)^{k-2} + \ldots$$
$$\ldots + \left(\frac{p}{1}\right)^{k|1}.b^k.$$

In diesen Gleichungen wurde das Gleichsetzen mehrerer Elemente durch Potenzen, wie es gewöhnlich geschieht, angezeigt. Diese Darstellungen beziehen sich auf Verbindungen mit beschränkten Wiederholungen, unterscheiden sich aber von den in meiner Combinationslehre §. 12. p. 15 angegebenen dadurch, dafs die Elemente erst nach der entwickelten Darstellung den Gruppen gleich gesetzt wurden.

III.

Der Kürze wegen bezeichnen wir die allgemeine Function (1.) durch

$$\frac{fx}{f(x\pm a_r)\,\varphi(x\pm b_s)^{p_s} f(c_q-x)\,\varphi(d_u-x)^{t_u}x^n},$$

worin

$$\varphi(x\pm b_s) = (x\pm b_1)^{p_1}(x\pm b_2)^{p_2}(x\pm b_3)^{p_3}\;\dots\;(x\pm b_s)^{p_s},$$
$$\varphi(d_u-x) = (d_1-x)^{t_1}(d_2-x)^{t_2}(d_3-x)^{t_3}\;\dots\;(d_u-x)^{t_u},$$

und für $f(x\pm a_r)$ und $f(c_q-x)$ das oben schon Angedeutete zu setzen ist.

Am einfachsten lassen sich die Werthe von D_1, D_2, D_3, ... K_1, K_2, K_3, die oben unter dem Schema 2. aufgeführt sind, bestimmen.

Um zuerst die Werthe von D_1, D_2, ... zu finden, werde das Schema 2. mit dem Nenner der vorliegenden allgemeinen Function 1. vervielfacht. Dadurch theilt sich die Gesammt-Anzahl aller Partialbrüche auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens in zwei Gruppen. In denjenigen Brüchen, welche D_1, D_2, ... D_r im Zähler haben, und in den übrigen zugleich, tritt hierdurch mit jedem Gliede immer ein Factor in Verbindung, welcher den Factor im Nenner zerstört, und es entstehen lauter Factoren-Aggregate ohne Nenner, aus welchen sich ohne Schwierigkeit die Werthe der zu bestimmenden Gröfsen D_1, D_2, ... D_r ableiten lassen.

Betrachten wir zuerst die besondere Form der Function (1.)

$$\frac{fx}{f(x-a_r)\,\varphi(x-b_s)^{p_s} f(c_q-x)\,\varphi(d_u-x)^{t_u}x^n},$$

so giebt das angedeutete Vervielfachen

$$fx = \{D_1(x-a_2)(x-a_3)\dots(x-a_r)+D_2(x-a_1)(x-a_3)\dots(x-$$
$$\dots D_r(x-a_1)\dots(x-a_{r-1})\}\varphi(x-b_s)^{p_s}f(c_q-x)\varphi(d_u-x)^{t_u}x^n+(\Sigma M)f(x-a$$

wenn unter (ΣM) das Aggregat aller Glieder und der an ihnen vorgenommenen Veränderungen bezeichnet wird, welche durch Vervielfachen mit dem Nenner der Function entstanden sind.

Setzt man nun in dieser Formel allmälig $a_1, a_2, a_3, \ldots a_r$ statt x, so verschwinden jedesmal alle Glieder bis auf eines, welches sofort ganz einfach zur Bestimmung des gesuchten Werthes der verschiedenen Coefficienten dient. Führt man hierbei die Bezeichnung

$$fx = B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \ldots + B_z x^z = \Sigma_0^z B_z x^z$$

in den Calcul ein, so findet man zur Darstellung der fraglichen Werthe folgendes Schema:

24. $$D_1 = \frac{\Sigma_0^z B_z a_1^z}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots(a_1-a_r)\,\varphi(a_1-b_s)^{p_s} f(c_q-a_1)\,\varphi(d_u-a_1)^{t_u} a_1^n},$$

$$D_2 = \frac{\Sigma_0^z B_z a_2^z}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)\ldots(a_2-a_r)\,\varphi(a_2-b_s)^{p_s} f(c_q-a_2)\,\varphi(d_u-a_2)^{t_u} a_2^n},$$

. . . .

$$D_k = \frac{(a_k-a_k)\,\Sigma_0^z B_z a_k^z}{f(a_k-a_r)\,\varphi(a_k-b_s)^{p_s} f(c_q-a_k)\,\varphi(d_u-a_k)^{t_u} a_k^n}.$$

Hiebei ist zu bemerken, daſs

$$\frac{a_k-a_k}{f(a_k-a_r)} = \frac{1}{(a_k-a_1)(a_k-a_2)\ldots(a_k-a_{k-1})(a_k-a_{k+1})\ldots(a_k-a_r)}\cdot\frac{0}{0}$$
$$= \frac{1}{(a_k-a_1)(a_k-a_2)\ldots(a_k-a_{k-1})(a_k-a_{k+2})\ldots(a_k-a_r)}$$

ist. Auf ähnliche Weise ergeben sich die Werthbestimmungen von D_1, D_2, ... für alle besondere Formen der allgemeinen Function 1. Für

$$\frac{fx}{f(x-a_r)\,\varphi(x+b_s)^{p_s} f(c_q-x)\,\varphi(d_u-x)^{t_u} x^n}$$

wird sein

25. $$D_k = \frac{\Sigma_0^z B_z a_k^z.(a_k-a_k)}{f(a_k-a_r)\,\varphi(a_k+b_s)^{p_s} f(c_q-a_k)\,\varphi(d_u-a_k)^{t_u} a_k^n}.$$

Nach den nämlichen Vorbereitungen ergiebt sich für die Function

$$\frac{fx}{f(x+a_r)\,\varphi(x-b_s)^{p_s} f(c_q-x)\,\varphi(d_u-x)^{t_u}.x^n},$$

wenn $-a_1, -a_2, -a_3, \ldots -a_r$ allmälig statt x gesetzt wird,

26. $$D_k = \frac{(a_k-a_k)\,\Sigma_0^z (-)^z B_z a_k^z}{f(-a_k+a_r)\,\varphi(-a_k-b_s)^{p_s} f(c_q+a_k)\,\varphi(d_u+a_k)^{t_u} (-a_k)^n}$$

oder

27. $$D_k = (-)^m \frac{(a_k-a_k)\,\Sigma_0^z (-)^z B_z a_k^z}{f(a_k-a_r)\,\varphi(a_k+b_s)^{p_s} f(c_q+a_k)\,\varphi(d_u+a_k)^{t_u} a_k^n},$$

wenn $m = p_1 + p_2 + \ldots p_s + n + r - 1$ ist.

Für die Form

$$\frac{fx}{f(x+a_r)\,\varphi(x+b_s)^{p_s}f(c_q-x)\,\varphi(d_u-x)\,x^n}$$

ergiebt sich

$$28. \quad D_k = (-)^n \frac{\Sigma_0^z(-)^z B_z a_k^z (a_k - a_k)}{f(-a_k+a_r)\,\varphi(-a_k+b_s)^{p_s}f(c_q+a_k)\,\varphi(d_u+a_k)\,a_k^n}.$$

Um die Werthe von K_1, K_2, K_3, ..., welche in dem Schema 2. angegeben sind, zu erhalten, vervielfache man, wie vorhin, mit dem Nenner der allgemeinen Function und trenne die Glieder in zwei Gruppen. Hierdurch entsteht

$$fx = [K_1(c_2-x)\;....\;c_q-x) + K_2(c_1-x)(c_3-x)\;....\;(c_q-x)\;....$$
$$....+K_q(c_1-x)\;....\;(c_{q-1}-x)]\,f(x\pm a_r)\,\varphi(x\pm b_s)^{p_s}\,\varphi(d_u-x)^{t_u}x^n$$
$$+(\psi N)\,f(c_q-x).$$

Werden hierin allmälig statt x die Werthe c_1, c_2, c_3, ... c_q eingeführt, so verschwinden alle Glieder mit Ausnahme eines einzigen und es bestimmen sich die Werthe der fraglichen Gröfsen durch folgende Gleichung:

$$29. \quad K_k = \frac{\Sigma_0^z B_z c_k^z (c_k - c_k)}{f(c_k\pm a_r)\,\varphi(c_k\pm b_s)^{p_s}f(c_q-c_k)\,\varphi(d_u-c_k)^{t_u}c_k^n},$$

worin die Gleichungen

$$f(c_k\pm a_r) = (c_k\pm a_1)(c_k\pm a_2)\;....\;(c_k\pm a_r),$$
$$\varphi(c_k\pm b_s)^{p_s} = (c_k\pm b_1)^{p_1}(c_k\pm b_2)^{p_2}\;....\;(c_k\pm b_s)^{p_s},$$
$$f(c_q-c_k) = (c_1-c_k)(c_2-c_k)\;....\;(c_q-c_k),$$
$$\varphi(d_u-c_k)^{t_u} = (d_1-c_k)^{t_1}(d_2-c_k)^{t_2}\;....\;(d_u-c_k)^{t_u}$$

die einzuführenden Werthe andeuten.

Behandelt man nun endlich noch die Function

$$\frac{fx}{f(x-a_1)\,f(x+h_r)\,\varphi(x\pm b_s)^{p_s}f(c_q-x)\,\varphi(d_u-x)^{t_u}x^n}$$

um die Coefficienten, welche durch Zerlegung der Function $f(x-a_r)$ in Partialbrüche nöthig werden, zu bestimmen, so erhält man

$$30. \quad D_k = \frac{\Sigma_0^z B_z a_k^z (a_k - a_k)}{f(a_k-a_r)\,f(a_k+h_r)\,\varphi(a_k\pm b_s)^{p_s}f(c_q-a_k)\,\varphi(d_u-a_k)^{t_u}a_k^n}.$$

Die Werthe der Coefficienten für die Partialbrüche, welche sich auf die Function $f(x+h_r)$ beziehen, und die durch H_1, H_2, H_3, ... H_r bezeichnet werden sollen, bestimmen sich durch die Gleichung:

$$31.\quad H_k = (-)^n \frac{(h_\nu - h_\nu)\, \Sigma_0^z (-)^z B_z h_k^z}{f(-h_\nu - a_r) f(-h_k + h_\nu)\, \varphi(-h_\nu \pm b_s)^{p_1} f(c_q + h_\nu)\, \varphi(d_u + h_\nu)^{t_u} (h_\nu)^n}.$$

In diesen Ausdrücken gelten die oben angeführten Bezeichnungen gleichfalls.

Besondere Fälle.

Aus den vorstehenden Gleichungen lassen sich nun leicht besondere Fälle bei Auflösung vorkommender Beispiele ableiten. Ist, um auf das Einfachste zurückzugehen, die Function

$$\frac{fx}{f(x - a_r) x^n}$$

in Partialbrüche zu zerlegen, so sind die Coefficienten der Brüche, welche sich auf $f(x - a_r)$ beziehen

$$32.\quad D_1 = \frac{B_0 + B_1 a_1 + B_2 a^2 + \dots}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3) \dots (a_1 - a_r) . a_1^n},$$

$$D_2 = \frac{B_0 + B_1 a_2 + B_2 a_2^2 + \dots}{(a_2 - a_1)(a_2 - a_3) \dots (a_2 - a_r) . a_2^n},$$

$$D_3 = \frac{B_0 + B_1 a_3 + B_2 a_3^2 + \dots}{(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)(a_3 - a_4) \dots (a_3 - a_r) . a_3^n},$$

. . . .

Für die Function

$$\frac{fx}{f(x - a_r)(x \pm b)^p x^n}$$

ergiebt sich

$$33.\quad D_1 = \frac{B_0 + B_1 a_1 + B_2 a_1^2 + \dots}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3) \dots (a_1 - a_u)(a_1 \pm b)^p a_1^n},$$

$$D_2 = \frac{B_0 + B_1 a_2 + B_2 a_2^2 + \dots}{(a_2 - a_1)(a_2 - a_3) \dots (a_2 - a_r)(a_2 \pm b)^p a_2^n},$$

$$D_3 = \frac{B_0 + B_1 a_3 + B_2 a_3^2 + \dots}{(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)(a_3 - a_4) \dots (a_3 - a_u)(a_3 \pm b)^p a_3^n},$$

. . . .

Kommt das Binomium $(x + b)^p$ in Betrachtung, so kann auch eines der Elemente a_1, a_2, ... a_r so grofs als b sein.

Für die Function

$$\frac{fx}{f(x - a_r) f(x + h_\nu)(x \pm b)^p . x^n}$$

ist

34. $$D_1 = \frac{B_0 + B_1 a_1 + B_2 a_1^2 + \ldots\ldots}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots\ldots(a_1-a_r)(a_1+h_1)(a_1+h_2)\ldots\ldots(a_1+h_\nu)(a_1 \pm b)^p a_1^n},$$

$$D_2 = \frac{B_0 + B_1 a_2 + B_2 a_2^2 + \ldots\ldots}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)\ldots\ldots(a_2-a_r)(a_2+h_1)(a_2+h_2)\ldots\ldots(a_2+h_\nu)(a_2 \pm b)^p a_2^n}.$$

. . . .

$$H_1 = (-)^{n+r} \frac{B_0 - B_1 h_1 + B_2 h_1^2 - \ldots\ldots}{(h_1+a_1)(h_1+a_2)\ldots\ldots(h_\nu+a_r)(-h_1+h_2)(-h_1+h_3)\ldots\ldots(-h_1+h_\nu)(-h_1 \pm b)^p h_1^n},$$

$$H_2 = (-)^{n+r} \frac{B_0 - B_1 h_2 + B_2 h_2^2 - \ldots\ldots}{(h_2+a_1)(h_2+a_2)\ldots\ldots(h_\nu+a_r)(-h_2+h_1)(-h_2+h_3)\ldots\ldots(-h_2+h_\nu)(-h_2 \pm b)^p h_2^n},$$

$$H_3 = (-)^{n+r} \frac{B_0 - B_1 h_3 + B_2 h_3^2 - \ldots\ldots}{(h_3+a_1)(h_3+a_2)\ldots(h_\nu+a_r)(-h_3+h_1)(-h_3+h_2)(-h_3+h_4)\ldots(-h_3+h_\nu)(-h_3 \pm b)^p h_3^n},$$

. . . .

Für die Function

$$\frac{fx}{f(x+a_\nu)(x-b)^p x^n)}$$

ist

35. $$D_1 = (-)^{r+p+n-1} \frac{B_0 - B_1 a_1 + B_1 a_1^2 - \ldots\ldots}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots\ldots(a_1-a_r)(a_1+b)^p a_1^n},$$

$$D_2 = (-)^{r+p+n-1} \frac{B_0 - B_1 a_2 + B_2 a_2^2 - \ldots\ldots}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)\ldots\ldots(a_2-a_r)(a_2+b)^p a_1^n},$$

$$D_3 = (-)^{r+p+n-1} \frac{B_0 - B_1 a_3 + B_2 a_3^2 - \ldots\ldots}{(a_4-a_1)(a_3-a_2)(a_3-a_4)\ldots\ldots(a_3-a_r)(a_3+b)^p a_3^n},$$

. . . .

u. s. w. Die Zahl dieser Fälle läſst sich nach Willkür ausdehnen.

Soll die Function

$$\frac{1+x}{(x^3-6x^2+11x-6)x^2}$$

in Partialbrüche zerlegt werden, so ist

$$\frac{1+x}{(x^3-6x^2+11x-6)x^2} = \frac{1+x}{(x-1)(x-2)(x-3)x^2},$$

und es ist in (32.) $B_0 = 1$, $B_1 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $n = 2$ zu setzen. Dies giebt

$$D_1 = \frac{1+1}{(1-2)(1-3).1^2} = \frac{2}{1.2} = 1,$$

$$D_2 = \frac{1+1.2}{(2-1)(2-3).2^2} = -\frac{3}{1.1.4} = -\tfrac{3}{4},$$

$$D_3 = \frac{1+1.3}{(3-1)(3-2).3^2} = \frac{4}{2.9} = \tfrac{2}{9}.$$

Hiernach sind die Coefficienten der Brüche in Beziehung auf die Function $f(x-a_r)$:

$$\frac{1+x}{(x^3-6x^2+11x-6)x^2} = \frac{1}{x-1} - \frac{3}{4(x-2)} + \frac{2}{9(x-3)} + (\psi N).$$

Soll die Function

$$\frac{1+2x}{(x^3+6x^2+11x+6)x^2}=\frac{1+2x}{(x+1)(x+2)(x+3)x^2}$$

in Partialbrüche zerlegt werden, so ist aus (35.), wenn $r=3$, $p=0$, $n=2$, $B_1=1$, $B_2=2$, $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=3$ gesetzt wird:

$$D_1=(-)^4\frac{1-2.1}{(1-2)(1-3).1^2}=-\tfrac{1}{2},$$

$$D_2=(-)^4\frac{1-2.2}{(2-1)(2-3).2^2}=+\tfrac{3}{4},$$

$$D_3=(-)^4\frac{1-2.3}{(3-1)(3-2).3^2}=-\tfrac{5}{18},$$

und es ist

$$\frac{1+2x}{(x^3+6x^2+11x+6)x^2}=-\frac{1}{2(x+1)}+\frac{3}{4(x+2)}+\frac{5}{18(x+3)}+(\psi N)$$

u. s. w. Der begleitende Ausdruck (ψN) bezeichnet die noch übrigen Brüche, deren Coefficienten in dem allgemeinen Schema durch $A_0, A_1, \ldots.$ angedeutet sind. Ihre Berechnung soll nun gezeigt werden.

IV.

Um die Werthe der Coefficienten A_0, A_1, A_2, ... A_{n-1} in dem allgemeinen Schema 2. zu bestimmen, gehen wir von der Untersuchung des einfachen Falles

$$\frac{fx}{f(x-a_r)\,x^n}$$

aus. Setzen wir nämlich nach (2.)

$$\frac{fx}{f(x-a_r)x^n}=\frac{A_0}{x^n}+\frac{A_1}{x^{n-1}}+\frac{A_2}{x^{n-2}}+\ldots.+\frac{A_{n-1}}{x}+\frac{D_1}{x-a_1}+\frac{D_2}{x-a_2}+\ldots.+\frac{D_r}{x-a_r},$$

so wird durch Vervielfachen mit dem Nenner:

$$36.\quad fx=[A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\ldots.+A_{n-1}]f(x-a_r)$$
$$+\left[\frac{D_1f(x-a_r)}{x-a_1}+\frac{D_2f(x-a_r)}{x-a_2}+\ldots.+\frac{D_rf(x-a_r)}{x-a_r}\right]x^n.$$

Werden die in diesem Ausdruck angedeuteten Entwickelungen wirklich ausgeführt, so kommen in der ersten Reihe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens alle Potenzen der Gröſse x, die zwischen 0 und $r+n-1$ liegen, vor. In der zweiten Horizontalreihe werden sie auf die Grenzen von n bis $r+n-1$ beschränkt sein. Hieraus folgt, daſs die Potenzen von x^0 bis x^{n-1}, welche aus dieser Entwickelung entsprungen, ausschlieſslich die Vorzahlen A_0, A_1, A_2, ... A_{n-1} führen müssen.

Hält man diese Bemerkung fest und macht die nöthigen Entwickelungen für die erste Horizontalreihe, so kann man allein hierdurch die Werthe der

Vorzahlen A_0, A_1, A_2, ... bestimmen; denn man hat zu diesem Ende nur die Vorzahlen, welche zu einerlei Potenz von x in dieser Entwickelung und in der Reihe, welche durch fx angedeutet wird, gehören, gleich zu setzen und dann die Werthe von A_0, A_1, A_2, ... auf ganz elementare Weise abzuleiten.

Nun ist bekanntlich

$$f(x-a_r) = (x-a_1)(x-a_2) \ldots (x-a_r)$$
$$= x^r - C^1 x^{r-1} + C^2 x^{r-2} - C^3 x^{r-3} + \ldots (-)^r C^r$$
$$(a_1, \; a_2, \; a_3, \; a_4, \; \ldots \; a_r).$$

Wird dieser Ausdruck in (36.) eingeführt, vervielfacht und das Resultat nach den steigenden Potenzen von x geordnet, so ergiebt sich folgende vergleichende Zusammenstellung:

$$37. \quad B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + B_3 x^3 + \ldots + B_{n-1} x^{n-1}$$
$$= (-)^r [C^r A_0 + C^r A_1 x + C^r A_2 x^2 + C^r A_3 x^3 + \ldots + C^r A_{n-1} x^{n-1}]$$
$$(-)^{r-1} [C^{r-1} A_0 x + C^{r-1} A_1 x^2 + C^{r-1} A_2 x^3 + \ldots + C^{r-1} A_{n-2} x^{n-1}]$$
$$(-)^{r-2} [C^{r-2} A_0 x^2 + C^{r-2} A\, x^3 + \ldots + C^{r-2} A_{n-3} x^{n-1}]$$
$$(-)^{r-3} [C^{r-3} A_0 x^3 + \ldots + C^{r-3} A_{n-4} x^{n-1}]$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(-)^{r-n+2} C^{r-n+1} A_0 x^{n-1}$$
$$(a_1, \; a_2, \; a_3, \; a_4, \; \ldots \; a_r).$$

Hieraus ergeben sich folgende Gleichungen zwischen den Vorzahlen:

$$B_0 = (-)^r C^r A_0,$$
$$B_1 = (-)^r (C^r A_1 - C^{r-1} A_0),$$
$$B_2 = (-)^r [C^r A_2 - C^{r-1} A_1 + C^{r-2} A_0],$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$B_k = (-)^r [C^r A_k - C^{r-1} A_{k-1} + C^{r-2} A_{k-2} - \ldots (-)^k C^{r-k} A_0],$$

welche auf ganz einfachem Wege zu folgender Zusammenstellung führen:

$$38. \quad A_0 = (-)^r \frac{B_0}{C^r},$$
$$A_1 = (-)^r \frac{B_1}{C^r} + \frac{C^{r-1} A_0}{C^r},$$
$$A_2 = (-)^r \frac{B_2}{C^r} + \frac{C^{r-1} A_1}{C^r} - \frac{C^{r-2} A_0}{C^r},$$
$$A_3 = (-)^r \frac{B_3}{C^r} + \frac{C^{r-1} A_2}{C^r} - \frac{C^{r-2} A_1}{C^r} + \frac{C^{r-3} A_0}{C^r},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_k = (-)^r \frac{B_k}{C^r} + \frac{C^{r-1} A_{k-1}}{C^r} - \frac{C^{r-2} A_{k-2}}{C^r} + \frac{C^{r-3} A_{k-3}}{C^r} - \ldots (-)^{k-1} \frac{C^{r-k} A_0}{C^r},$$
$$(a_1, \; a_2, \; a_3, \; a_4, \; \ldots \; a_r).$$

Diese Bildungsweise ist zurücklaufend. Sie läfst sich in folgende einfachere Formel umformen, wenn man den Hülfsatz

$$39. \quad \frac{C(a_1, a_2, \ldots. a_r)^{r-k}}{C(a_1, a_2, \ldots. a_r)^r} = C\left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots. \frac{1}{a_r}\right)^k,$$

der sich leicht rechtfertigen läfst, zu Hülfe nimmt. Hieraus wird

$$\begin{aligned}
40. \quad A_0 &= (-)^r C^r B_0, \\
A_1 &= (-)^r C^r B_1 + C^1 A_0, \\
A_2 &= (-)^r C^r B_2 + C^1 A_1 - C^1 A_0, \\
A_3 &= (-)^r C^r B_3 + C^1 A_2 - C^2 A_1 + C^3 A_0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
A_k &= (-)^r C^r B_k + C^1 A_{k-1} - C^2 A_{k-2} + C^3 A_{k-3} - \ldots.(-)^{k-1} C^k A_0, \\
&\left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \frac{1}{a_4}, \ldots. \frac{1}{a_r}\right).
\end{aligned}$$

Benutzt man diese zurücklaufende Bildungsweise, um eine unabhängige Art zu erhalten, so sind die Werthe für A_1, A_2, ..., so wie sie durch die frühern Gleichungen gefunden sind, in die spätern einzuführen. Es wird

$$A_1 = (-)^r C^r [B_1 + C^1 B_0] \quad \left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \ldots. \frac{1}{a_r}\right).$$

Wird der Werth von A_1 und A_0 in die dritte Gleichung eingeführt, so findet man

$$\begin{aligned}
A_2 &= (-)^r C^r \left(B_2 + C^1 B_1 + C^1 C^1 B_0 \atop \qquad - C^2 B_0\right\} \\
&= (-)^r C^r [B_2 + C'^1 B_1 + C'^2 B_0] \\
&\left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a_3}, \ldots. \frac{1}{a_r}\right),
\end{aligned}$$

wenn man Rücksicht auf die Gleichung (13.) nimmt. Eben so erhält man durch Einführung von A_0, A_1, A_2 in die dritte Gleichung von (40.)

$$\begin{aligned}
A_3 &= (-)^r C^r \left(\begin{matrix} B_3 + C^1 B_2 + C^1 C'^1 B_1 + C^1 C'^2 B_0 \\ - C^2 B_1 - C^2 C'^1 B_0 \\ + C^3 B_0 \end{matrix}\right\} \\
&= (-)^r C^r (B_3 + C'^1 B_3 + C'^2 B_1 + C'^3 B_0), \\
&\left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \ldots. \frac{1}{a_r}\right).
\end{aligned}$$

Führt man diese Substitutionen fort, so ergiebt sich folgende Zusammenstellung:

41. $$A_0 = (-)^r C^r B_0,$$
$$A_1 = (-)^r C^r (B_1 + C'^1 B_0),$$
$$A_2 = (-)^r C^r (B_2 + C'^1 B_1) + C'^2 B_0),$$
$$A_3 = (-)^r C^r (B_3 + C'^1 B_2 + C'^2 B_1 + C'^3 B_0),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_k = (-)^r C^r (B_k + C'^1 B_{k-1} + C'^2 B_{k-2} + C'^3 B_{k-3} + \ldots. + C'^k B_0),$$
$$\left(\frac{1}{a_1},\quad \frac{1}{a_2},\quad \frac{1}{a_3},\quad \ldots.\quad \frac{1}{a_r}\right).$$

Die Gleichungen (40. und 41.) lassen sich unmittelbar auf die Zerlegung der Function

$$\frac{fx}{(x-b)^p x^n}$$

anwenden, wenn die ungleichen Elemente einander gleich gesetzt werden, b an ihre Stelle tritt und r in p übergeht. Es sind alsdann die Potenzen statt Verbindungsgruppen und die Zahlen-Ausdrücke statt dieser einzuführen. Dann wird aus (40.)

42. $$A_0 = (-)^p \frac{B_0}{b^p}$$
$$A_1 = (-)^p \frac{B_1}{b^p} + p.\frac{A_0}{b},$$
$$A_2 = (-)^p \frac{B_2}{b^p} + \frac{pA_1}{b} - \frac{p(p-1)}{1.2}\frac{A_0}{b^2},$$
$$A_2 = (-)^p \frac{B_3}{b^r} + \frac{pA_2}{b} - \frac{p(p-1)}{1.2}\frac{A_1}{b^2} + \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}\frac{A_0}{b^3},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_k = (-)^p \frac{B_k}{b^p} + \frac{pA_{k-1}}{b} - \frac{p(p-1)}{1.2}\frac{A_{k-2}}{b^2} + \ldots.(-)^{k-1}\frac{p(p-1)\ldots.(p-k+1)}{1.2\ldots.k}.\frac{A_0}{b^k}.$$

Aus (41.) ergiebt sich

43. $$A_0 = (-)^p \frac{B_0}{b^p},$$
$$A_1 = (-)^p \frac{1}{b^p}\left(B_1 + \frac{p}{1}\frac{B_0}{b}\right),$$
$$A_2 = (-)^p \frac{1}{b^p}\left(B_2 + \left(\frac{p}{1}\right)^{1|1}\frac{B_1}{b} + \left(\frac{p}{1}\right)^{2|1}\frac{B_0}{b^2}\right),$$
$$A_3 = (-)^p \frac{1}{b^p}\left(B_3 + \frac{p}{1}\frac{B_2}{b} + \left(\frac{p}{1}\right)^{2|1}\frac{B_1}{b^2} + \left(\frac{p}{1}\right)^{3|1}\frac{B_0}{b^3}\right),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_k = (-)^p \frac{1}{b^p}\left(B_k + \frac{p}{1}\frac{B_{k-1}}{b} + \left(\frac{p}{1}\right)^{2|1}\frac{B_{k-2}}{b^2} + \ldots. + \left(\frac{p}{1}\right)^{k|1} B_0\right).$$

Hierin ist der Kürze wegen $\left(\frac{p}{1}\right)^{k|1} = \frac{p(p+1)(p+2)\ldots.(p+k-1)}{1.2.3\ldots.k}$ gesetzt.

Die Function

$$\frac{fx}{f(x+a_r)x^n}$$

wird sich nun gleichfalls ohne Schwierigkeit in Partialbrüche zerlegen lassen. Die Werthe für A_0, A_1, A_2, ... ergeben sich aus (40.) und (41.), wenn $-a_1$, $-a_2$, $-a_3$, ... $-a_r$ statt a_1, a_2, ... a_r gesetzt werden. Es entsteht alsdann

$$44.\quad A_k = C^r B_k - C^1 A_{k-1} - C^2 A_{k-2} - C^3 A_{k-3} - \ldots. - C^k A_0$$
$$\left(\frac{1}{a_1},\ \frac{1}{a_2},\ \frac{1}{a_3},\ \ldots\ldots\ldots\ \frac{1}{a_r}\right),$$

$$45.\quad A_k = C^r(B_k - C'^1 B_{k-1} + C'^2 B_{k-2} - C'^3 B_{k-3} - \ldots. (-)^k C'^k A_0)$$
$$\left(\frac{1}{a_1},\ \frac{1}{a_2},\ \frac{1}{a_3},\ \ldots\ldots\ldots\ \frac{1}{a_r}\right).$$

Eben so läfst sich die Function

$$\frac{fx}{f(a_r-x)x^n}$$

leicht in Partialbrüche zerlegen und es lassen sich die Werthe für A_0, A_1, A_2, ... bestimmen. Die Entwicklung wird leicht durch das Schema (37.) gefunden, wenn man bemerkt, dafs

$$f(a_r-x) = C^r - C^{r-1}x + C^{r-2}x^2 \ldots. (-)^r x^r$$
$$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ldots\ a_r)$$

ist, und dafs durch Einführung dieser Werthe die Horizontalreihen in (37.) abwechselnde Zeichen bekommen. Die hieraus hervorgehenden Gleichungen haben folgende Form:

$$46.\quad \begin{aligned} A_0 &= C^r B_0, \\ A_1 &= C^r B_1 + C^1 A_0, \\ A_2 &= C^r B_2 + C^1 A_1 - C^2 A_0, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ A_k &= C^r B_k + C^1 A_{k-1} - C^2 A_{k-2} \ldots. (-)^{k-1} C^k A_0, \\ &\left(\frac{1}{a_1},\ \frac{1}{a_2},\ \frac{1}{a_3},\ \ldots\ldots\ldots\ \frac{1}{a_r}\right). \end{aligned}$$

$$47.\quad \begin{aligned} A_0 &= C^r B_0, \\ A_1 &= C^r(B + C'^1 B_0), \\ A_2 &= C^r(B_2 + C'^1 B_1 + C'^2 B_0), \\ &\ldots\ldots\ldots \\ A_k &= C^r(B_k + C'^1 B_{k-1} + C'^2 B_{k-2} + \ldots. + C'^k B_0), \\ &\left(\frac{1}{a_1},\ \frac{1}{a_2},\ \frac{1}{a_3},\ \ldots\ldots\ldots\ \frac{1}{a_r}\right). \end{aligned}$$

Hierdurch sind auch die Werthe von A_0, A_1, A_2, ... für die Functionen

$$\frac{fx}{(x+b)^p x^n} \quad \text{und} \quad \frac{fx}{(d-x)^t x^n}$$

gegeben und es ist

48. $$A_k = \frac{B_k}{b^p} - p\frac{A_{k-1}}{b} - \frac{p(p-1)}{1.2}.\frac{A_{k-2}}{b^2} - \ldots - \frac{p(p-1)\ldots(p-k+1)}{1.2\ldots k}.\frac{A_0}{b^k},$$

49. $$A_k = \frac{1}{b^p}\left(B_k - p\frac{B_{k-1}}{b} + \left(\frac{p}{1}\right)^{2|1}\frac{B_{k-2}}{b^2} - \ldots (-)\left(\frac{p}{1}\right)^{k|1}\frac{B_0}{b^p}\right),$$

50. $$A_k = \frac{B_k}{d^t} + \frac{t}{1}.\frac{A_{k-1}}{d} - \frac{t(t-1)}{1.2}.\frac{A_{k-2}}{d^2} + \ldots (-)^{k-1}\frac{t(t-1)\ldots(t-k-1)}{1.2\ldots k}.\frac{A_0}{d^k},$$

51. $$A_k = \frac{1}{d^t}\left(B_k + \frac{t}{1}.\frac{B_{k-1}}{d} + \left(\frac{t}{1}\right)^{2|1}\frac{B_{k-2}}{d^2} + \ldots + \left(\frac{t}{1}\right)^{k|1}\frac{B_0}{d^k}\right).$$

Man erkennt leicht die Uebereinstimmung, welche unter den hier mitgetheilten Gleichungen herrscht.

Aus den bisher gefundenen Resultaten lassen sich die Werthe von A_0, A_1, A_2, ..., welche bei der Zerlegung der Function

$$\frac{fx}{f(x-a_h)(x-b)^p x^n}$$

in Partialbrüche nöthig werden, leicht ableiten. Von den in der Function $f(x-a_r)$ vorkommenden r verschiedenen Elementen werden p unter sich gleich zu setzen und an ihre Stelle wird b einzufügen sein. Die übrigen h Elemente sind, als verschieden, im Calcul beizubehalten. Durch dieses Gleichsetzen gehen in den Gleichungen (40.) und (41.) die Gruppen der Verbindungen in Potenzen mit den entsprechenden Zahlen-Ausdrücken über und die Gleichungen (22.) und (23.) kommen in Anwendung. Zur Bestimmung der Werthe von A_0, A_1, A_2, ... ergiebt sich folgende Zusammenstellung für die zurücklaufende und unabhängige Bildungsweise:

52. $$A_0 = (-)^{h+p}\frac{C^h B_0}{b^p},$$

$$A_1 = (-)^{h+p}\frac{C^h B_1}{b^p} + \left(C^1 + \frac{p}{b}\right)A_0,$$

$$A_1 = (-)^{h+p}\frac{C^h B_2}{b^p} + \left(C^1 + \frac{p}{b}\right)A_1 - \left(C^2 + \frac{p.C^1}{b} + \frac{p(p-1)}{1.2b^2}\right)A_0,$$

. . . .

$$A_k = (-)^{h+p}\frac{C^h B_k}{b^p} + \left(C^1 + \frac{p}{b}\right)A_{k-1} - \left(C^2 + \frac{p}{b}C^1 + \frac{p^{2,-1}}{1^{2|1}b^2}\right)A_{k-2} + \ldots$$

$$\ldots (-)^{k-1}\left(C^k + \frac{p}{1}.\frac{C^{k-1}}{b} + \frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}b^2}C^{k-2} \ldots + \frac{p^{k,-1}}{1^{k|1}}.\frac{1}{b^k}\right)A_0,$$

$$\left(\frac{1}{a_1}, \quad \frac{1}{a_2}, \quad \frac{1}{a_3}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{1}{a_h}\right).$$

53. $$A_0 = (-)^{h+p}\frac{C^h}{b^p}B_0,$$

$$A_1 = (-)^{h+p}\frac{C^h}{b^p}\left[B_1+\left(C'^1+\frac{p}{b}\right)B_0\right],$$

$$A_2 = (-)^{h+p}\frac{C^h}{b^p}\left[B_2+\left(C'^1+\frac{p}{b}\right)B_1+\left(C'^2+\frac{p}{b}C'^1+\left(\frac{p}{1}\right)^{2|1}\cdot\frac{1}{b^2}\right)B_0\right],$$

. . . .

$$A_k = (-)^{h+p}\frac{C^h}{b^p}\left[B_k+\left(C'^1+\frac{p}{b}\right)B_{k-1}+\left(C'^2+\frac{p}{b}C'^2+\left(\frac{p}{1}\right)^{2|1}\cdot\frac{1}{b^2}\right)B_{k-2}+\dots\right.$$
$$\left.\dots+\left(C'^k+\frac{p}{b}C'^{k-1}+\left(\frac{p}{1}\right)^{2|1}\frac{C'^{k-2}}{b^2}+\dots+\left(\frac{p}{1}\right)^{k|1}\cdot\frac{1}{b^k}\right]B_0,$$
$$\frac{1}{a_1},\quad \frac{1}{a_2},\quad \frac{1}{a_3},\quad \dots\dots\dots\dots \quad \frac{1}{a_h}.$$

Wird in diesen Formeln $-a_1$, $-a_2$, ... $-a_h$ und $-b$ statt a_1, a_2, ... a_r und b gesetzt, so ergiebt sich unmittelbar aus ihnen die Werthbestimmung für A_0, A_1, A_2, ... bei Zerlegung der Function

$$\frac{fx}{f(x+a_h)(x+b)^p x^n}$$

in Partialbrüche. Es wird dann aus (52.) und (53.)

54. $$A_k = \frac{C^h B_k}{b^p}-\left(C^1+\frac{p}{b}\right)A_{k-1}-\left(C^2+\frac{p}{b}C^1+\frac{p^{2|-1}}{p^{2|1}b^2}\right)A_{k-2}-\dots$$
$$\dots-\left(C^k+\frac{p}{b}C^{k-1}+\frac{p(p-1)}{1.2.b^2}C^{k-2}\dots\frac{p^{k|-1}}{1^{k|1}b^k}\right)A_0,$$

55. $$A_k = \frac{C^h}{b^p}\left[B_k-\left(C'^1+\frac{p}{b}\right)B_{k-1}+\left(C'^2+\frac{p}{b}C'^1+\left(\frac{p}{1}\right)^{2|1}\frac{1}{b^2}\right)B_{k-2}+\dots\right.$$
$$\left.\dots(-)^k\left(C'^k+\frac{p}{b}C'^{k-1}+\left(\frac{p}{b}\right)^{2|1}\frac{C'^{k-2}}{b^2}+\dots+\left(\frac{p}{1}\right)^{k|1}\frac{1}{b^k}\right)B_0\right],$$
$$\left(\frac{1}{a_1},\quad \frac{1}{a_2},\quad \frac{1}{a_3},\quad \dots\dots \quad \frac{1}{a_h}\right).$$

Aus (46.) und (47.) ergiebt sich für die Zerlegung der Function

$$\frac{fx}{f(a_h-x)(b-x)^p x^n}:$$

56. $$A_k = \frac{C^h B_k}{b^p}+\left(C^1+\frac{p}{b}\right)A_{k-1}-\left(C^2+\frac{p}{b}C^1+\frac{p(p-1)}{1.2.b^2}\right)A_{k-2}-\dots$$
$$\dots(-)^{k-1}\left(C^k+\frac{p}{b}C^{k-1}+\frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}}\cdot\frac{C^{k-2}}{b^2}+\dots+\frac{p^{k|-1}}{1^{k|1}}\frac{1}{b^k}\right)A_0,$$

57. $$A_k = \frac{C^h}{b^p}\left[B_k+\left(C'^1+\frac{p}{b}\right)B_{k-1}+\left(C'^2+\frac{p}{b}C'^1+\frac{p(p+1)}{1.2.b^2}\right)B_{k-2}+\dots\right.$$
$$\left.\dots+\left(C'^k+\frac{p}{b}C'^{k-1}+\left(\frac{p}{1}\right)^{2|1}\frac{C'^{k-2}}{b^2}+\dots+\left(\frac{p}{1}\right)^{k|1}\frac{1}{b^k}\right)B_0\right],$$
$$\left(\frac{1}{a_1},\quad \frac{1}{a_2},\quad \frac{1}{a_3},\quad \dots\dots\dots\dots \quad \frac{1}{a_h}\right).$$

Eben so leicht ergeben sich hieraus die Bestimmungen der Werthe für A_0, A_1, A_2, ... bei Zerlegung der Functionen

$$\frac{fx}{(x-a)^p(x-b)^q x^n},\quad \frac{fx}{(x+a)^p(x+b)^q x^n},\quad \frac{fx}{(a-x)^p(b-x)^q x^n}$$

in Partialbrüche, so wie für Functionen, welche einen anderen Zeichenwechsel haben. Wir übergehen sie jedoch und wenden uns zur Darstellung des allgemeinen Gesetzes, welches wir durch Verfolgung des angedeuteten Weges ganz leicht gewinnen werden. Soll nämlich die Function

$$\frac{fx}{f(x-a_m)(x-b)^p(x-c)^q x^n}$$

in Partialbrüche zerlegt, und sollen die Werthe für A_0, A_1, A_2, ... gefunden werden, so ist es nöthig, unter den h ungleichen Elementen q unter sich gleich zu setzen, an ihre Stelle c einzuführen, die übrigen m verschiedenen Elemente aber unverändert zu lassen. Wendet man diese Bemerkungen auf 52 — 57. an, so zerlegen sich die Gruppen der Verbindungen in Potenzen und Gruppen von Verbindungen nach den Gleichungen (22.) und (23.) und es ergiebt sich zur Werthbestimmung von A_0, A_1, A_2, ... bei Zerlegung der vorliegenden Function in Partialbrüche:

58. $$A_0 = (-)^{m+p+q}\frac{C^m B_0}{b^p c^q},$$

$$A_1 = (-)^{m+p+q}\frac{C^m B_1}{b^p c^q} + \left(C^1 + \frac{p}{b} + \frac{q}{c}\right)A_0,$$

$$A_2 = (-)^{m+p+q}\frac{C^m B_2}{b^p c^q} + \left(C^1 + \frac{p}{b} + \frac{q}{c}\right)A_1 - \left|\begin{array}{l} C^2 + C^1\left(\frac{p}{b} + \frac{q}{c}\right) \\ + \frac{p.q}{b.c} + \frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}b^2} + \frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}c^2}\end{array}\right| A_0,$$

$$A_3 = (-)^{m+p+q}\frac{C^m + B_2}{b^p c^q} + \left(C^1 + \frac{p}{b} + \frac{q}{c}\right)A_2 - \left|\begin{array}{l} C^2 + C^1\left(\frac{p}{b} + \frac{q}{c}\right) \\ + \frac{p.q}{b.c} + \frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}b^2} + \frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}c^2}\end{array}\right| A_1$$

$$+ \left|\begin{array}{l} C^3 + C^2\left(\frac{p}{b} + \frac{q}{c}\right) + C^1\left(\frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}b^2} + \frac{p.q}{b.c} + \frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}c^2}\right) \\ + \frac{p^{3|-1}}{1^{3|1}b^2} + \frac{p^{2|-1}.q}{1^{2|1}.b^2 c} + \frac{p.q^{2|-1}}{1^{2|1}b.c^2} + \frac{q^{3|1}}{1^{3|1}c^2}\end{array}\right| A_0,$$

. . . .

$$\left(\frac{1}{a_1},\quad \frac{1}{a_2},\quad \frac{1}{a_3},\quad \frac{1}{a_4},\quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{1}{a_m}\right).$$

Diese Formel dürfte hinreichen, um das ihr zu Grunde liegende Gesetz erkennen zu lassen. Es ist folgendes. Die Vorzahlen, welche den Buchstaben A_0, A_1, A_2, ... auf der rechten Seite des Gleichheits-



zeichens zugehören, sind die Verbindungen mit Wiederholungen zur 1sten, 2ten, 3ten, ... Classe. Die Elemente, woraus diese Verbindungen gebildet werden sollen, sind einerseits das Zeichen C mit den dadurch angedeuteten Operationen, andererseits $\frac{1}{b}$ und $\frac{1}{c}$. Tritt bei der Ausführung dieser Operationen das Zeichen C zwei, drei oder mehreremal mit einander in Verbindung, so deutet dies die Verbindungen ohne Wiederholungen zur 2ten, 3ten Classe u. s. w. an. Tritt $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$ einzeln oder in Verbindung unter sich und mit C auf, so deutet dies auf Potenzen von der sovielten Dimension, als die Wiederholung anzeigt. Mit $\frac{1}{b}$ tritt ferner eine fallende Bruchfacultät von p in der sovielten Dimension zusammen, als die zugehörige Potenz angiebt; mit $\frac{1}{c}$ aber eine fallende Bruchfacultät von q von der zugehörigen Dimension. So tritt z. B. mit $\frac{1}{b^3}$ die Facultät $\frac{p^{3|-1}}{1^{3|1}}$ als Factor in Verbindung, mit $\frac{1}{c^4}$ die Facultät $\frac{q^{4|-1}}{1^{4|1}}$, mit $\frac{1}{b^2.c^2}$ aber die Facultät $\frac{p^{2|-1}}{1^{2|1}}.\frac{q^{2|-1}}{1^{2|1}}$ u. s. w. Die Ausführung dieser Operationen soll allgemein durch das Zeichen

$$FC'\left(C,\ \frac{1}{b},\ \frac{1}{c}\right)^k$$

ausgedrückt werden, wobei das Zeichen F auf den Zutritt der Facultäten aufmerksam machen soll.

Wendet man nun diese Abkürzung an, so führt die obige Formel zu folgender, worin $m+p+q=s$ gesetzt ist:

59. $$A_0 = (-)^s \frac{C^m B_0}{b^p.c^q},$$

$$A_1 = (-)^s \frac{C^m B_1}{b^p.c^q} + FC'\left(C,\ \frac{1}{b},\ \frac{1}{c}\right)^1 A_0,$$

$$A_2 = (-)^s \frac{C^m B_2}{b^p.c^q} + FC'\left(C,\ \frac{1}{b},\ \frac{1}{c}\right)^1 A_1 - FC'\left(C,\ \frac{1}{b},\ \frac{1}{c}\right)^2 A_0,$$

$$A_3 = (-)^s \frac{C^m B_3}{b^p.c^q} + FC'\left(C,\ \frac{1}{b},\ \frac{1}{c}\right)^1 A_2 - FC'\left(C,\ \frac{1}{b},\ \frac{1}{c}\right)^2 A_1 + FC'\left(C,\ \frac{1}{b},\ \frac{1}{c}\right)^3 A_0,$$

. . . .

$$A_k = (-)^s \frac{C^m B_k}{b^p.c^q} + FC'\left(C,\ \frac{1}{b},\ \frac{1}{c}\right)^1 A_{k-1} - FC'\left(C,\ \frac{1}{b},\ \frac{1}{c}\right)^2 A_{k-2} \ldots\ldots \ldots (-)^{k-1} FC'\left(C,\ \frac{1}{b},\ \frac{1}{c}\right)^k A_0,$$

$$\left(\frac{1}{a_1},\ \frac{1}{a_2},\ \frac{1}{a_3},\ \frac{1}{a_4},\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ \frac{1}{a_k}\right).$$

Die Vergleichung dieser Zusammenstellung mit (58.) wird dazu dienen, das Gesagte zu verdeutlichen und die Operationen, welche hierin angedeutet sind, genau zu bezeichnen.

Wendet man dieselben Schlüsse auf die Darstellung (53.) an, so erhält man Gleichungen, welche die Werthe von A_0, A_1, A_2, ... durch eine unabhängige Bildungsweise bestimmen. Die Formel, welche sich hieraus ableitet, unterscheidet sich von der vorhergehenden nur dadurch, dafs mit den Potenzen von $\frac{1}{b}$ und $\frac{1}{c}$ die steigenden Bruchfacultäten von den zugehörigen Exponenten p und q in Verbindung treten und dafs das Zeichen C' auf Verbindungen mit Wiederholungen sich bezieht. Diese Abänderungen sollen durch das Zeichen

$$F C'\left(C', \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)^k$$

angedeutet werden. Hiernach findet sich für die unabhängige Bildungsweise der A folgendes Gesetz:

60. $$A_0 = (-)^s \frac{C^m B_0}{b^p c^q},$$

$$A_1 = (-)^s \frac{C^m}{b^p c^q}\left[B_1 + F'C'\left(C', \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)^1 B_0\right],$$

$$A_2 = (-)^s \frac{C^m}{b^p c^q}\left[B_2 + F'C'\left(C', \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)^1 B_1 + F'C'\left(C', \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right) B_0\right],$$

. . . .

$$A_k = (-)^s \frac{C^m}{b^p c^q}\left[B_k + F'C'\left(C', \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)^1 B_{k-1} + F'C'\left(C', \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)^2 B_{k-2} + \dots\right.$$
$$\left.\dots + F'C'\left(C', \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right) B_0\right].$$

Werden nun dieselben Schlüsse auf die Functionen

$$\frac{fx}{f(x+a_m)(x+b)^p(x+c)^q x^n} \text{ und } \frac{fx}{f(a_m-x)(b-x)^p(c-x)^q x^n}$$

angewendet, so finden sich leicht aus (54—57.) folgende Gleichungen:

61. $$A_k = \frac{C^m B_k}{b^p c^q} - FC'\left(C, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)^1 A_{k-1} - FC'\left(C, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)^2 A_{k-2} - \dots\dots$$
$$\dots\dots - FC'\left(C, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)^k A_0,$$

62. $$A_k = \frac{C^m}{b^p c^q}\left[B_k - F'C'\left(C', \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)^1 B_{k-1} + F'C'\left(C', \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)^2 B_{k-2} - \dots\right.$$
$$\left.\dots (-)^k F'C'\left(C', \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)^k B_0\right],$$



$$63.\quad A_k = \frac{C^m}{b^p c^q} B_k + FC'\left(C, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)^1 A_{k-1} - FC'\left(C, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)^2 A_{k-2} + \ldots \ldots (-)^{k-1} FC'\left(C, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)^k A_0,$$

$$64.\quad A_k = \frac{C^m}{b^p c^q}\left[B_k + FC'\left(C', \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)^1 B_{k-1} + FC'\left(C', \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)^2 B_{k-2} + \ldots \ldots + FC'\left(C', \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)^k B_0\right].$$

Aus dieser Zusammenstellung ist das allgemeine Gesetz, welches durch Verfolgung der hier vorgelegten Entwicklungsweise sich ergiebt, leicht zu erkennen. Es gelten danach für die Function

$$\frac{fx}{f(x-a_r)(x-b_1)^{p_1}(x-b_2)^{p_2}\ldots(x-b_s)^{p_s}x^n}$$

folgende Gleichungen, worin $m = r + p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_s$ ist:

$$65.\quad A_k = (-)^m \frac{C^r B_k}{b_1^{p_1} . b_2^{p_2} \ldots b_s^{p_s}} + FC'\left(C, \frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \frac{1}{b_3}, \ldots \frac{1}{b_s}\right)^1 A_{k-1}$$
$$- FC'\left(C, \frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \frac{1}{b_3}, \ldots \frac{1}{b_s}\right)^2 A_{k-2}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(-)^{k-1} FC'\left(C, \frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \frac{1}{b_3}, \ldots \frac{1}{b_s}\right)^k A_0,$$

$$66.\quad A_k = (-)^m \frac{C^r}{b_1^{p_1} . b_2^{p_2} \ldots b^{p_s}}\left[B_k + FC'\left(C', \frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \frac{1}{b_3}, \ldots \frac{1}{b_s}\right)^1 B_{k-1}\right.$$
$$+ FC'\left(C', \frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \frac{1}{b_3}, \ldots \frac{1}{b_s}\right)^2 B_{k-2}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\left. + FC'\left(C', \frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \frac{1}{b_3}, \ldots \frac{1}{b_s}\right)^k B_0\right],$$
$$\left(\frac{1}{a_1}, \quad \frac{1}{a_2}, \quad \frac{1}{a_3}, \quad \ldots \quad \frac{1}{a_r}\right).$$

Für die Function

$$\frac{fx}{f(x+a_r)(x+b_1)^{p_1}(x+b_2)^{p_2}\ldots(x+b_s)^{p_s}x^n}$$

ist

$$67.\quad A_k = \frac{C^r B_k}{b_1^{p_1} . b_2^{p_2} \ldots b_s^{p_s}} - FC'\left(C, \frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \ldots \frac{1}{b_s}\right)^1 A_{k-1}$$
$$- FC'\left(C, \frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \ldots \frac{1}{b_s}\right)^2 A_{k-2} - \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$- FC'\left(C, \frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \ldots \frac{1}{b_s}\right)^k A_0,$$

$$68.\quad A_k = \frac{C^r}{b_1^{p_1} \cdot b_2^{p_2} \ldots\ldots b_s^{p_s}}\Big[B_k - F'C'\Big(C', \frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \ldots\ldots \frac{1}{b_s}\Big)^1 B_{k-1}$$
$$+ F'C'\Big(C', \frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \ldots\ldots \frac{1}{b_s}\Big)^2 B_{k-2}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(-)^k F'C'\Big(C', \frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \ldots\ldots \frac{1}{b_s}\Big)^k B_0\Big],$$
$$\Big(\frac{1}{a_1}, \quad \frac{1}{a_2}, \quad \frac{1}{a_3}, \quad \ldots\ldots \quad \frac{1}{a_r}\Big).$$

Für die Function

$$\frac{fx}{f(a_r - x)(x-b_1)^{p_1}(x-b_2)^{p_2} \ldots\ldots (x-b_s)^{p_s} x^n}$$

ist

$$69.\quad A_k = \frac{C^r B_k}{b_1^{p_1} b_2^{p_2} \ldots\ldots b_s^{p_s}} + FC'\Big(C, \frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \ldots\ldots \frac{1}{b_s}\Big)^1 A_{k-1}$$
$$- FC'\Big(C, \frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \ldots\ldots \frac{1}{b_s}\Big)^2 A_{k-2}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(-)^{k-1} FC'\Big(C, \frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \ldots\ldots \frac{1}{b_s}\Big)^k A_0,$$

$$70.\quad A_k = \frac{C^r}{b_1^{p_1} b_2^{p_2} \ldots\ldots b_s^{p_s}}\Big[B_k + F'C'\Big(C', \frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \ldots\ldots \frac{1}{b_s}\Big)^1 B_{k-1}$$
$$+ F'C'\Big(C', \frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \ldots\ldots \frac{1}{b_s}\Big)^2 B_{k-2}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ F'C'\Big(C', \frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \ldots\ldots \frac{1}{b_s}\Big)^k B_0\Big],$$
$$\Big(\frac{1}{a_1}, \quad \frac{1}{a_2}, \quad \frac{1}{a_3}, \quad \ldots\ldots \quad \frac{1}{a_r}\Big).$$

Für jeden andern Zeichenwechsel ist aus (65—68.) das Gesetz leicht abzuleiten.

Kommt der Factor $f(x \pm a_r)$ oder $f(a_r - x)$ nicht in der zu zerlegenden Function vor, so fallen alle sich hierauf beziehenden Operationen weg und die Darstellung vereinfacht sich. So wird aus (65.) und (66.) für die Function

$$\frac{fx}{(x-b_1)^{p_1}(x-b_2)^{p_2} \ldots\ldots (x-b_s)^{p_s} x^n}:$$

$$71.\quad A_k = (-)^n \frac{B_k}{b_1^{p_1} b_2^{p_2} \ldots b_s^{p_s}} + FC'^1 A_{k-1} - FC'^2 A_{k-2} + FC'^3 A_{k-3} \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots (-)^{k-1} FC'^k A_0,$$

$$72.\quad A_k = (-)^m \frac{1}{b_1^{p_1} b_2^{p_2} \dots b_s^{p_s}} [B_k + F'C'^1 B_{k-1} + F'C'^2 B_{k-2} + \dots \\ \dots + F'C'^k B_0],$$
$$\left(\frac{1}{b_1},\quad \frac{1}{b_2},\quad \frac{1}{b_3},\quad \dots\quad \frac{1}{b_s}\right),$$

u. s. w.

Um nun die Entwicklung der Werthe von A_0, A_1, A_2, ... für die ganz allgemeine Form der Function Nro. 1. zu erhalten, legen wir folgende einfache Form zum Grunde:

$$\frac{fx}{f(x+a_r)(c_q-x)x^n}.$$

Es sei dem Frühern zufolge

$$\frac{fx}{f(x+a_r)f(c_q-x)x^n} = \frac{A_0}{x^n} + \frac{A_1}{x^{n-1}} + \frac{A_2}{x^{n-2}} + \dots + \frac{A_{n-1}}{x} + \varphi M,$$

so ist

$$73.\quad fx = (A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots A_{n-1} x^{n-1}) f(x+a_r) f(c_q - x) + x^n (\varphi M_1).$$

Die Entwicklung von $f(x+a_r) f(c_q - x)$ giebt

$$f(x+a_r)f(c_q-x) = C^r C^q + \left.\begin{array}{l} C^{r-1} C^q \\ -C^r\ C^{q-1} \end{array}\right| x + \left.\begin{array}{l} C^{r-2} C^q \\ -C^{r-1} C^{q-1} \\ +C^r\ C^{q-2} \end{array}\right| x^2 + \left.\begin{array}{l} C^{r-3} C^q \\ -C^{r-2} C^{q-1} \\ +C^{r-1} C^{q-2} \\ -C^r\ C^{q-3} \end{array}\right| x^3 + \dots$$

$$(a_1, a_2, a_3, \dots a_r),\quad (c_1, c_2, c_3, \dots c_q).$$

In dieser Entwicklung beziehen sich die Elemente a_1, a_2, a_3, ... a_r auf C^r, C^{r-1}, ... die Elemente c_1, c_2, c_3, ... c_q auf C^q, C^{q-1}, ... Um den Zusammenhang zwischen den Verbindungsclassen und den zugehörigen Elementen anzuzeigen, soll künftig unten an das Verbindungszeichen der bezügliche Buchstabe angehängt werden. Wird die eben gefundene Entwicklung mit der Reihe $A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots$ nach Angabe der Gleichung (73.) vervielfacht, und werden die Vorzahlen gleicher Potenzen von x gleichgesetzt, so erhalten wir folgende Vergleichungen:

$$B_0 = C_a^r C_c^q A_0,$$
$$B_1 = C_a^r C_c^q A_1 + A_0 \left|\begin{array}{l} C_a^{r-1} C_c^q \\ -C_a^r\ C_c^q, \end{array}\right.$$
$$B_2 = C_a^r C_c^q A_2 + A_1 \left|\begin{array}{l} C_a^{r-1} C_c^q \\ -C^r\ C^{q-1} \end{array}\right. + A_0 \left|\begin{array}{l} C_a^{r-2} C_c^q \\ -C_a^{r-1} C_c^{q-1} \\ +C_a^r\ C_c^{q-2}, \end{array}\right.$$

$$(a_1, a_2, a_3, \dots a_r),\quad (c_1, c_2, c_3, \dots c_q),$$

u. s. w. Werden diese Vergleichungen benutzt, um die Werthe von A_0, A_1, A_2, ... zu bestimmen, so ergeben sich, unter Beiziehung der schon bekannten Sätze, folgende Gleichungen:

$$74.\quad \begin{aligned} A_0 &= C_a^r C_c^q B_0, \\ A_1 &= C_a^r C_c^q B_1 - A_0(C_a^1 - C_c^1), \\ A_2 &= C_a^r C_c^q B_2 - A_1(C_a^1 - C_c^1) - A_0(C_a^2 - C_a^2 C_c^1 + C_c^2), \\ A_3 &= C_a^r C_c^q B_3 - A_2(C_a^1 - C_c^1) - A_1(C_a^2 - C_a^1 C_c^1 + C_c^2) \\ &\qquad - A_0(C_a^3 - C_a^2 C_c^1 + C_a^1 C_c^2 - C_c^3), \\ &\ldots \\ A_k &= C_a^r C_c^q B_k - A_{n-1}(C_a^1 - C_c^1) - A_{k-2}(C_a^2 - C_a^1 C_c^1 + C_c^2) - \ldots \\ &\qquad \ldots - A_0(C_a^k - C_a^{k-1} C_c + C_a^{k-2} C_c^2 - \ldots (-)^k C_a^0 C_c^k), \\ &\left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \ldots \frac{1}{a_r}\right), \quad \left(\frac{1}{c_1}, \frac{1}{c_2}, \frac{1}{c_3}, \ldots \frac{1}{c_q}\right). \end{aligned}$$

Die unabhängige Bildungsweise unterliegt folgendem Gesetze:

$$75.\quad \begin{aligned} A_0 &= C_a^r C_c^q B_0, \\ A_1 &= C_a^r C_c^q [B_1 - B_0(C_a'^1 - C_c'^1)], \\ A_2 &= C_a^r C_c^q [B_2 - B_1(C_a'^1 - C_c'^1) + B_0(C_a'^2 - C_a'^1 C_c'^1 + C_c'^2)], \\ &\ldots \\ A_k &= C_a^r C_c^q [B_k - B_{k-1}(C_a'^1 - C_c'^1) + \ldots \\ &\qquad \ldots (-) B_0(C_a'^k - C_a'^{k-1} C_c'^1 + \ldots (-)^k C_a'^k C_c'^k)], \\ &\left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots \frac{1}{a_r}\right), \quad \left(\frac{1}{c_1}, \frac{1}{c_2}, \ldots \frac{1}{c_q}\right). \end{aligned}$$

Diese Gleichungen dienen zu weitern Ableitungen. Nimmt man die schon bekannten Sätze zu Hülfe und hält die oben angegebene Entwicklungsweise fest, so ergeben sich die Werthe von A_0, A_1, A_2, ... bei Zerlegung der Function

$$\frac{fx}{f(x-a_m)(x+b)^p f(c_c-x)(d-x)^q x^n}$$

durch folgende Gleichungen:

$$76.\quad \begin{aligned} A_k = \frac{C_a^m C_c^q}{b^p d^q} B_n &- FC'\left(C_a, \frac{1}{b}, -C_c, -\frac{1}{d}\right)^1 A_{k-1} \\ &- FC'\left(C_a, \frac{1}{b}, -C_c, -\frac{1}{d}\right)^2 A_{k-2} \\ &\ldots \\ &- FC'\left(C_a, \frac{1}{b}, -C_c, -\frac{1}{d}\right)^k A_0, \end{aligned}$$

$$77.\quad A_k = \frac{C_a^m C_c^q}{b^p d^q}\Big[B_k - F'C'\Big(C'_a, \frac{1}{b}, -C'_c, -\frac{1}{d}\Big)^1 B_{k-1}$$
$$+ F'C'\Big(C'_a, \frac{1}{b}, -C'_c, -\frac{1}{d}\Big)^2 B_{k-2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(-)^k F'C'\Big(C'_a, \frac{1}{b}, -C'_c, -\frac{1}{d}\Big)^k B_0\Big],$$
$$\Big(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots \frac{1}{a_m}\Big), \Big(\frac{1}{c_1}, \frac{1}{c_2}, \ldots \frac{1}{c_t}\Big).$$

Das allgemeine Gesetz, welches zur Werthbestimmung von $A_0, A_1, A_2, \ldots$ führt, läfst sich nun leicht hieraus erkennen. Es wird für die Function

$$\frac{fx}{f(x+a_r)(x+b_1)^{p_1}\ldots(x+b_s)^{p_s}f(c_q-x)(d_1-x)^{t_1}\ldots(d_u-x)^{t_u}x^n}$$

durch nachstehende Gleichungen dargestellt:

$$78.\quad A_k = \frac{C_a^r C_c^q B_k}{b_1^{p_1}\ldots b_s^{p_s}\, d_1^{t_1}\ldots d_u^{t_u}}$$
$$-FC'\Big(C_a, \frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \ldots \frac{1}{b_s}, -C_c, -\frac{1}{d_1}, -\frac{1}{d_2}, \ldots -\frac{1}{d_u}\Big)^1 A_{k-1}$$
$$-FC'\Big(C_a, \frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \ldots \frac{1}{b_s}, -C_c, -\frac{1}{d_1}, -\frac{1}{d_2}, \ldots -\frac{1}{d_u}\Big)^2 A_{k-2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$-FC'\Big(C_a, \frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \ldots \frac{1}{b_s}, -C_c, -\frac{1}{d_1}, -\frac{1}{d_2}, \ldots -\frac{1}{d_u}\Big)^k A_0,$$

$$79.\quad A_k = \frac{C_a^r C_c^q}{b_1^{p_1}\ldots b_s^{p_s}\, d_1^{t_1}\ldots d_u^{t_u}}\Big[B_k$$
$$-F'C'\Big(C'_a, \frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \ldots \frac{1}{b_s}, -C'_c, -\frac{1}{d_1}, -\frac{1}{d_2}, \ldots -\frac{1}{d_u}\Big)^1 B_{k-1}$$
$$+F'C'\Big(C'_a, \frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \ldots \frac{1}{b_s}, -C'_c, -\frac{1}{d_1}, -\frac{1}{d_2}, \ldots -\frac{1}{d_u}\Big)^2 B_{k-2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(-)^k F'C'\Big(C'_a, \frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \ldots \frac{1}{b_s}, -C'_c, -\frac{1}{d_1}, -\frac{1}{d_2}, \ldots -\frac{1}{d_u}\Big)^k B_0\Big],$$
$$\Big(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \ldots \frac{1}{a_r}\Big), \quad \Big(\frac{1}{c_1}, \frac{1}{c_2}, \frac{1}{c_3}, \ldots \frac{1}{c_q}\Big).$$

Für die Zerlegung der Function

$$\frac{fx}{f(x-a_r)\,\varphi(x-b_s)^{p_s}f(c_q-x)\,\varphi(d_u-x)^{t_u}x^n}$$

wird gelten, wenn die entsprechenden Gröfsen mit entgegengesetzten Zeichen eingeführt werden und $m = r+p_1+p_2+p_3+\ldots+p_s$ gesetzt wird:

$$80.\quad A_k = (-)^m \frac{C_a^r C_c^q . B_k}{b_1^{p_1} \ldots . b_s^{p_s} d_1^{t_1} \ldots . d_u^{t_u}}$$
$$+ FC'\left(C_a, \frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \ldots . \frac{1}{b_s}, C_c, \frac{1}{d_1}, \frac{1}{d_2}, \ldots . \frac{1}{d_u}\right)^1 A_{k-1}$$
$$- FC'\left(C_a, \frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \ldots . \frac{1}{b_s}, C_c, \frac{1}{d_1}, \frac{1}{d_2}, \ldots . \frac{1}{d_u}\right)^2 A_{k-2}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(-)^{k-1} FC'\left(C_a, \frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \ldots . \frac{1}{b_s}, C_c, \frac{1}{d_1}, \frac{1}{d_2}, \ldots . \frac{1}{d_u}\right)^k A_0,$$

$$81.\quad A_k = (-)^m \frac{C_a^r C_c^q}{b_1^{p_1} \ldots . b_s^{p_s} d_1^{t_1} \ldots . d_u^{t_u}} \Big[B_k$$
$$+ F'C'\left(C'_a, \frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \ldots . \frac{1}{b_s}, C'_c, \frac{1}{d_1}, \frac{1}{d_2}, \ldots . \frac{1}{d_u}\right)^1 B_{k-1}$$
$$+ F'C'\left(C'_a, \frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \ldots . \frac{1}{b_s}, C'_c, \frac{1}{d_1}, \frac{1}{d_2}, \ldots . \frac{1}{d_u}\right)^2 B_{k-2}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ F'C'\left(C'_a, \frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \ldots . \frac{1}{b_s}, C'_c, \frac{1}{d_1}, \frac{1}{d_2}, \ldots . \frac{1}{d_u}\right)^k B_0\Big],$$
$$\left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots . \frac{1}{a_r}\right), \quad \left(\frac{1}{c_1}, \frac{1}{c_2}, \frac{1}{c_3}, \ldots . \frac{1}{c_q}\right).$$

Aus diesen allgemeinen Gleichungen ergeben sich leicht alle besonderen Fälle für jeden Zeichenwechsel und jede Gestalt des Nenners der allgemeinen Function, die der Anwendung zugehören und die wir den Zwecken des Lesers überlassen müssen. Wir heben jedoch einige besondere Fälle hervor, um die Brauchbarkeit der gefundenen Formeln zu zeigen.

Besondere Fälle.

Indem wir auf die früher schon entwickelten speciellen Fälle von Nro. 40. an zurückweisen, machen wir von den hier gefundenen Resultaten eine Anwendung auf eine Function, deren Nenner aus drei Factoren besteht, und berücksichtigen die verschiedenen Formen, welche derselbe haben kann. Wir geben hiebei die entwickelte Darstellung für die Werthe von A_0, A_1.

Für die besondere Form der Function

$$82.\quad \frac{fx}{(x-a)^p (x-b)^q x^n}$$

ist

$$A_0 = (-)^{p+q} \cdot \frac{B_0}{a^p \cdot b^q},$$

$$A_1 = (-)^{p+q} \cdot \frac{B_1}{a^p \cdot b^q} + \left(\frac{p}{a} + \frac{q}{b}\right) A_0,$$

$$A_2 = (-)^{p+q} \cdot \frac{B_2}{a^p \cdot b^q} + \left(\frac{p}{a} + \frac{q}{b}\right) A_1 - \left(\frac{p(p-1)}{1.2.a^2} + \frac{p.q}{a.b} + \frac{q(q-1)}{1.2.b^2}\right) A_0,$$

$$A_3 = (-)^{p+q} \cdot \frac{B_3}{a^p \cdot b^q} + \left(\frac{p}{a} + \frac{q}{b}\right) A_2 - \left(\frac{p(p-1)}{1.2} + \frac{p.q}{a.b} + \frac{q(q-1)}{1.2.b^2}\right) A_1$$
$$+ \left(\frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3.a^3} + \frac{p(p-1).q}{1.2.a^2.b} + \frac{p.q(q-1)}{1.2.a.b^2}\right.$$
$$\left. + \frac{q(q-1)(q-2)}{1.2.3.b^3}\right) A_0,$$

. . . .

oder

$$A_1 = (-)^{p+q} \cdot \frac{1}{a^p \cdot b^q}\left[B_1 + \left(\frac{p}{a} + \frac{q}{b}\right) B_0\right],$$

$$A_2 = (-)^{p+q} \cdot \frac{1}{a^p \cdot b^q}\left[B_2 + \left(\frac{p}{a} + \frac{q}{b}\right) B_1 + \left(\frac{p(p+1)}{1.2.a^2} + \frac{p.q}{a.b} + \frac{q(q+1)}{1.2.b^2}\right) B_0\right],$$

. . . .

Für die Form der Function

$$83. \qquad \frac{fx}{(x+a)^p (x+b)^q x^n}$$

ist

$$A_0 = \frac{B_0}{a^p \cdot b^q},$$

$$A_1 = \frac{B_1}{a^p \cdot b^q} - \left(\frac{p}{a} + \frac{q}{b}\right) A_0,$$

$$A_2 = \frac{B_2}{a^p \cdot b^q} - \left(\frac{p}{a} + \frac{q}{b}\right) A_1 - \left(\frac{p(p-1)}{1.2.a^2} + \frac{p.q}{a.b} + \frac{q(q-1)}{1.2.b^2}\right) A_0,$$

$$A_3 = \frac{B_3}{a^p \cdot b^q} - \left(\frac{p}{a} + \frac{q}{b}\right) A - \left(\frac{p^{2|-1}}{1^{2|1} a^2} + \frac{p.q}{a.b} + \frac{q^{2|-1}}{1^{2|1} b^2}\right) A_1$$
$$- \left(\frac{p^{3|-1}}{1^{3|1} a^3} + \frac{p^{2|1} q}{1^{2|1} a^2 b} + \frac{p.q^{2|-1}}{1^{2|1} a b^2} + \frac{q^{3|-1}}{1^{3|1} b^3}\right) A_0,$$

oder

$$A_1 = \frac{1}{a^p \cdot b^q}\left[B_1 - \left(\frac{p}{a} + \frac{q}{b}\right) B_0\right],$$

$$A_2 = \frac{1}{a^p \cdot b^q}\left[B_2 - \left(\frac{p}{a} + \frac{q}{b}\right) B_1 + \left(\frac{p(p+1)}{1.2.a^2} + \frac{p.q}{a.b} + \frac{q(q+1)}{1.2.b^2}\right) B_0\right],$$

. . . .

Für die Form der Function

$$84.\quad \frac{fx}{(x+a)^p(x-b)^q x^n}$$

ist

$$A_0 = (-)^q \frac{B_0}{a^p b^q},$$

$$A_1 = (-)^q \frac{B_1}{a^p b^q} - \left(\frac{p}{a} - \frac{q}{b}\right) A_0,$$

$$A_2 = (-)^q \frac{B_2}{a^p b^q} - \left(\frac{p}{a} - \frac{q}{b}\right) A_1 - \left(\frac{p(p-1)}{1.2.a^2} - \frac{p.q}{a.b} + \frac{q(q-1)}{1.2.b^2}\right) A_0,$$

. . . .

oder

$$A_1 = (-)^q \frac{1}{a^p b^q}\left[B_1 - \left(\frac{p}{a} - \frac{q}{b}\right) B_0\right],$$

$$A_2 = (-)^q \frac{1}{a^p b^q}\left[B_2 - \left(\frac{p}{a} - \frac{q}{b}\right) B_1 + \left(\frac{p(p+1)}{1.2.a^2} - \frac{p.q}{a.b} + \frac{q(q+1)}{1.2.b^2}\right) B_0\right],$$

. . . .

Für die Form der Function

$$85.\quad \frac{fx}{(a-x)^p(b-x)^q x^n}$$

ist

$$A_0 = \frac{B_0}{a^p b^q},$$

$$A_1 = \frac{B_1}{a^p b^q} + \left(\frac{p}{a} + \frac{q}{b}\right) A_0,$$

$$A_2 = \frac{B_2}{a^p b^q} + \left(\frac{p}{a} + \frac{q}{b}\right) A_1 - \left(\frac{p(p-1)}{1.2.a^2} + \frac{p.q}{a.b} + \frac{q(q-1)}{1.2.b^2}\right) A_0,$$

$$A_3 = \frac{B_3}{a^p b^q} + \left(\frac{p}{a} + \frac{q}{b}\right) A_2 - \left(\frac{p(p-1)}{1.2.a^2} + \frac{p.q}{a.b} + \frac{q(q-1)}{1.2.b^2}\right) A_1$$
$$+ \left(\frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3.a^3} + \frac{p(p-1).q}{1.2.a^2b} + \frac{pq(q-1)}{1.2.ab^2}\right.$$
$$\left. + \frac{q(q-1)(q-2)}{1.2.3.b^3}\right) A_0,$$

. . . .

oder

$$A_1 = \frac{1}{a^p b^q}\left[B_1 + \left(\frac{p}{a} + \frac{a}{b}\right) B_0\right],$$

$$A_2 = \frac{1}{a^p b^q}\left[B_2 + \left(\frac{p}{a} + \frac{q}{b}\right) B_1 + \left(\frac{p(p+1)}{1.2.a^2} + \frac{p.q}{a.b} + \frac{q(q+1)}{1.2.b^2}\right) B_0\right],$$

. . . .

Für die Form der Function

$$86. \quad \frac{fx}{(x+a)^p(b-x)^q x^n}$$

ergiebt sich

$$A_0 = \frac{B_0}{a^p b^q},$$

$$A_1 = \frac{B_1}{a^p b^q} - \left(\frac{p}{a} - \frac{q}{b}\right) A_0,$$

$$A_2 = \frac{B_2}{a^p b^q} - \left(\frac{p}{a} - \frac{q}{b}\right) A_1 - \left(\frac{p(p-1)}{1.2.a^2} - \frac{p.q}{a.b} + \frac{q(q-1)}{1.2.b^2}\right) A_0,$$

. . . .

oder

$$A_1 = \frac{1}{a^p b^q}\left[B_1 - \left(\frac{p}{a} - \frac{q}{b}\right) B_0\right],$$

$$A_2 = \frac{1}{a^p b^q}\left[B_2 - \left(\frac{p}{a} - \frac{q}{b}\right) B_1 + \left(\frac{p(p+1)}{1.2.a^2} - \frac{p.q}{a.b} + \frac{q(q+1)}{1.2.b^2}\right) B_0\right],$$

. . . .

Für die Form der Function

$$87. \quad \frac{fx}{(x-a)^p(b-x)^q x^n}$$

ist

$$A_0 = (-)^p \frac{B_0}{a^p b^q},$$

$$A_1 = (-)^p \frac{B_1}{a^p b^q} + \left(\frac{p}{a} + \frac{q}{b}\right) A_0,$$

$$A_2 = (-)^p \frac{B_2}{a^p b^q} + \left(\frac{p}{a} + \frac{q}{b}\right) A_1 - \left(\frac{p(p-1)}{1.2.a^2} + \frac{p.q}{a.b} + \frac{q(q-1)}{1.2}\right) A_0,$$

. . . .

oder

$$A_1 = (-)^p \frac{1}{a^p b^q}\left[B_1 + \left(\frac{p}{a} + \frac{q}{b}\right) B_0\right],$$

$$A_2 = (-)^p \frac{1}{a^p b^q}\left[B_2 + \left(\frac{p}{a} + \frac{q}{b}\right) B_1 + \left(\frac{p(p+1)}{1.2.a^2} + \frac{p.q}{a.b} + \frac{q(q+1)}{1.2.b^2}\right) B_0\right],$$

. . . .

Bei der Anwendung kehren wir zu den oben gegebenen Beispielen zurück.

Um die Function

$$\frac{1+x}{(x^3-6x^2+11x-6)x^2}$$

rtialbrüche zu zerlegen und die Werthe für A_0 und A_1 zu finden, sind ben angegebenen Werthe $B_0=1$, $B_1=1$, $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=3$, 3 in die Gleichungen (40.) oder (41.) einzuführen. Es ist alsdann

$$A_0 = (-)^3 \cdot \frac{1}{1.2.3} = -\tfrac{1}{6},$$

$$A_1 = (-)^3 \cdot \frac{1}{1.2.3}(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3})(-\tfrac{1}{6}) = -\tfrac{1}{6} - \tfrac{11}{36} = -\tfrac{17}{36}.$$

Hiernach ist

$$\frac{1+x}{(x^3-6x^2+11x-6)x^2} = \frac{1}{x-1} - \frac{3}{4(x-2)} + \frac{2}{9(x-3)} - \frac{1}{6x^2} - \frac{17}{36x}.$$

Für die Werthbestimmung von A_0 und A_1 bei Zerlegung der Function $\frac{1+2x}{(x^3+6x^2+11x+6)x^2}$ in Partialbrüche, ergiebt sich aus (44. u. 45.), wenn $B_0=1$, $B_2=2$, $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=3$, $r=3$ gesetzt wird,

$$A_0 = \frac{1}{1.2.3} = \tfrac{1}{6},$$

$$A_2 = \frac{2}{1.2.3} - (1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}) \cdot \tfrac{1}{6} - \tfrac{11}{36} = \tfrac{1}{36}.$$

Hieraus und aus dem Frühern ergiebt sich

$$\frac{1+2x}{(x^3+6x^2+11x+6)x^2} = -\frac{1}{2(x+1)} + \frac{3}{4(x+2)} - \frac{5}{18(x+3)} + \frac{1}{6x^2} + \frac{1}{36x}.$$

Man erkennt hieraus, mit welcher Leichtigkeit nicht nur die Werthe von D_0, D_1, D_1, ...; sondern auch die von A_0, A_1, A_2, ... gefunden werden, indem nicht mehr Rechnung als in den vorstehenden Zeilen angedeutet, nöthig ist.

Eben so leicht ergeben sich die Werthe für A_0, A_1, A_2, ..., wenn Binomien in dem Nenner der zu zerlegenden Functionen erscheinen.

Für die Function $\frac{1+2x}{(x-2)^3(x-1)x^2}$ ergiebt sich für A_0 und A_1 aus (82.), wenn $B_0=1$, $B_1=2$, $a=2$, $b=$ $p=3$, $q=1$ ist,

$$A_0 = (-)^4 \frac{1}{2^3.1} = \tfrac{1}{8},$$

$$A_1 = (-)^4 \frac{2}{2^3.1} + (\tfrac{3}{2}+1)\tfrac{1}{8} = \tfrac{1}{4} + \tfrac{5}{2} \cdot \tfrac{1}{8} = \tfrac{9}{16}.$$

Also ist

$$\frac{1+2x}{(x-2)^3(x-1)x^2} = \frac{1}{8x^2} + \frac{9}{16x} + (\psi N).$$

Für $\frac{1+2x}{(x+2)^3(x+1)x^2}$ ergiebt sich aus (83.)

$$A_0 = \frac{1}{2^3.1} = \tfrac{1}{8},$$

$$A_1 = \frac{2}{2^3.1} - (\tfrac{3}{2}+1)\tfrac{1}{8} = \tfrac{1}{4} - \tfrac{5}{16} = -\tfrac{1}{16}.$$

Also ist

$$\frac{1+2x}{(x+2)^3(x+1)x^2} = \frac{1}{8x^2} - \frac{1}{16x} + (\psi N).$$

Werden auf diese Weise die Werthe für A_0 und A_1, welche die besondern Formen der genannten Function zulassen, nach den vorstehenden Gleichungen entwickelt, so ist

$$\frac{1+2x}{(x+2)^3(x-1)x^2} = -\frac{1}{8x^2} - \frac{3}{16x} + (\psi N),$$

$$\frac{1+2x}{(2-x)^3(1-x)x^2} = \frac{1}{8x^2} + \frac{9}{16x} + (\psi N),$$

$$\frac{1+2x}{(x+2)^3(1-x)x^2} = \frac{1}{8x^2} + \frac{3}{16x} + (\psi N),$$

$$\frac{1+2x}{(x-2)^3(1-x)x^2} = -\frac{1}{8x^2} - \frac{9}{16x} + (\psi N).$$

Durch (ψN) werden die übrigen Partialbrüche angedeutet, welche durch Zerlegung der begleitenden Binomien entstehen. Wie dieselben zu finden, soll nun gezeigt werden.

(Der Schlufs folgt.)

3.
Elementare Ableitung eines zuerst von Legendre aufgestellten Lehrsatzes der sphärischen Trigonometrie.

(Von dem Herrn Hofrath, Professor etc. Dr. *Gaufs* in Göttingen.)

Sphärische Dreiecke mit kleinen Seiten darf man wie ebene behandeln, wenn man die sphärischen Winkel jeden um den dritten Theil des ganzen sphärischen Excesses vermindert. Die Befugnifs dazu läfst sich ganz elementarisch auf folgende Art nachweisen.

Bezeichnet man den ganzen sphärischen Excefs eines sphärischen Dreiecks mit 3ω; die drei Seiten mit a, b, c, und die ihnen gegenüberstehenden sphärischen Winkel mit $A+\omega$, $B+\omega$, $C+\omega$; so erhalten ein Paar bekannte Formeln der sphärischen Trigonometrie folgende Gestalt:

$$\sin\tfrac{1}{2}a^2 = \frac{\sin\tfrac{3}{2}\omega\,\sin(A-\tfrac{1}{2}\omega)}{\sin(B+\omega)\,\sin(C+\omega)},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}a^2 = \frac{\sin(B-\tfrac{1}{2}\omega)\,\sin(C-\tfrac{1}{2}\omega)}{\sin(B+\omega)\,\sin(C+\omega)},$$

aus deren Verbindung folgt

$$\frac{\sin\tfrac{1}{2}a^6}{\cos\tfrac{1}{2}a^2} = \frac{\sin\tfrac{3}{2}\omega^3\,\sin(A-\tfrac{1}{2}\omega)^3}{\sin(B+\omega)^2\,\sin(B-\tfrac{1}{2}\omega)\,\sin(C+\omega)^2\,\sin(C-\tfrac{1}{2}\omega)}.$$

Auf gleiche Weise wird

$$\frac{\sin\tfrac{1}{2}b^6}{\cos\tfrac{1}{2}b^2} = \frac{\sin\tfrac{3}{2}\omega^3\,\sin(B-\tfrac{1}{2}\omega)^3}{\sin(A+\omega)^2\,\sin(A-\tfrac{1}{2}\omega)\,\sin(C+\omega)^2\,\sin(C-\tfrac{1}{2}\omega)}.$$

Indem man diese beiden Gleichungen mit einander dividirt und dann die Quadratwurzel auszieht, ergiebt sich

$$\frac{\sin\tfrac{1}{2}a^3}{\cos\tfrac{1}{2}a}\cdot\frac{\cos\tfrac{1}{2}b}{\sin\tfrac{1}{2}b^3} = \frac{\sin(A+\omega)\,\sin(A-\tfrac{1}{2}\omega)^2}{\sin(B+\omega)\,\sin(B-\tfrac{1}{2}\omega)^2}.$$

Man kann diese Gleichung auch in die Form setzen

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B}\sqrt[3]{D},$$

wo zur Abkürzung D anstatt

$$\frac{a^3\cos\tfrac{1}{2}a}{8\sin\tfrac{1}{2}a^3}\cdot\frac{8\sin\tfrac{1}{2}b^3}{b^3\cos\tfrac{1}{2}b}\cdot\frac{\sin(A+\omega)\,\sin(A-\tfrac{1}{2}\omega)^2}{\sin A^3}\cdot\frac{\sin B^3}{\sin(B+\omega)\,\sin(B-\tfrac{1}{2}\omega)^2}$$

geschrieben ist. Diese Formel ist strenge richtig: man sieht aber sofort, dafs wenn a, b, c sehr klein sind, und als Gröfsen erster Ordnung betrachtet werden, jeder der vier Factoren, aus denen D zusammengesetzt ist, von der Einheit nur um Gröfsen vierter Ordnung abweicht.

Nach allgemeinern Principien ist dieser Gegenstand abgehandelt, und auf die Dreiecke ausgedehnt, die auf irgend welchen krummen Flächen zwischen kürzesten Linien gebildet werden in meinen *Disquisitiones generales circa superficies curvas.*

4.

Zur Kirchenrechnung, Formeln und Tafeln.

(Vom Hrn. Lic. *Ferdinand Piper* in Berlin.)

Wie es Sache der Astronomie ist, die Thatsachen der himmlischen Bewegung festzustellen, auf welche unsere Eintheilung der Zeit sich gründet; so ist es weiterhin eine Aufgabe der Mathematik, nachdem die kirchliche und bürgerliche Gesetzgebung ein Zeitmaafs angenommen, über dessen Theilung und Zusammensetzung in kleinere und gröfsere Abschnitte verfügt, und gewisse Epochen als festlich ausgezeichnet hat, aus der positiv gegebenen gegenseitigen Abhängigkeit dieser chronologischen Elemente und Epochen die Bedingungsgleichungen unter ihnen zu formen und deren Auflösung für jede darin vorkommende Gröfse zu geben.

Die gewöhnlichen Aufgaben über die Eintheilung der Zeit, die im täglichen Leben vorkommen, sind so einfach, dafs es einer wissenschaftlichen Zurüstung dazu nicht bedarf. Die nächste und geläufigste Aufgabe, die einige Rechnung erfordert, ist die Bestimmung des Datums für das Osterfest. Auch liegt es oft im historischen Interesse, in einem gegebenen Jahre den Wochentag eines gegebenen Monatstages bestimmen zu können.

Der rein mathematische Charakter solcher Aufgaben wird aber einigermaafsen verdeckt auf dem Wege, den zu ihrer Auflösung die Kirchenrechnung einschlägt. Es hat die Kirche gewisse Mittelbegriffe, als da sind Sonntagsbuchstabe, güldene Zahl, Epakte u. s. w. aufgenommen, auch die Auflösung der Aufgaben theilweise in tabellarische Form gebracht; wonach es schwer ist, das Verhältnifs der gesuchten zur gegebenen Gröfse und die mathematischen Operationen, denen die letztere zu unterwerfen ist, dafs jene aus ihr hervorgehe, vollständig zu übersehen.

Zwar ist die rein mathematische Fassung der Aufgabe und die entsprechende Auflösung seit Alters her auch in der Kirche nicht versäumt worden. Man findet, was die griechische Kirche betrifft, schon im *Chronicon paschale* die Auflösung solcher Aufgaben auf die mathematischen Operationen zurückgeführt. Aus der lateinischen Kirche sind von Dionysius Exiguus, dann besonders durch Beda die *argumenta paschalia*,

von den Aegyptern stammend, bekannt: das sind arithmetische Regeln, die verschiedenen Gröfsen der Festrechnung zu bestimmen. — Doch ist dies nur ein Anfang, da die Auflösung nicht immer auf ihre einfachste Form gebracht, auch der Gegenstand nicht vollständig umfafst ist, nicht einmal die nöthigen Aufgaben gestellt sind. Insbesondere reicht es für uns nicht aus, weil jene *argumenta* sich nur auf den julianischen Kalender beziehen; während durch den gregorianischen neue und schwierigere Aufgaben vorgegeben sind.

Um so günstiger hat es sich in neuerer Zeit ereignet, dafs Mathematiker zum Theil ersten Ranges diesem Gegenstande ihre Aufmerksamkeit zugewandt haben. Am bedeutendsten sind die, wie es scheint, ziemlich vergessenen Aufsätze von Lambert (1776) und Oriani (1785). Darauf haben Canovai und del Ricco in ihren *Elementi di Fisica matematica* (1788) der Kirchenrechnung einen eigenen Abschnitt gewidmet, nicht ohne Fehler zu machen. Im Jahre 1800 gab Gaufs seine berühmte Osterformel und eine Berichtigung derselben im Jahre 1816. Um die Zeit stellte Ciccolini die Osterrechnung in einer eigenen Schrift dar: *Formole analitiche pel calcolo della Pasqua etc. Rom 1817. 8.*, wozu er einen Nachtrag gegeben in der *Biblioteca italiana Vol. XIII. 1819. p. 350—358.* Ihm ist Calandrelli gefolgt (s. von Zach in s. *Corresp. astron. Vol. VI. p. 518*). Auch ist Carlini bei Anzeige der Schrift Ciccolini's in einige, aber genaue Erörterungen über den Gegenstand eingegangen, *Bibliotec. ital. l. c. p. 346—349.* Dann gab von Zach (dessen Bemühung um diese Frage jedoch nicht ohne Uebereilung ist, — zuerst schon in seinen Mondtafeln, 1809. p. 67, wo er die Formel von Gaufs unvollständig und unrichtig mittheilt) neue Anregung *(Corresp. astron. Vol. I. 1818. p. 568—571)*: — worauf sich Ciccolini wiederholt *(Corresp. astron. Vol. VI. 1822. p. 513—516. Vol. XIV. 1826. p. 452—459)* und Isnardi *(Ibid. Vol. XIV. p. 248—252* und *p. 546—551)* mit diesem Gegenstande beschäftigt haben. Zuletzt haben Scherk, Art. Ostergrenze und Osterrechnung in *Ersch* und *Gruber's Allg. Encyclop. Abth. III. Th. 7. 1836. S. 30. f. 43—45* und A. denselben behandelt. — Die Osterrechnung von Paucker (1838) hat es nicht sowohl mit der mathematischen Formulirung der Osterregel, als mit ihren astronomischen Grundlagen zu thun.

Die gedachten Mathematiker haben überwiegend nur einzelne Fragen, vorzüglich der Osterrechnung in Erwägung gezogen, und mehrentheils nur Resultate, nicht die Beweise gegeben. Auf eine vollständigere Erör-

terung der gesammten Kirchenrechnung ist Delambre eingegangen, der sich wiederholt in rein theoretischem, wie in historisch-astronomischem Interesse mit der Anwendung der Mathematik auf die Chronologie beschäftigt hat. Schon um das Jahr 1785 hatte er eine sehr eingehende Prüfung aller Rechnungen des Clavius angestellt und für alle Regeln desselben algebraische Beweise entworfen; diese Arbeit aber ist zu Grunde gegangen: er hat sie nicht wieder herstellen mögen (s. Delambre *Astron. Tom. III. 1814. 4. p. 711*). Dagegen hat er in seiner Astronomie für die Berechnung des Osterfestes aufser der Formel von Gaufs, eigene Formeln nebst Tafeln mitgetheilt (a. a. O. *p. 712. 697 sqq. 713 sqq.* Vergl. s. *Abrégé d'Astronom. Paris 1813. 8. p. 644—648*), und in einem besonderen Aufsatz in der *Connaiss. des Tems pour l'an 1817. p. 307—317* neue, rein arithmetische (keine Hülfstafeln erfordernde) *Formules pour calculer la lettre dominicale, le nombre d'or, l'epacte et la fête de paques, pour une année grégorienne ou julienne quelconque;* woselbst auch mehrere Fehler jenes Abschnittes seiner Astronomie berichtigt werden. Ausführlich hat er den ganzen Gegenstand aufgenommen in seiner *Histoire de l'Astronom. moderne T. 1. 1821. 4. p. 1—71.* — Und was die Darlegung der Resultate betrifft, ist mit Auszeichnung zu nennen die an Gaufs sich anschliefsende Arbeit von Tittel, *Methodus technica brevis, perfacilis ac perpetua construendi calendarium ecclesiasticum, stylo tam novo quam vetere etc. Goetting. 1816. 4.*

Es kommt für die mathematische Behandlung unseres Gegenstandes vorzüglich dreierlei in Betracht.

1. *Die kirchlichen und bürgerlichen Bestimmungen unserer Zeit- und Festrechnung in Gleichungen zu formen.* Dies kann einige Schwierigkeit haben, bei den mitunter etwas complicirten Bestimmungen und sogenannten Ausnahmen von der Regel, die der mathematischen Formel sich nicht sogleich fügen wollen. — So ist es, zum Theil auch durch unvollständige Kenntnifs jener Bestimmungen, gekommen, dafs bedeutende Mathematiker hierbei in Irrthümer gerathen sind, — was aber kein mathematischer, sondern ein chronologischer Fehler ist.

2. *Die Fassung der Aufgabe;* nemlich für eine erschöpfende Behandlung des Gegenstandes *die umfassende Stellung der Fragen.* Dahin gehört, dafs eine jede der in diesen Gleichungen vorkommenden Gröfsen als gesucht gesetzt, — demnach dieselben für sie aufgelöst werden. Hat

man z. B. eine Gleichung zwischen dem Jahre, dem Monatstage und dem Wochentage; so ist die nächste Aufgabe: wenn das Jahr und der Monatstag gegeben ist, den Wochentag zu bestimmen. Aus Umkehrung derselben aber gehen noch die Aufgaben hervor: erstens, wenn Jahr und Wochentag gegeben sind, den Monatstag zu bestimmen (wie wohl im jüdischen Kalender, wo er dem christlichen beigegeben wird, das Datum jedes Sabats das Jahr hindurch angegeben zu werden pflegt); zweitens, wenn Wochentag und Monatstag gegeben sind, das Jahr zu bestimmen, — eine Aufgabe der unbestimmten Analytik, die aber auf historischem Wege, wenn das Jahr anderweit in gewisse Grenzen eingeschlossen ist, zu einer bestimmten werden kann, und für die historische und literar-historische Kritik von Bedeutung ist. — So läfst sich auch die Frage, welches ist in einem gegebenen Jahr das Datum des Osterfestes, umkehren: in welchen Jahren trifft das Osterfest auf ein gegebenes Datum?

Hauptsächlich diese Umkehrung der Aufgaben, wodurch sie unbestimmt werden, führt bei der Auflösung auf interessante Fragen und Bestimmungen der Zahlenlehre und erweiset sich somit fruchtbar für das mathematische Interesse. Daher es erwünscht ist, dafs hierauf noch mehr Aufmerksamkeit, als bisher verwandt werde; wiewohl dieser Zweig der Aufgaben aus der Kirchenrechnung, der früher nur spärlich und seltner mit der nöthigen Strenge behandelt ist, in neuester Zeit mehr Gunst erfahren hat. Zuerst, meines Wissens, hat James Horsefall von einer Aufgabe der umgekehrten Osterrechnung im gregorianischen Kalender eine interessante Auflösung mittelst eines allgemeinen Theorems (der Saundersonschen Auflösung unbestimmter Gleichungen) gegeben, in den *Philosoph. Transact. for the y. 1768. Vol. LVIII. p. 100—106;* doch ist sie etwas weitschichtig, so dafs er auch nur dazu kommt, einzelne Fälle zu behandeln: die Beispiele, wann Ostern auf seinen frühesten Termin (März 22.) fällt im 19. und 23. Jahrhundert. Dagegen hat Lambert für den julianischen Kalender die umgekehrte Osterrechnung allgemein erörtert; für den gregorianischen aber mittelst Tafeln nur ein Beispiel berechnet, wobei er eine allgemeine Formel in diesem Kalender für theils an sich zu weitläuftig, theils unmöglich erklärt, *Berlin. Astronom. Jahrb. auf 1778. S. 226.* Für denselben Kalender beschränkt sich eigentlich auch Ciccolini noch auf Beispiele, und zwar ohne Beweise; indem er von Freihr. von Zach aufgefordert zuerst die Aufgabe löset: in irgend einem Jahrhundert die Jahre

zu finden, in denen Ostern auf den 25. April, und in denen es auf den 22. März fällt, *de Zach Corresp. astron. Vol. X. p. 549—559.* vergl. *Vol. XI. p. 154;* dann dieselbe Aufgabe für den 27. März, *Vol. XI. p. 48—53;* endlich diese drei Aufgaben zusammennimmt *Vol. XI. p. 144* bis *149,* — wozu er bemerkt, derselben Methode könne man sich allgemein für jedes vorgegebene Datum des Osterfestes bedienen. Von dieser allgemeinen Aufgabe nun: die Jahre zu bestimmen, in denen Ostern auf ein gegebenes Datum fällt, im julianischen, wie im gregorianischen Kalender, hat Matzka eine zwiefache bemerkenswerthe Auflösung gegeben, in *Crelle's Journal für reine und angew. Mathem. Bd. 3. 1828. S. 342 f. u. 344 f.,* doch mit den Gründen seines Verfahrens noch zurückhaltend, deren Mittheilung später erfolgen sollte. Ferner hat Jahn, ebenfalls für den julianischen und gregorianischen Kalender aus der direkten Formel von Gaufs die Auflösung der umgekehrten Aufgabe abgeleitet, die jedoch etwas umständlich ausgefallen ist, und ohne Rücksicht auf die für jene Formel bestehenden Ausnahmen, in demselben Journal *Bd. 9. 1832. S. 139—143.*

3. *Die Beweisführung.* Für den practischen Zweck ist das Resultat hinlänglich, sofern man sich auf die Richtigkeit der Formel verlassen kann. Der mathematische Gewinn liegt aber in der Ableitung der Formeln aus den Bedingungsgleichungen. Die Schwierigkeit kommt nur daher, dafs man es mehrentheils mit Brüchen, deren Nenner eine der Zahlen 4, 7, 19, 30 ist, zu thun hat: aber nicht die vollständigen Brüche braucht; sondern entweder die ganze Zahl des Quotienten, oder den Rest, — deren Ueberwindung gerade das mathematische Interesse in Anspruch nimmt. Wobei aber, wenn man sich der Sache mathematisch erfreuen will, gröfsere Strenge des Ausdrucks und des Beweises, als öfters vorgekommen, unerläfslich ist. Einen Beweis der Formel von Gaufs haben Ciccolini und Cisa de Cresy gegeben, der letztere in den *Turiner Memoiren von 1820. T. XXIV.*: er hat aber nicht einmal diese Formel vollständig gekannt und somit die Hauptglieder des allgemeinen Ausdrucks unerwiesen gelassen; statt dessen jedoch sich bemüht, selbst dergleichen herzustellen und dafür eine höchst weitläuftige Gleichung gegeben.

Indem ich hier für die gewöhnlichen Aufgaben der Kirchenrechnung und die Umkehrung der wichtigsten unter ihnen neue Endformeln und Hülfstafeln vorlege, wünsche ich aufser dem rein mathematischen Interesse der

Sache, dem kalendariographischen zu dienen, wofür es bequem sein mag, die Formeln übersichtlich beisammen zu haben. Zugleich ist es mein Wunsch, dem historischen Bedarf zu Hülfe zu kommen, da man bei geschichtlichen Untersuchungen oft in den Fall kommt, der Kirchenrechnung Fragen zu stellen, worauf man am unabhängigsten und schnellsten mittelst der mathematischen Formel sich selbst Antwort verschaffen kann. In dieser Beziehung habe ich auch zur Erläuterung mehrere Beispiele aufgenommen und die häufig vorkommende erste Aufgabe ausführlicher behandelt. — Die Beweise bleibe ich schuldig. Im Zusammenhang mit der historischen Erforschung des Kirchenjahres auf die mathematische Theorie desselben geführt, denke ich nebst der Geschichte derselben die vollständige Entwickelung der Formeln in einer gröfsern Arbeit über das Kirchenjahr, welche die historisch-theologische und mathematische Theorie desselben umfassen soll, zu geben.

In der Entwickelung dieser Formeln bin ich namentlich darauf gerichtet gewesen, überhaupt in den directen Formeln die gegebenen Gröfsen unmittelbar stehen zu lassen, um in der Umkehrung der Aufgaben, wenn nun eine vorhin gegebene Gröfse die gesuchte ist, auf dieselbe leichter zurückkommen zu können. Auch weil man so besser die Abhängigkeit der gesuchten von den gegebenen Gröfsen übersieht und des Grundes seines Verfahrens sich bewufst bleiben kann. Sodann habe ich die beiden Ausnahmen — die eine im gregorianischen Kalender selbst statuirte bei der Epaktenrechnung, die andere von der Gleichung für die Ostergrenze — die sonst besonders, aufserhalb der Formel aufgeführt wurden, öfters auch ganz aufser Acht gelassen sind, in diese mit aufgenommen. Wodurch sie freilich verwickelter wird. Für Jahrhunderte aber, in denen jene Ausnahmen nicht vorkommen, wie im gegenwärtigen, läfst sie sich sofort auf einen einfachern Ausdruck bringen (s. §. 10. u. §. 13.). Endlich habe ich gesucht, die Auflösung der wichtigsten Aufgaben, besonders auch die umgekehrte Osterrechnung, durch Hülfstafeln möglichst zu vereinfachen.

Hier ist zuvor noch ein Wort über die Bezeichnung nöthig.

Einen Bruch $\frac{a}{n}$, von dem nur die Ganzen genommen werden sollen, bezeichnen (um nur bei denen stehen zu bleiben, die den vorliegenden Gegenstand behandelt haben) Canovai und Cisa de Cresy durch $Q.\frac{a}{n}$. Dies ist etwas unförmlich. Der Italiener Cicoolini hat dafür den Aus-

druck $\left(\frac{a}{n}\right)_i$; Delambre als Franzose $\left(\frac{a}{n}\right)_e$, d. h. entier: denselben hat Matzka (a. a. O. S. 337), obgleich ein Deutscher. Ich gebrauche, dies auszudrücken, die Bezeichnung $\left(\frac{a}{n}\right)_q$. — Ist der Bruch $\frac{a}{n}$ ein ächter; so ist $\left(\frac{a}{n}\right)_q = 0$.

Den Rest eines Bruches $\frac{a}{n}$ bezeichnen Canovai und Cisa de Cresy ebenso durch $R.\frac{a}{n}$. Delambre, dem Ciccolini folgt, durch $\left(\frac{a}{n}\right)$. Welche Bezeichnung ich aufnehme. — Man hat gewöhnlich bestimmt, dafs, wenn die Division aufgeht, der Nenner selbst als Rest genommen werden soll. Diese Inconsequenz läfst sich vermeiden, wenn man den Ausdruck auf die Form bringt $\left(\frac{a+n-1}{n}\right)_r + 1$; oder, wie in der Formel für die güldene Zahl, statt $a = \left(\frac{t+1}{19}\right)_r$ setzt: $a = \left(\frac{t}{19}\right)_r + 1$. Dann ist, wenn die Division aufgeht, auch der Rest $= 0$ zu nehmen. Davon gehe ich im Folgenden aus. Eine Ausnahme habe ich zur Vereinfachung nur zugelassen in den Formeln für den Wochentag (§§. 1. 2. 15.) und für den Sonntagsbuchstaben (§. 8, 1); wo der Rest 0 beim Nenner 7, den siebenten Wochentag, den Sonnabend, oder den siebenten Sonntagsbuchstaben G anzeigt.

Sodann um auszudrücken, dafs in einer Gleichung für eine Gröfse ($\mathfrak{a}$) nach der Reihe die ganzen Zahlen von 0 bis n gesetzt werden sollen, bediene ich mich der in der Aggregatentheorie für diesen Zweck üblichen, von Ohm empfohlenen, deutschen Buchstaben; also in diesem Fall des Ausdruckes $\mathfrak{a} = \mathfrak{n}$: d. h. für $\mathfrak{a}$ ist zu setzen 0, 1, 2, 3 .... n.

Uebersicht.

II. Aufgabe. Umgekehrt, aus dem Monatstage und Wochentage das Jahr zu finden. §. 4.
Auflösung:
a) für den julianischen Kalender.
b) für den julian. u. gregorian. Kal., innerhalb eines bestimmten Jahrhunderts.
Anwendung. §. 5.:
a) im gegenwärtigen Jahrhundert.
b) auf den 29. Februar.
Beispiele: Wann ist im 19. Jahrh. der 25. Juli a. N. ein Sonntag; Jubil. zu Compostella? — Wann hat der Februar 5 Sonntage? §. 6.
III. Aufgabe. Die drei christlichen Zeitkreise zu bestimmen. §. 7.
a) die güldene Zahl.
b) der Sonnencirkel.
c) die Römer-Zinszahl.
IV. Aufgabe. Die übrigen Hülfsgröfsen der Osterrechnung zu bestimmen. §. 8.
a) der Sonntagsbuchstabe.
b) die Epakte.
c) die Ostergrenze.
V. Aufgabe. Berechnung des Osterfestes. §. 9.
Auflösung:
für den julianischen und gregorianischen Kalender.
Anwendung. §. 10.:
im gegenwärtigen Jahrhundert. — Wörtlicher Ausdruck der Formel für das Datum des Osterfestes im gregorianischen Kalender.
Beispiele: Todestag Constantin's und Friedrich Wilhelms III. am Pfingstfest. — Datum des Osterfestes in den Jahren 1954, 1981, 4763. §. 11.
VI. Aufgabe. Umgekehrt, aus dem Datum des Osterfestes das Jahr zu finden. §. 12.
Auflösung:
a) für den julianischen Kalender.
b) für den gregor. und julian. Kalender innerhalb eines bestimmten Jahrhunderts.
Anwendung. §. 13.:
im gegenwärtigen Jahrhundert.
Beispiele: Bestimmung des Jahres, in welchem eine dem Chrysostomus beigelegte Predigt (Serm. VII. in Pasch.) verfafst ist. — Wann trifft im 19. Jahrh. das gregorianische Osterfest auf den 15., und wann auf den 19. April? §. 14.

B. Formeln mit Hülfstafeln.
I. Aus dem Monatstage eines Jahres n. Chr. Geb. den Wochentag zu finden. §. 15.
Mit Taf. I.
Beispiele: Geburtstag und Todestag Shakespeares. §. 16.
II. Umgekehrt, aus dem Monatstage und Wochentage innerhalb eines bestimmten Jahrhunderts n. Chr. das Jahr zu finden. §. 17.
Mit Taf. I. II. III.
Beispiele: Wann ist im 19. Jahrh. nach dem gregor. Kalender der Tag der heiligen drei Könige, und wann der Geburtstag Christi ein Sonntag? §. 18.
III. Berechnung des Osterfestes. §. 19.
a) im julianischen Kalender.
Mit Taf. IV.
b) im gregorianischen Kalender für das 16. bis 19. Jahrhundert.
Mit Taf. V. und VI.
Beispiele: Datum des julian. und gregor. Osterfestes im Jahre 1841. §. 20.
IV. Umgekehrt, aus dem Datum des Osterfestes innerhalb eines bestimmten Jahrhunderts das Jahr zu finden. §. 21.
a) im julianischen Kalender.
b) im gregorianischen Kalender vom 16. bis zum 22. Jahrhundert.
Mit Taf. VII. und VIII.
Beispiele: Wann trifft im 19. Jahrh. das gregorianische Osterfest auf sein frühestes, wann auf sein spätestes Datum? §. 22.

A. Vollständige Formeln.

I. Erste Aufgabe. Wenn Jahr und Monatstag gegeben sind, den Wochentag zu finden.

Worauf es hauptsächlich bei dieser Aufgabe ankommt, ist, den Schalttag gehörig in Rechnung zu bringen. Dies hat für die verflossenen Jahre keine Schwierigkeit. Aber ein Bedenken macht das laufende Jahr, aus welchem der Monatstag gegeben ist. Dieser Monatstag kann nur so in die Rechnung aufgenommen werden, dafs man ihn als Jahrestag vom Anfange des Jahres an zählt. Dies giebt im Schaltjahr nach dem 29. Febr. eine andere Zählung: es hat alsdann derselbe Jahrestag eine Einheit mehr, als im gemeinen Jahre. Eine verschiedene Zählung der Art aber ist unzuläfslich, wenn die umgekehrte Aufgabe vorliegt, aus dem Wochentage und Monatstage die Jahre abzuleiten: wo erst gefunden werden soll, ob die Jahre Schalt- oder gemeine Jahre sind; überhaupt auch unbequem im Schaltjahre anders, als im gemeinen zu zählen. Diese Schwierigkeit wird beseitigt, wenn man entweder für die Rechnung das Jahr vom ersten März anfängt und von da bis zum letzten Februar ununterbrochen fortzählt, so dafs der 29. Februar der 366. Tag wird; oder wenn man zwar vom ersten Januar an die Jahrestage zählt, und im Schaltjahre gleicherweise, wie im gemeinen (also den 29. Februar des laufenden Jahres hier niemals mitzählt); aber vom ersten März an eine Formel gebraucht, in welcher die Einschaltung als schon vollzogen mit allen frühern Schalttagen in Rechnung gebracht ist.

Dieselbe Schwierigkeit hat es im gregorianischen Kalender auch noch mit dem laufenden Jahrhundert. Der begegnen wir, indem wir für unsere Rechnungen das Jahrhundert mit dem ersten März anfangen. Das heifst, wenn die Zahl der verflossenen Jahrhunderte durch s bezeichnet wird; so kommt hier und im Folgenden allemal nicht vom 1. Januar, sondern vom 1. März des Jahres $100s$ bis zum letzten Februar des Jahres $100(s+1)$ derselbe Werth von s in Anwendung. Also z. B. für den 1. Februar des Jahres 1800 noch der Werth $s=17$; aber für den 1. Mai desselben Jahres der Werth $s=18$.

Hiernach haben wir in ersterer Beziehung drei Wege zur Auflösung unserer Aufgabe.

Im Folgenden werden die Wochentage vom Sonntage an nach der Reihe durch die Zahlen 1, 2, 3 ... 7 bezeichnet. Findet man in der Division den Rest 0; so soll bei dieser Aufgabe ausnahmsweise (wie oben bemerkt ist) statt dessen der Nenner 7 genommen, also durch den Rest 0 der Sonnabend bezeichnet werden.

Erste Auflösung.

Man zähle, der wievielte Tag vom 1. Januar an (diesen mitgerechnet) der gegebene Monatstag ist, *mit Rücksicht darauf, dafs im Schaltjahr der Februar einen Tag mehr hat,* diese Zahl sei d; so gelten allgemein folgende Formeln, wenn man die Zahl des Wochentages durch h bezeichnet:

a) *im julianischen Kalender*

α) für Jahre der julianischen Periode, wenn diese durch T bezeichnet werden:

$$h = \left(\frac{T + \left(\frac{T+2}{4}\right)_q + d}{7}\right)_r \qquad \text{(I)}$$

β) für Jahre der christlichen Zeitrechnung, wenn diese durch t bezeichnet werden:

aa) vor Chr. Geb.

$$h = 7 - \left(\frac{t + \left(\frac{t+3}{4}\right)_q + 365 - d}{7}\right)_r = \left(\frac{6\left(t + \left(\frac{t+3}{4}\right)_q\right) + d + 6}{7}\right)_r \qquad \text{(II)}$$

bb) nach Chr. Geb.

$$h = \left(\frac{t + \left(\frac{t-1}{4}\right)_q + d + 5}{7}\right)_r \qquad \text{(III)}$$

b) *im gregorianischen Kalender;* mit derselben Bezeichnung der Jahre nach Chr., wenn noch die Zahl der verflossenen Jahrhunderte s genannt wird:

$$h = \left(\frac{t + \left(\frac{t-1}{4}\right)_q - s + \left(\frac{s}{4}\right)_q + d}{7}\right)_r . \qquad \text{(IV)}$$

Zweite Auflösung.

Es sei d der Jahrestag des gegebenen Monatstages vom 1. Januar an, *ohne Rücksicht darauf, dafs im Schaltjahr der Februar einen Tag mehr hat,* so dafs im Schaltjahr derselbe Werth von d genommen wird,

wie im gemeinen Jahre (für den 29. Februar selbst jedoch $d = 60$); so gelten vom 1. Januar bis 29. Februar die eben aufgestellten Formeln. Für die Tage vom 1. März an ändert sich der darin vorkommende Bruch der Jahreszahl, indem bei vorwärts gezählten Jahren dessen Zähler um eine Einheit vermehrt, bei rückwärts gezählten Jahren derselbe um eine Einheit vermindert werden mufs. So hat man nach dieser Annahme für d, wenn übrigens dieselbe Bezeichnung gilt, folgende Formeln:

a) *im julianischen Kalender*

α) für Jahre der julian. Periode

vom 1. Januar bis 29. Februar	vom 1. März bis 31. December	
$h = \left(\frac{T + \left(\frac{T+2}{4}\right)_q + d}{7}\right)_r$	$h = \left(\frac{T + \left(\frac{T+3}{4}\right)_q + d}{7}\right)_r$	(V, 1 u. 2)

β) für Jahre der christl. Zeitrechn.

aa) vor Chr. Geb.

$h = 7 - \left(\frac{t + \left(\frac{t+3}{4}\right)_q + 365 - d}{7}\right)_r$	$h = 7 - \left(\frac{t + \left(\frac{t+2}{4}\right)_q + 365 - d}{7}\right)_r$	(VI, 1 u. 2)

bb) nach Chr. Geb.

$h = \left(\frac{t + \left(\frac{t-1}{4}\right)_q + d + 5}{7}\right)_r$	$h = \left(\frac{t + \left(\frac{t}{4}\right)_q + d + 5}{7}\right)_r$	(VII, 1 u. 2)

b) *im gregorian. Kalender*

$h = \left(\frac{t + \left(\frac{t-1}{4}\right)_q - s + \left(\frac{s}{4}\right)_q + d}{7}\right)_r$	$h = \left(\frac{t + \left(\frac{t}{4}\right)_q - s + \left(\frac{s}{4}\right)_q + d}{7}\right)_r$	(VIII, 1 u. 2)

Dritte Auflösung.

Man setze den Anfang des Jahres am 1. März, indem man von da bis zum letzten Februar fortzählt, und nenne den so gerechneten Jahrestag d'. Dem gemäfs ist dann die Jahreszahl (T oder t) für ein Datum vom 1. Januar bis zum letzten Februar um eine Einheit zu vermindern (also ein t vor Chr. Geb. in diesem Fall um eine Einheit zu vermehren). Wonach man den Wochentag durch folgende Formeln findet:

a) *im julianischen Kalender*

α) für Jahre der julianischen Periode

$$h = \left(\frac{T + \left(\frac{T-1}{4}\right)_q + d' + 4}{7}\right)_r \quad \text{(IX)}$$

β) für Jahre der christlichen Zeitrechnung

aa) vor Chr. Geb. $h = 7 - \left(\frac{t + \left(\frac{t+2}{4}\right)_q + 369 - d'}{7}\right)_r$ (X)

bb) nach Chr. Geb. $h = \left(\frac{t + \left(\frac{t}{4}\right)_q + d' + 1}{7}\right)_r$ (XI)

b) *im gregorianischen Kalender*

$$h = \left(\frac{t + \left(\frac{t}{4}\right)_q - s + \left(\frac{s}{4}\right)_q + d' + 3}{7}\right)_r. \quad \text{(XII)}$$

2. Anwendung dieser Formeln.

I. Auf das gegenwärtige Jahrhundert.

Man setze das Jahr des 19. Jahrhunderts $= u$, so ist $t = 1800 + u$. Und man hat

1) wenn d den Jahrestag, im Schaltjahre mit Rücksicht darauf, daſs der Februar einen Tag mehr hat, bezeichnet, — aus den Formeln (III) und (IV):

im julian. Kalender	*im gregor. Kalender*
$h = \left(\frac{u + \left(\frac{u-1}{4}\right)_q + d + 1}{7}\right)_r$	$h = \left(\frac{u + \left(\frac{u-1}{4}\right)_q + d + 3}{7}\right)_r$

2) wenn d ohne Rücksicht auf den 29. Febr., im Schaltjahre genommen wird, wie im gemeinen Jahr, — aus den Formeln (VII) und (VIII):

im julianischen Kalender

vom 1. Januar bis 29. Februar	vom 1. März bis 31. December
$h = \left(\frac{u + \left(\frac{u-1}{4}\right)_q + d + 1}{7}\right)_r$	$h = \left(\frac{u + \left(\frac{u}{4}\right)_q + d + 1}{7}\right)_r$

im gregorianischen Kalender

$h = \left(\frac{u + \left(\frac{u-1}{4}\right)_q + d + 3}{7}\right)_r$	$h = \left(\frac{u + \left(\frac{u}{4}\right)_q + d + 3}{7}\right)_r.$

II. **Welches ist allgemein der Wochentag des ersten Januars in einem Jahre nach Chr. Geb.?**

Man setze in Formel (III) und (IV) $d = 1$, so kommt der Wochentag des ersten Januars:

im julian. Kalender | *im gregor. Kalender*

$$h = \left(\frac{t + \left(\frac{t-1}{4}\right) + 6}{7}\right)_r \quad \Big| \quad h = \left(\frac{t + \left(\frac{t-1}{4}\right)_q - s + \left(\frac{s}{4}\right)_q + 1}{7}\right)_r$$

und für das gegenwärtige Jahrhundert, aus den eben aufgestellten Formeln:

$$h = \left(\frac{u + \left(\frac{u-1}{4}\right)_q + 2}{7}\right)_r \quad \Big| \quad h = \left(\frac{u + \left(\frac{u-1}{4}\right)_q + 4}{7}\right)_r.$$

III. **Welches ist allgemein der Wochentag des 25sten Decembers in einem Jahre nach Chr. Geb.?**

Man findet diesen, wenn man in den Formeln, welche vom 1. März bis zum 31. Dec. gleicherweise für das Schaltjahr, wie für das gemeine Jahr gelten (Form. (VII, 2) und (VIII, 2)), $d = 359$ (der Jahrestag des Weihnachtstages) setzt; kürzer aber, da der Wochentag des Weihnachtstages gleich ist dem des nächst folgenden Neujahrstages, wenn man in den eben gefundenen Formeln für den ersten Januar statt t setzt $t + 1$. So ist der Wochentag des 25. Decembers:

im julian. Kalender | *im gregor. Kalender*

$$h = \left(\frac{t + \left(\frac{t}{4}\right)_q}{7}\right)_r \quad \Big| \quad h = \left(\frac{t + \left(\frac{t}{4}\right)_q - s + \left(\frac{s}{4}\right)_q + 2}{7}\right)_r$$

und für das gegenwärtige Jahrhundert:

$$h = \left(\frac{u + \left(\frac{u}{4}\right)_q + 3}{7}\right)_r \quad \Big| \quad h = \left(\frac{u + \left(\frac{u}{4}\right)_q + 5}{7}\right)_r.$$

IV. **Welches ist allgemein das Datum des ersten Advents?**

Man berechne erst den Wochentag des 25. Decembers, wie eben gezeigt. Dieser sei H; so ist das Datum des ersten Advents:

$$A = \text{Nov. } 27 + \left(\frac{8 - H}{7}\right)_r,$$

wo, wenn kein Rest bleibt, nicht der Divisor 7, sondern 0 zu setzen ist.

3. Beispiele.

Nach der ersten Auflösung.

1. Welches ist der Wochentag des ersten Januars im Jahre 1 der julianischen Periode, d. i. 4713 vor Chr.?

Man setze in Formel (I) $T=1$, $d=1$; so kommt

$$h=\left(\frac{1+\left(\frac{1+2}{4}\right)_q+1}{7}\right)_r=2, \text{ ein Montag.}$$

Dasselbe findet man, wenn man, nach Jahren vor Chr. rechnend, in Formel (II) $t=4713$, $d=1$ setzt.

Nach der zweiten Auflösung.

2. Keppler berechnet (in den rudolphinischen Tafeln) den Schöpfungstag der Welt auf den 24. Juli 3993 vor Chr. Welcher Wochentag ist dies?

Der 24. Juli ist der 205te Tag des Jahres; hier ist also $d=205$, $t=3993$, und man hat nach Formel (VI, 2):

$$h=7-\left(\frac{3993+\left(\frac{3993+2}{4}\right)_q+365-205}{7}\right)_r=7-\left(\frac{5151}{7}\right)_r=7-6=1,$$

ein Sonntag.

3. Nach den Ordnern des jüdischen Kalenders ist der erste Neumond (der *Moled Tischri*) der Welt, am 6. October 3761 v. Chr., 953 der julianischen Periode Abends um 11 Uhr 205 Chl. eingetreten. An welchem Wochentage?

Der 6. October ist der 279ste Tag des Jahres; also $d=279$, $t=3761$. Und nach derselben Formel:

$$h=7-\left(\frac{3761+\left(\frac{3761+2}{4}\right)_q+365-279}{7}\right)_r=7-\left(\frac{4767}{7}\right)_r=7-6=1,$$

oder nach der Formel für Jahre der julian. Periode (V, 2), da $T=953$, $d=279$:

$$h=\left(\frac{953+\left(\frac{953+3}{4}\right)_q+279}{7}\right)_r=\left(\frac{1471}{7}\right)_r=1,$$

also nach beiden Formeln ein Sonntag. Ideler hatte *Handb. d. Chronol. Th. I. S. 582.* den Montag angegeben (doch s. ebendas. S. 545); hat aber

diese Angabe berichtigt im *Lehrb. der Chronol. S. 254. 255. Anm. 1. vergl. S. 230. 234. Anm. 1.* (an welcher letzten Stelle es statt *Sonntag den 7. Oktober* heifsen mufs: den 6. Oktober).

Nach der dritten Auflösung.

4. Scaliger nahm in der ersten Ausgabe seines *Opus de emend. temp.* (später hat er eine andere Ansicht vorgetragen) Mittw. den 21. April 3949 vor Chr. für den vierten Tag der Welt. Stimmt hier Wochentag und Monatstag?

Der 21. April ist vom 1. März an gerechnet der 52ste Tag des Jahres, also $d' = 52$, $t = 3949$. Und nach Formel (X):

$$k = 7 - \left(\frac{3949 + \left(\frac{3949+2}{4}\right)_q + 369 - 52}{7}\right)_r = 7 - \left(\frac{5253}{7}\right)_r = 7 - 3 = 4,$$

ein Mittwoch.

5. Petavius nimmt *(Doctr. temp. Lib. IX. c. 6. Antw. 1705. T. II. p. 10.* vergl. *Lib. XIII. Ibid. p. 282.* desgl. in seinem *Rationar. temp. ed. 3. Par. 1636. 8. P. 2. p. 82)* für den ersten Tag der Welt den 26. October im Jahre 730 der julianischen Periode, 3984 v. Chr. Irrig giebt Jean Paul, der eine Gelegenheit wahrnimmt, den Geburtstag der Welt zur Sprache zu bringen, den 22. October an, an welchem nach Petavius die Welt auf die Welt gekommen sei, im *Titan Bd. 1. (Sämmtl. Werke, Berlin 1827. Bd. XXI.) S. 117.* — Welcher Wochentag?

Der 26. October ist, vom 1. März an gezählt, der 240ste Tag des Jahres, also $d' = 240$, $t = 3984$. Und nach derselben Formel:

$$k = 7 - \left(\frac{3984 + \left(\frac{3984+2}{4}\right)_q + 369 - 240}{7}\right)_r = 7 - \left(\frac{5109}{7}\right)_r = 7 - 6 = 1,$$

ein Sonntag.

4. Zweite Aufgabe. Wenn Monatstag und Wochentag gegeben sind, das Jahr zu finden, in welchem sie zusammentreffen.

Ich gebe hier nur die Formeln für Jahre (t) nach Chr. Geb. Im gregorianischen Kalender mufs die Rechnung für jedes Jahrhundert besonders geführt werden (ich bezeichne die Zahl der verflossenen Jahrhunderte wieder durch s); für den julianischen Kalender kann man eine Formel haben, die unabhängig von dem Jahrhundert besteht.

Wo immer im Folgenden ein Rest gebildet wird und die Division aufgeht, da ist der Rest $= 0$ zu setzen.

Gegeben ist der Monatstag, als Jahrestag vom 1. Januar an gerechnet (ohne Rücksicht auf den Schalttag) $= d$; der Wochentag $= h$.

Erste Auflösung. *Für den julianischen Kalender.*

Man setze

$$\left(\frac{6d+h+2}{7}\right)_r = \delta,$$

ferner für ein Datum

vom 1. Januar bis 29. Februar	vom 1. März bis 31. December
$5a + \left(\frac{4\delta+4+3a}{5}\right)_q = c$	$5a + \left(\frac{4\delta+3+3a}{5}\right)_q = c$
$a = 4$ mit Ausnahme von $\left(\frac{2\delta}{5}\right)_r$	$a = 4$ mit Ausnahme von $\left(\frac{2(\delta+1)}{5}\right)_r$

(d. h. für a sind mit Ausnahme des eben gedachten Werthes nach der Reihe die Zahlen 0, 1, 2, 3, 4 zu setzen);

so ist

$$t = 28y + c, \quad \text{(XIII)}$$

wo für y, 0 und jede positive ganze Zahl genommen werden kann.

Zweite Auflösung. *Für den julianischen und gregorianischen Kalender, innerhalb eines bestimmten Jahrhunderts,*

vom 1. März des Jahres $100s$ bis zum letzten Februar des Jahres $100(s+1)$.

Die Jahre dieses Jahrhunderts sollen durch u bezeichnet werden (so, dafs $t = 100s + u$). Man setze

im julian. Kalender	*im gregor. Kalender*
$\left(\frac{6d+h+2+s}{7}\right)_r = \delta$	$\left(\frac{6d+h+2s-\left(\frac{s}{4}\right)_q}{7}\right)_r = \delta$

und gleicherweise in beiden Kalendern für ein Datum

vom 1. Januar bis 29. Februar	vom 1. März bis 31. December
$5a + \left(\frac{4\delta+4+3a}{5}\right)_q = c$	$5a + \left(\frac{4\delta+3+3a}{5}\right)_q = c$
$a = 4$, ausgenommen $\left(\frac{2\delta}{5}\right)_r$	$a = 4$, ausgenommen $\left(\frac{2(\delta+1)}{5}\right)_r$;

so ist

$$u = 28\mathfrak{y} + c \quad \text{(XIV, 1 u. 2)}$$

$\mathfrak{y} = 2$, und für jeden Werth von $c < 17$, $\mathfrak{y} = 3$

(d. h. es sind für $\mathfrak{y}$ nach der Reihe die Zahlen 0, 1, 2 und wenn das andere Glied von u kleiner als 17 ist, auch 3 zu setzen).

5. Anwendung dieser Formeln.

1. **Für das gegenwärtige Jahrhundert** wird in der zweiten Auflösung der vorigen Aufgabe, in Formel (XIV) nur δ näher bestimmt, nehmlich

im julian. Kalender	*im gregor. Kalender*
$\delta = \left(\frac{6d+h+6}{7}\right)_r$	$\delta = \left(\frac{6d+h+4}{7}\right)_r$.

Im Uebrigen bleibt es bei derselben Formel.

2. **Ist der gegebene Monatstag der 29. Februar,** so gelten ebenfalls die vorgelegten Formeln, mit der Bedingung, dafs man in dem Resultat nur die Schaltjahre, d. h. Jahre von der Form $4n$ nimmt. Dies erreicht man unmittelbar durch folgende Formeln, wenn der Wochentag des 29. Februar h genannt wird.

Für den *julianischen Kalender* allgemein.

Man setze

$$\left(\frac{h+5}{7}\right)_r = \delta \qquad \left(\frac{12\delta+11}{28}\right)_r + 1 = c;$$

so ist

$$t = 28y + c,$$

wo für y 0 und jede positive ganze Zahl gesetzt werden kann.

Für den *gregorianischen Kalender* innerhalb des Jahrhunderts $100s+1$ bis $100(s+1)$.

Man setze

$$\left(\frac{h+3+2s-\left(\frac{s}{4}\right)_q}{7}\right)_r = \delta \qquad \left(\frac{12\delta+11}{28}\right)_r + 1 = c;$$

so ist

$$u = 28\mathfrak{y} + c$$
$$\mathfrak{y} = 3$$

(d. h. es sind für $\mathfrak{y}$ die Zahlen 0, 1, 2, 3 zu setzen); die Zahl 3 jedoch nur dann,

1) wenn $c < 16$,

2) wenn $c \stackrel{=}{>} 16$ und s eine Zahl von der Form $4n-1$ ist.

6. Beispiele.

1. In **Compostella**, in der Cathedrale des h. Jacobus wird ein Jubiläum gefeiert allemal wann das Fest des h. **Jacobus** (25. Julius) auf einen Sonntag fällt; *s. de Zach Corresp. astron. Vol. X. 1824. p. 448.*

In welchen Jahren unseres Jahrhunderts tritt dies ein nach dem gregorianischen Kalender?

Hier ist $h = 1$, d (der 25. Juli, vom 1. Jan. an gerechnet) = 206; mithin im 19. Jahrhundert aus der eben (§. 5, 1.) gegebenen Anwendung:

$$\delta = \left(\frac{6.206 + 1 + 4}{7}\right)_r = 2$$

und nun in Formel (XIV, 2):

$$c = 5\mathfrak{a} + \left(\frac{4.2 + 3 + 3\mathfrak{a}}{5}\right)_q = 5\mathfrak{a} + \left(\frac{11 + 3\mathfrak{a}}{5}\right)_q,$$

wo für $\mathfrak{a}$ nach der Reihe die Werthe 0, 1, 2, 3, 4 zu setzen sind, mit Ausnahme von $\left(\frac{2(2+1)}{5}\right)_r = 1$; also die Werthe 0, 2, 3, 4. Dadurch erhält man für c die Zahlen 2, 13, 19, 24. Und hiernach für u die Werthe:

2	13	19	24
30	41	47	52
58	69	75	80
86	97.		

Das sind also die Jahre des neunzehnten Jahrhunderts, von 1802 bis 1897, in welchen der 25. Julius ein Sonntag ist.

2. Aus Anlafs des Jahres 1824, in welchem der Februar fünf Sonntage hatte, ist die Frage aufgeworfen (*s. de Zach Corresp. astron. l. c. p. 382.*), in welchen Jahren dies eintrifft und nach welchem Gesetz.

Man sieht sogleich, dafs dazu die beiden Bedingungen zusammenkommen müssen: erstens, dafs der Februar 29 Tage hat, also das Jahr ein Schaltjahr ist; zweitens, dafs der erste, mithin auch der letzte Februar ein Sonntag ist. Die Aufgabe läuft also auf die Frage hinaus: in welchen Jahren ist der 29. Februar ein Sonntag?

Die Antwort hierauf ist in der §. 5, 2. aufgestellten Formel enthalten, indem man darin die Zahl des Wochentages $h = 1$ setzt. Dann findet man

für den julian. Kal.	*für den gregor. Kal.*
weil $\delta = 6$	$\delta = \left(\frac{4 + 2s - \left(\frac{s}{4}\right)_q}{7}\right)_r$
$c = \left(\frac{12\delta + 11}{28}\right)_r + 1 = 28$	$c = \left(\frac{12\delta + 11}{28}\right)_r + 1$
$t = 28(y + 1)$	$u = 28\mathfrak{y} + c.$

Und im gegenwärtigen Jahrhundert,

wenn man für y die Zahlen 64, 65, 66 setzt, für t die Werthe:	wenn man $s = 18$ nimmt: $\delta = 1$, $c = 24$; mithin für u die Werthe: 24, 52, 80. Das sind die Jahre
1820, 1848, 1876.	1824, 1852, 1880.

Diese Aufgabe ist nach anderen Methoden aufgelöst von Ciccolini in *de Zach. Corresp. astron. Vol. X. p. 380. 381.* und *Vol. XI. p. 149. 150.*, von Zach (mit Hülfe des Sonntagsbuchstabens) *Ibid. Vol. X. p. 382. 383;* ferner von Matzka in *Crelle's Journ. f. reine u. angew. Mathem. Bd. 3. 1828. S. 341.* und von Jahn *Ebend. Bd. 9. 1832. S. 143. 144.*

7. Dritte Aufgabe. **Die drei christlichen Zeitkreise zu bestimmen.**

Dafür sind die Formeln, gleichgeltend für den alten und neuen Stil, wenn die Jahre n. Chr. allgemein durch t, in unserem Jahrhundert durch u bezeichnet werden:

die güldene Zahl	$A = \left(\frac{t}{19}\right)_r + 1$	(XV)	$A = \left(\frac{u+14}{19}\right)_r + 1$
der Sonnencirkel	$C = \left(\frac{t+8}{28}\right)_r + 1$	(XVI)	$C = \left(\frac{u+16}{28}\right)_r + 1$
die Römer-Zinszahl	$I = \left(\frac{t+2}{15}\right)_r + 1$	(XVII)	$I = \left(\frac{u+2}{15}\right)_r + 1$

Die umgekehrte Aufgabe, aus der güldenen Zahl, dem Sonnencirkel und der Römer-Zinszahl das Jahr abzuleiten, — eine Aufgabe der unbestimmten Analytik, ist mehrfach behandelt, von Bernoulli, Wallis, Euler, Lalande, Delambre u. A.; daher ich hier nicht darauf eingehe. Für einen besonderen Fall giebt auch Ideler die Auflösung, *Handbuch der Chronologie Bd. II. S. 587.*

8. Vierte Aufgabe. **Die übrigen Hülfsgröfsen der Osterrechnung zu bestimmen.**

1. Für den Sonntagsbuchstaben L erhält man leicht aus §. 2. n. II., indem auch hier, wenn der Rest 0 ist, statt dessen der Divisor 7 genommen werden, also der Rest 0 den Sonntagsbuchstaben G anzeigen soll:

im julian. Kalender | *im gregor. Kalender*

$$L=\left(\frac{6\left(t+\left(\frac{t-1}{4}\right)_q\right)+3}{7}\right)_r \quad \text{(XVIII)} \qquad L=\left(\frac{6\left(t+\left(\frac{t-1}{4}\right)_q\right)+s-\left(\frac{s}{4}\right)_q+1}{7}\right)_r \quad \text{(XIX)}$$

und für das gegenwärtige Jahrhundert

$$L=\left(\frac{6\left(u+\left(\frac{u-1}{4}\right)_q\right)}{7}\right)_r \qquad L=\left(\frac{6\left(u+\left(\frac{u-1}{4}\right)_q\right)+5}{7}\right)_r;$$

wobei aber in jedem Schaltjahr (wenn t oder u eine Zahl von der Form $4n$ ist) vom 1. März an statt dessen der nächst vorhergehende Sonntagsbuchstabe gilt, den man unmittelbar erhält (nehmlich für jedes Jahr, nicht blofs für ein Schaltjahr, den Sonntagsbuchstaben vom 1. März an), wenn man in diesen Formeln statt $\left(\frac{t-1}{4}\right)_q$, $\left(\frac{t}{4}\right)_q$ und statt $\left(\frac{u-1}{4}\right)_q$, $\left(\frac{u}{4}\right)_q$ setzt.

Wo immer im Folgenden ein Rest vorkommt und die Division aufgeht, da wird auch der Rest $=0$ gesetzt.

2. Für die Epakten gelten folgende Gleichungen, wenn man $\left(\frac{t}{19}\right)_r = a$ setzt:

a) die julianische Epakte $\varepsilon=\left(\frac{11(a+1)}{30}\right)_r$ (XX)

b) für die gregorianischen Epakten hat man

beständige Epakte im ersten Jahre des *julian.* 19jährigen Cyclus

$$\alpha = 8$$

Correction zur Epoche der Kalenderverbesserung

$$\beta = +3-10 = -7$$

die Lunisolargleichung

$$\gamma = \left(\frac{8s+13}{25}\right)_q + \left(\frac{s}{4}\right)_q + 7 - s,$$

demnach die Epakte im ersten Jahre des *gregor.* 19jährigen Cycl.

$$b = \alpha+\beta+\gamma = 8+\left(\frac{8s+13}{25}\right)_q+\left(\frac{s}{4}\right)_q - s,$$

wo jedoch, wenn b negativ wird, das nächst gröfsere Vielfache von 30 dazu addirt werden und diese Differenz statt der negativen Gröfse genommen werden mufs; welches durch folgende allgemeine Formel ausgedrückt wird:

$$B = b+\left(\frac{29-b}{30}\right)_q . 30$$

und hiernach überhaupt die gregorianische Epakte

$$e = \left(\frac{B+11a}{30}\right)_r . \quad \text{(XXI)}$$

Und für das gegenwärtige Jahrhundert, wenn man $\left(\frac{u+14}{19}\right)_r = a$ setzt:

die *julian.* Epakte	die *gregor.* Epakte
$\varepsilon = \left(\frac{11(a+1)}{30}\right)_r$	$e = \left(\frac{11a}{30}\right)_r$.

3. Die Ostergrenze ist allgemein, nachdem man $\left(\frac{t}{19}\right)_r = a$ berechnet hat:

im julianischen Kalender

termin. pasch. = März $21 + \left(\frac{15+19a}{30}\right)_r$ (XXII)

im gregorianischen Kalender, wenn man b und B wie unter der vorigen Nummer (2) in Formel (XXI) berechnet und dann

$$\left(\frac{53-b+19a}{30}\right)_r \left[\text{oder } \left(\frac{53-e}{30}\right)_r\right] = f, \quad \left(\frac{8+\left(\frac{5+11B}{30}\right)_r}{19}\right)_q = K \text{ setzt:}$$

termin. pasch. = März $21 + f - K\left(\frac{f}{28}\right)_q$. (XXIII)

Dieselbe Formel giebt die julianische Ostergrenze, wenn man $b = 8$ nimmt. Dann wird $K = 0$ und man erhält aus dieser die vorhergehende Formel (XXII).

9. Fünfte Aufgabe. Berechnung des Osterfestes.

Es sei t das gegebene Jahr nach Chr. Geb. und das Datum des Osterfestes werde durch P bezeichnet; so ist

im julian. Kalender	*im gregor. Kalender*
wenn	wenn $8 + \left(\frac{8s+13}{25}\right)_q + \left(\frac{s}{4}\right)_q - s = b$
	$b + \left(\frac{29-b}{30}\right)_q .30 = B$
	$\left(\frac{8+\left(\frac{5+11B}{30}\right)_r}{19}\right)_q = K$
$\left(\frac{t}{19}\right)_r = a$	$\left(\frac{t}{19}\right)_r = a$
$\left(\frac{15+19a}{30}\right)_r = f$	$\left(\frac{53-b+19a}{30}\right)_r = f$
$\left(\frac{t+\left(\frac{t}{4}\right)_q+f}{7}\right)_r = h;$	$\left(\frac{t+\left(\frac{t}{4}\right)_q+f+\left(\frac{s}{4}\right)_q+2-s-K\left(\frac{f}{28}\right)_q}{7}\right)_r = h;$
$P =$ März $21+f+7-h$ (XXIV)	$P =$ März $21+f-K\left(\frac{f}{28}\right)_q+7-h$ (XXV)

Diese Formeln gelten allgemein und ohne Ausnahme.

Denn was die sonst sogenannten Ausnahmen von der gregorianischen Osterformel betrifft, hier in der Gleichung für h und P durch das Glied $-K\left(\frac{f}{28}\right)_q$ ausgedrückt; so tritt

die eine Ausnahme (nur von der Formel) ein, wenn $f=29$ gefunden wird, also die Ostergrenze am 19. April. Beide Zahlen werden dann um eine Einheit vermindert; was nur in dem Fall Einflufs auf das Datum des Osterfestes hat, wenn der 19. April ein Sonntag ist.

Die zweite Ausnahme (von der gregorianischen Osterregel selbst) tritt ein, wenn die Epakten XXV und XXIV in demselben 19jährigen Cyclus vorkommen. Dann wird die Epakte XXV (in diesem Falle geschrieben 25) um eine Einheit vermehrt, oder die entsprechende Ostergrenze 18. April ($f=28$) um eine Einheit vermindert; was nur in dem Fall Einflufs auf das Datum des Osterfestes hat, wenn der 18. April ein Sonntag ist.

Von beiden Ausnahmen ist seit Anfang des neuen Stils bis jetzt nur die erste im Jahre 1609 vorgekommen. Auch können sie in dem jetzigen Jahrhundert nicht eintreten; aber in dem folgenden, zwanzigsten Jahrhundert wird jede derselben einmal sich ereignen, die erstere im Jahre 1981, die andere im Jahre 1954. Für beide Jahre soll das Osterfest unter den Beispielen unten §. 11. No. 3. berechnet werden.

10. Anwendung dieser Formeln.

Da b und B nur von s abhängen und K nur von B; so sind diese Gröfsen je ein Jahrhundert hindurch constant und dürfen für jedes Jahrhundert nur einmal berechnet werden.

1. **Für das gegenwärtige Jahrhundert**, wo $s=18$, findet man:

$$b = 8+\left(\frac{8.18+13}{25}\right)_q+\left(\frac{18}{4}\right)_q-18=0, \text{ also auch } B=0:$$

$$\text{daraus folgt auch } K=0.$$

Und man hat für dieses Jahrhundert die gregorianische Osterformel eben so einfach, wie die julianische; wenn man in Formel (XXV) für s überall 18 substituirt:

$$\left(\frac{t}{19}\right)_r = a$$

$$\left(\frac{23+19a}{30}\right)_r = f$$

$$\left(\frac{t+\left(\frac{t}{4}\right)_q+f+2}{7}\right)_r = h$$

$$\textit{gregor.}\ P = \text{März}\ 21+f+7-h.$$

2. Oder wenn man $t=1800+u$ setzt, also durch u das Jahr des 19. Jahrhunderts bezeichnet:

im julian. Kalender	*im gregor. Kalender*
$\left(\frac{u+14}{19}\right)_r = a$	$\left(\frac{u+14}{19}\right)_r = a$
$\left(\frac{15+19a}{30}\right)_r = f$	$\left(\frac{23+19a}{30}\right)_r = f$
$\left(\frac{u+\left(\frac{u}{4}\right)_q+f+3}{7}\right)_r = h$	$\left(\frac{u+\left(\frac{u}{4}\right)_q+f+5}{7}\right)_r = h$

$$P = \text{März}\ 21+f+7-h.$$

Diese im gegenwärtigen Jahrhundert geltende Formel für das Datum des Osterfestes neuen Stils begreift, in Worten ausgedrückt, folgende Vorschriften. Es werde das Jahr, für welches das Osterfest gesucht wird, mit Hinweglassung der beiden ersten Ziffern 18 durch u bezeichnet (z. B. für das Jahr 1840 ist $u=40$);

1) so dividire man u durch 4 und nenne die ganze Zahl, die herauskommt, — wenn ein Rest bleibt, ohne Rücksicht auf diesen — n;
2) man addire die Zahl 14 zu u, dividire diese Summe durch 19 und nenne den Rest a;
3) man multiplicire a mit 19, addire zu diesem Producte 23, dividire diese Summe durch 30 und nenne den Rest f;
4) man addire die Zahlen u, n, f und 5, dividire diese Summe durch 7 und nenne den Rest h.

In allen diesen Fällen, wenn die Division aufgeht, ist der Rest 0 zu nehmen.

So trifft Ostern $(f+7-h)$ Tage nach dem 21sten März.

11. Beispiele.

Im alten Stil.

1. Kaiser Constantin der Grofse starb am Pfingstfest des Jahres 337 n. Chr. S. *Euseb. Vit. Constantin. Lib. IV. c. 64. ed. Reading. p. 664.* und das *Chron. Pasch. p. 286. D. (ed. Bonn. p. 532.)* und *p. 281. B. (697).* An welchem Datum?

Pfingsten ist 49 Tage nach Ostern. Das Datum des Osterfestes in jenem Jahre aber ist nach Formel (XXIV), da $t = 337$; mithin

$$a = \left(\frac{337}{19}\right)_r = 14 \quad f = \left(\frac{15 + 19.14}{30}\right)_r = 11 \quad h = \left(\frac{337 + \left(\frac{337}{4}\right)_q + 11}{7}\right)_r = 5$$

$$P = \text{März } 21 + 11 + 7 - 5 = \text{April } 3.$$

Demnach traf das Pfingstfest auf den 22. Mai. Dies ist der Todestag Constantins; wie auch das *Chronicon paschale* angiebt.

Im neuen Stil.

2. König Friedrich Wilhelm III. von Preufsen starb am Pfingstfest des Jahres 1840. An welchem Datum?

Hier ist in der eben (§. 10, 2.) für das 19. Jahrhundert entwickelten Formel $u = 40$; also

$$a = \left(\frac{40 + 14}{19}\right)_r = 16 \quad f = \left(\frac{23 + 19.16}{30}\right)_r = 27 \quad h = \left(\frac{40 + \left(\frac{40}{4}\right)_q + 27 + 5}{7}\right)_r = 5$$

demnach Ostern $P = \text{März } 21 + 27 + 7 - 5 = \text{April } 19.$

Und Pfingsten den 7. Juni. Dies ist der Todestag Friedrich Wilhelms III.

3. Die §. 9. versprochene Berechnung des Osterfestes der Jahre 1954 (vgl. Delambre in der *Conn. des Tems a. 1817. p. 311.* und *Hist. de l'Astron. moderne T. 1. p. 56. 57.*) und 1981 stellt sich nach Formel (XXV) so.

Hier ist

$$s = 19,$$

also

$$b = 8 + \left(\frac{8.19 + 13}{25}\right)_q + \left(\frac{19}{4}\right)_q - 19 = -1 \quad B = -1 + \left(\frac{29 - (-1)}{30}\right)_q .30 = 29$$

$$K = \left(\frac{8 + \left(\frac{5 + 11.29}{30}\right)_r}{19}\right)_q = \left(\frac{32}{19}\right)_q = 1;$$

und weiter

für das Jahr 1954

da $t = 1954$, $a = \left(\frac{1954}{19}\right)_r = 16$

$$f = \left(\frac{53-(-1)+19.16}{30}\right)_r = 28$$

$$h = \left(\frac{1954+\left(\frac{1954}{4}\right)_q+28+\left(\frac{19}{4}\right)_q+2-19-1.\left(\frac{28}{28}\right)_q}{7}\right)_r = 6$$

$P =$ März $21+28-1+7-6 =$ April 18.

Ohne das Glied $-K.\left(\frac{f}{28}\right)_q$ hätte man $h=0$; $P=$ März $21+28+7-0$ $=$ April 25, acht Tage zu spät.

Für das Jahr 1981

da $t = 1981$, $a = \left(\frac{1981}{19}\right)_r = 5$

$$f = \left(\frac{53-(-1)+19.5}{30}\right)_r = 29$$

$$h = \left(\frac{1981+\left(\frac{1981}{4}\right)_q+29+\left(\frac{19}{4}\right)_q+2-19-1.\left(\frac{29}{28}\right)_q}{7}\right)_r = 6$$

$P =$ März $21+29-1+7-6 =$ April 19.

Ohne das Glied $-K.\left(\frac{f}{28}\right)_q$ hätte man $h=0$; $P=$ März $21+29+7-0$ $=$ April 26, ebenfalls acht Tage zu spät, ein Datum, auf welches Ostern niemals treffen kann.

Im alten und neuen Stil.

4. Auf welches Datum trifft das Osterfest im Jahre 4763 n. Chr.? Hier ist $t=4763$, $s=47$; mithin

im julianischen Kalender

$$a = \left(\frac{4763}{19}\right)_r = 13$$

$$f = \left(\frac{15+19.13}{30}\right)_r = 22$$

$$h = \left(\frac{4763+\left(\frac{4763}{4}\right)_q+22}{7}\right)_r = 4$$

$P =$ März $21+22+7-4 =$ April 15.

Im gregorianischen Kalender

$$b = 8 + \left(\frac{8.47+13}{25}\right)_q + \left(\frac{47}{4}\right)_q - 47 = -13$$

$$a = \left(\frac{4763}{19}\right)_r = 13$$

$$f = \left(\frac{53-(-13)+19.13}{30}\right)_r = 13$$

Also ist das Glied $-K.\left(\frac{f}{28}\right)_q = 0$ und man braucht B und K gar nicht zu berechnen.

$$k = \left(\frac{4763+\left(\frac{4763}{4}\right)_q+13+\left(\frac{47}{4}\right)_q+2-47}{7}\right)_r = 3$$

P = März $21+13+7-3$ = April 7.

Dieses Beispiel ist auch berechnet von Gaufs in der *Mon. Corresp. Bd. 2. 1800. S. 129.* und von Delambre in der *Conn. des Tems a. 1817. p. 315. 316.*

12. Sechste Aufgabe. **Wenn das Datum des Osterfestes gegeben ist, die Jahre zu finden, in welchen es auf jenes Datum trifft.**

Gegeben das Datum des Osterfestes, März $21+p$;
Gesucht die Jahre t nach Chr. Geb.

1. Im julianischen Kalender.

Man bilde $\quad p-1-\alpha = f$

$$\alpha = 6$$

(d. h. man nehme für α nach der Reihe die Werthe 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6; wodurch man eben so viele verschiedene Werthe von f erhält); mit der Bedingung:

1) wenn $p<7$, dafs $\alpha<p$

2) wenn $p>29$, dafs $\alpha>p-30$

ferner $\quad \left(\frac{15+19f}{30}\right)_r = a'$;

und bezeichne alle so gefundenen Werthe von a', die kleiner als 19 sind, durch a.

Dann setze man $\quad \left(\frac{6p}{7}\right)_r = \pi$

$$5\mathfrak{b}+\left(\frac{4\pi+3+3\mathfrak{b}}{5}\right)_q = c$$

$$\mathfrak{b} = 4, \text{ mit Ausnahme von } \left(\frac{2(\pi+1)}{5}\right)_r;$$

so ist, indem man jeden Werth von a und jeden Werth von c setzt:

$$t = 532z + \left(\frac{476a + 57c}{532}\right)_r \quad \text{(XXVI)}$$

wo für z zuerst 0 und dann alle ganzen positiven Zahlen genommen werden können. — Hat man m Werthe von a (es ist wenigstens einer und es sind höchstens 5), da c immer 4 Werthe hat; so erhält man für t $4m$ Werthe, die kleiner sind als 532. Zu deren jedem hat man 532 und deren Vielfache zu addiren, um die unendliche Reihe zu erhalten, die der Aufgabe entspricht.

2. *Im gregorianischen Kalender.*

Man bilde ebenfalls $p - 1 - a = \varphi$

$a = 6$

mit der Bedingung:

1) wenn $p < 7$, dafs $a < p$

2) wenn $p > 29$, dafs $a > p - 30$.

Weiter mufs die Rechnung für jedes Jahrhundert besonders geführt werden. Es seien also die Jahre gesucht innerhalb des $(s+1)$ten Jahrhunderts, d. h. von $100s$ bis $100s + 99$, und es mögen die Jahre dieses Jahrhunderts durch u bezeichnet werden; so berechne man die Säculargleichungen:

$$8 + \left(\frac{8s + 13}{25}\right)_q + \left(\frac{s}{4}\right)_q - s = b \quad b + \left(\frac{29 - b}{30}\right)_q . 30 = B \quad \left(\frac{8 + \left(\frac{5 + 11B}{30}\right)_r}{19}\right)_q = K;$$

ferner

$$\varphi + K.\left(\frac{\varphi}{27}\right)_q = f$$

$$\left(\frac{13 + 19B + 19f}{30}\right)_r = a'$$

und bezeichne diejenigen Werthe von a', die kleiner als 19 sind, durch a; setze dann

$$\left(\frac{14s + a}{19}\right)_r = \alpha'$$

$$\left(\frac{2s - \left(\frac{s}{4}\right)_q + 6p + 5}{7}\right)_r = \pi$$

$$5\mathfrak{b} + \left(\frac{4\pi + 3 + 3\mathfrak{b}}{5}\right)_q = c$$

$$\mathfrak{b} = 4, \text{ mit Ausnahme von } \left(\frac{2(\pi + 1)}{5}\right)_r$$

endlich $\left(\dfrac{84 + 3(c - \alpha')}{28}\right)_r = A'$,

wo jeder Werth von c mit jedem Werth von α' zu verbinden ist. Man bezeichne die Werthe von A', die kleiner sind, als 5 und auch den Werth 5 für den Fall, dafs $\alpha' < 5$, durch A, und den in jedem A enthaltenen Werth von α' durch α; so ist

$$u = 19A + \alpha. \quad \text{(XXVII)}$$

Dieselbe Methode gilt auch für den *julianischen* Kalender, wenn man erstens $b = 8$ setzt: woraus $f = \varphi$ und $\alpha' = \left(\frac{15+19f}{30}\right)_r$ kommt, wie vorhin; dann aber $\pi = \left(\frac{s+6p}{7}\right)_r$. Die übrigen Formeln bleiben unverändert.

13. Anwendung dieser Formeln.

Für das 19. Jahrhundert ist, indem man $s = 18$ in den Formeln des vorigen §. (12, 2) substituirt, die Berechnung folgende.

Gegeben das Datum des Osterfestes = März $21 + p$. So bilde man

im *julian. Kalender*	im *gregor. Kalender*

$$p - 1 - a = f$$
$$a = 6$$

mit der Bedingung 1) wenn $p < 7$, dafs $a < p$
2) wenn $p > 29$, dafs $a > p - 30$

$\left(\frac{15+19f}{30}\right)_r = \alpha'$	$\left(\frac{13+19f}{30}\right)_r = \alpha'$

und bezeichne diejenigen Werthe von α', die kleiner sind als 19 durch α; setze dann

$$\left(\frac{a+5}{19}\right)_r = \alpha'$$

ferner

$\left(\frac{6p+4}{7}\right)_r = \pi$	$\left(\frac{6p+2}{7}\right)_r = \pi.$

Weiter bedient man sich der allgemeinen Gleichungen (XXVII) des gedachten Paragraphs.

14. Beispiele.

Im julianischen Kalender.

1. Man hat unter dem falschen Namen des Chrysostomus sieben *Sermones in Pascha,* deren letzter *(Chrysost. Opp. ed. Montf. T. VIII. App. p. 274 sqq.),* nicht unwichtig für die Geschichte der Osterstreitigkeiten, — für die Zeit seiner Abfassung interessante Merkmale darbietet.

Diese Predigt ist gehalten in der ersten der sieben Fastenwochen (*c. 5. p. 284. D.*), und enthält folgende chronologische Merkmale, — wobei ich das Jahr n. Chr., in welchem sie verfaſst ist, durch t bezeichne.

1) In diesem Jahre traf eine Luna XIV ungefähr 2 Tage vor der Frühlingsnachtgleiche [1]).
2) Die folgende Luna XIV (der Ostervollmond) trat ein am 26. Tage des VII. Monats, einem Sonntage, *p. 283. D.*
3) Demnach das Osterfest dieses Jahres an dem folgenden Sonntage, dem 2. Tage des VIII. Monats, *p. 283. E. 284. B.*
4) Das Osterfest in den drei folgenden Jahren an folgenden Tagen, *p. 284. B. C.:*

im Jahre	$t+1$	am 17.	Tage des VII.	Monats
- - -	$t+2$	am 9.	- - VII.	- -
- - -	$t+3$	am 29.	- - VII.	- -

Es sind Monate des macedonisch-asiatischen Sonnenjahres (*s. c. l. p. 275. B. 276. C.*), von denen im gemeinen Jahre der siebente mit dem 25. März, der achte mit dem 25. April anfing. Dies giebt, wenn wir einstweilen bei dem gemeinen Jahre stehen bleiben, folgende Uebertragung jener Angaben in den julianischen Kalender:

im Jahre t die Ostergrenze am 19. April; das Osterfest am 26. April;

sodann im Jahre	$t+1$	$t+2$	$t+3$
das Osterfest am	10. Apr.	2. Apr.	22. Apr.

Hiernach umfaſst der Zeitraum von dem einen Osterfest bis zum folgenden

zwischen	26. Apr. des Jahres t / 10. Apr. des Jahres $t+1$	349 Tage = 50 Wochen — 1 Tag,
zwischen	10. Apr. des Jahres $t+1$ / 2. Apr. des Jahres $t+2$	357 Tage = 51 Wochen,
zwischen	2. Apr. des Jahres $t+2$ / 22. Apr. des Jahres $t+3$	385 Tage = 55 Wochen.

Da zwischen zwei Ostersonntagen nur eine Anzahl voller Wochen liegen kann; so muſs, da zwischen dem 26. Apr. des Jahres t und dem 10. Apr. des Jahres $t+1$ ein Tag daran fehlt, innerhalb dieses Zeitraums ein Schalttag liegen. Das wäre, wenn wir es nur mit dem julianischen Kalender zu thun hätten, der 29. Februar des Jahres $t+1$. Allein die Kleinasiaten schalteten am Ende ihres zwölften Monats, im julianischen September, ein:

[1]) *p.* 283. *C:* ἡ τεσσαρεσκαιδεκάτη ὡς πρὸς (es muſs gelesen werden πρὸ) δύο ἡμερῶν τῆς ἰσημερίας ἐμπίπτει. Vergl. Ibid. *D.*

es mufs also der September des Jahres t den Schalttag enthalten haben; — und zwar schalteten sie ein in demselben Jahre, wie der julianische Kalender, demgemäfs in einem solchen Jahre die kleinasiatischen Monate vom siebenten an um einen Tag früher im julian. Kalender anfingen [1]). Also ist das Jahr t auch das julianische Schaltjahr, in welchem der siebente kleinasiatische Monat am 24. März, der achte am 24. April anfing. Sonach ist die obige Uebertragung der Daten dahin zu berichtigen, dafs im Jahre t die Ostergrenze am 18; das Osterfest am 25. April einfällt.

Diese Auskunft ist nothwendig, da für das Osterfest, wie für die Ostergrenze diese Tage der äufserste Termin sind und beide nicht später fallen können. Die Zeitbestimmung wird bestätigt durch die Angabe, dafs in jenem Jahre eine Luna XIV ungefähr zwei Tage vor der Frühlingsnachtgleiche eintraf, als deren Datum der 21. März galt. Denn rechnet man vom 18. April 30 Tage zurück, so kommt man auf den 19. März.

Es fragt sich also erstens (und dies ist die eigentliche Frage, auf die es uns hier des Beispiels wegen ankommt), in welchen Jahren trifft Ostern auf den 25. April a. St.?

Hier ist nach Formel (XXVI), §. 12, 1:

$p = 35$, mithin, da $a > p - 30$ sein soll, hat es nur den einzigen Werth $a = 6$,

also $f = 35 - 1 - 6 = 28$ (wie unmittelbar aus der Angabe der Ostergrenze = April 18 hervorgeht);

weiter $$a' = \left(\frac{15 + 19 . 28}{30}\right)_r = 7 = a$$

$$\pi = \left(\frac{6 . 35}{7}\right)_r = 0; \quad \left(\frac{2(0+1)}{5}\right)_r = 2,$$

also für b zu setzen 0, 1, 3, 4.

Mithin
$$c = \begin{cases} 0 \\ 6 \\ 17 \\ 23 \end{cases}$$

und $$t = 532z + \left(\frac{476 . 7 + 57c}{532}\right)_r = 532z + \left(\frac{140 + 57c}{532}\right)_r.$$

---

[1]) S. Usser *De Maced. et Asian. anno solari Diss. c. V.* hinter s. *Annal. vet. et nov. Testam. Genev.* 1722. *f. p.* 104. *col.* 2. Noris *Annus et epoch. Syromaced. Diss. I. c.* 2. *Opp. T. II. p.* 24. *B.*

Substituirt man hier noch für c jeden seiner vier Werthe; so kommt

$$t = 532z + \begin{cases} 140 \\ 482 \\ 45 \\ 387 \end{cases}$$

Man hat also die Jahre 45, 140, 387, 482 und die Summen, wenn man zu ihnen 1.532, 2.532, 3.532 etc. addirt, als Jahre in denen Ostern auf den 25. April trifft. Das sind folgende bis zum Jahre 2000:

45, 140, 387, 482; 577, 672, 919, 1014; 1109, 1204, 1451, 1546; 1641, 1736; 1983.

Zweitens haben wir die Bestimmung, dafs das gesuchte Jahr ein Schaltjahr ist. Von den vier erstgenannten Jahren ist aber nur das Jahr 140 ein solches; die drei übrigen fallen also weg. Und es ist das Jahr der Abfassung jener Predigt enthalten in der Gleichung

$$t = 532z + 140,$$

wodurch schon innerhalb der 532jährigen Osterperiode das Jahr feststeht.

Nun ist drittens auch für die folgenden drei Jahre das Datum des Osterfestes gegeben. Woraus sich indefs keine nähere Bestimmung für unsere Gleichung herleiten läfst; wohl aber eine Probe derselben, wenn wir das Osterfest der drei auf 140 n. Chr. folgenden Jahre suchen. Hierzu bediene ich mich der Kürze halber der unten §. 19, 1. zu gebenden Formel mit ihrer Hülfstafel, nach welcher sich ergiebt:

für das Jahr 141 $a = 8$ $k = 1$, also aus Taf. IV. Ostern am 10. April,
- - - 142 $a = 9$ $k = 2$, - - - - - - - - 2. April,
- - - 143 $a = 10$ $k = 3$, - - - - - - - - 22. April,

übereinstimmend mit den aus der in Rede stehenden Predigt abgeleiteten Angaben. Wenn aber in den drei auf das Jahr 140 folgenden Jahren Ostern auf diese Tage trifft, so trifft es auf dieselben auch in jeden drei Jahren, die auf alle in der Gleichung $t = 532z + 140$ enthaltenen Jahre folgen. Und es bleibt für das gesuchte Jahr bei der Gleichung

$$t = 140 + 532z = 140, 672, 1204, 1736 \text{ etc.}$$

Von diesen Jahren ist das erste zu früh, das dritte und die folgenden zu spät. Es bleibt also nur das Jahr 672, in welchem jene Predigt verfafst sein mufs.

Das Jahr hat schon Usser bestimmt auf anderem Wege, wobei er die Jahre, in denen Ostern auf den 25. April trifft mittelst der güldenen Zahl (VIII) und des Sonntagsbuchstabens (*C*) ausfindig macht, in der angeführten Abhandlung *De Maced. et Asian. anno sol. c. V. p. 103. col. 2. 104.* und *c. VI. §. 6. p. 107. col. 1.* Ihm tritt Noris bei, *Annus et epoch. Syromaced. Diss. I. c. 2.*, wo er wiederholt von den chronologischen Charakteren jener Predigt handelt *p. 21. A. sq. 24. B—D. 26. B. C.* Vergl. Ideler *Hndb. d. Chron. Bd. I. S. 424.* Doch hat Montfaucon in dem Monitum zu diesen *Sermones p. 249. 274.* versäumt, davon Kenntnifs zu nehmen. — Hier ist das Beispiel vorzüglich der Methode wegen berechnet worden.

Diese Zeitbestimmung hat noch ein anderes literarhistorisch-kritisches Interesse. Unter den Anhängen zu dem *Chronicon paschale* befindet sich ein Bruchstück eines Ungenannten *De Christi nativitatis et passionis annis (n. VII. p. 425; ed. Bonn. vol. II. p. 119. 120.)*, an dessen Schlufs jener *Serm. VII. in Pascha* als ein Werk des Chrysostomus seinem Inhalt nach und mit den Anfangsworten angeführt wird. Hieraus folgt, dafs dieses Bruchstück nach dem Jahre 672 verfafst ist.

Im gregorianischen Kalender.

2. Wann trifft im gegenwärtigen Jahrhundert (von 1800 bis 1899) n. St. Ostern auf den 15. und wann auf den 19. April?

Wir bedienen uns für diesen Fall der Gleichungen des §. 13.

Ostern Apr. 15.	Ostern Apr. 19.
Hier ist	Hier ist
$p = 25$;	$p = 29$;
also hat	also hat
f die Werthe 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24	f die Werthe 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28
$a' = \left(\frac{13+19f}{30}\right)_r = 25, 14, 3, 22, 11, 0, 19$	$a' = \left(\frac{13+19f}{30}\right)_r = 11, 0, 19, 8, 27, 16, 5$
$a = 0, 3, 11, 14$	$a = 0, 5, 8, 11, 16$
$\alpha' = 0, 5, 8, 16$	$\alpha' = 2, 5, 10, 13, 16$

ferner

$$\pi = \left(\frac{6.25+2}{7}\right)_r = 5$$

$$c = \begin{array}{cccc|c} 4, & 10, & 21, & 27 & a' = \end{array}$$

$$3(c-a') = \left\{\begin{array}{rrrr|r} 12, & 30, & 63, & 81 & 0 \\ -3, & 15, & 48, & 66 & 5 \\ -12, & 6, & 39, & 57 & 8 \\ -36, & -18, & 15, & 33 & 16 \end{array}\right.$$

$$A' = \left\{\begin{array}{rrrr} 12, & 2, & 7, & 25 \\ 25, & 15, & 20, & 10 \\ 16, & 6, & 11, & 1 \\ 20, & 10, & 15, & 5 \end{array}\right.$$

$$A = \left\{\begin{array}{l} 2 \\ 1 \end{array}\right. \text{ mit } a = \left\{\begin{array}{l} 0 \\ 8 \end{array}\right. .$$

Also $u = \left\{\begin{array}{l} 1.19+8 = 27 \\ 2.19+0 = 38 \end{array}\right.$

d. h. nur in den Jahren 1827 und 1838.

ferner

$$\pi = \left(\frac{6.29+2}{7}\right)_r = 1$$

$$c = \begin{array}{cccc|c} 1, & 7, & 12, & 18 & a' = \end{array}$$

$$3(c-a') = \left\{\begin{array}{rrrr|r} -3, & 15, & 30, & 48 & 2 \\ -12, & 6, & 21, & 39 & 5 \\ -27, & -9, & 6, & 24 & 10 \\ -36, & -18, & -3, & 15 & 13 \\ -45, & -27, & -12, & 6 & 16 \end{array}\right.$$

$$A' = \left\{\begin{array}{rrrr} 25, & 15, & 2, & 20 \\ 16, & 6, & 21, & 11 \\ 1, & 19, & 6, & 24 \\ 20, & 10, & 25, & 15 \\ 11, & 1, & 16, & 6 \end{array}\right.$$

$$A = \left\{\begin{array}{l} 2 \\ 1 \\ 1 \end{array}\right. \text{ mit } a = \left\{\begin{array}{l} 2 \\ 10. \\ 16 \end{array}\right.$$

Also $u = \left\{\begin{array}{l} 1.19+10 = 29 \\ 1.19+16 = 35 \\ 2.19+2 = 40 \end{array}\right.$

d. h. nur in den Jahren 1829, 1835 und 1840.

Dieses Verfahren, sowohl in dieser Anwendung (auf das 19. Jahrh.), als im Allgemeinen, läfst sich bedeutend abkürzen, wenn man bestimmt, welche Werthe von c und a' zu einander gehörend einen Werth von A' geben, der kleiner als 6 ist; demnach die übrigen im voraus ausschliefst. — Ich verweise deshalb auf die unten mitzutheilende (achte) Tafel.

B. Formeln mit Hülfstafeln.

15. Erste Aufgabe. Wenn der Monatstag eines Jahres nach Chr. Geb. gegeben ist, dessen Wochentag zu finden.

Es sei t das Jahr nach Chr. Man nehme für den gegebenen Monatstag aus Taf. I. die unter m stehende Zahl; so ist die Zahl des gesuchten Wochentages

im julian. Kalender

vom 1. Jan.—29. Febr.	vom 1. März—31. Dec.
$h = \left(\frac{t+\left(\frac{t-1}{4}\right)_q+m}{7}\right)_r$	$h = \left(\frac{t+\left(\frac{t}{4}\right)_q+m}{7}\right)_r$

im gregor. Kalender

vom 1. Jan.—29. Febr.	vom 1. März—31. Dec.
$h = \left(\frac{t+\left(\frac{t-1}{4}\right)_q-s+\left(\frac{s}{4}\right)_q+m+2}{7}\right)_r$	$h = \left(\frac{t+\left(\frac{t}{4}\right)_q-s+\left(\frac{s}{4}\right)_q+m+2}{7}\right)_r$,

wo der Rest 1, 2, 3 u. s. w. den Sonntag, Montag, Dienstag, u. s. w. anzeigt, der Rest 0 aber den Sonnabend.

Und für das gegenwärtige Jahrhundert, wenn u das Jahr desselben (mit Hinweglassung der ersten beiden Ziffern 18) bezeichnet:

im julianischen Kalender

vom 1. Jan.—29. Febr.	vom 1. März—31. Dec.
$h = \left(\frac{u+\left(\frac{u-1}{4}\right)_q+m+3}{7}\right)_r$	$h = \left(\frac{u+\left(\frac{u}{4}\right)_q+m+3}{7}\right)_r$

im gregorianischen Kalender

vom 1. Jan.—29. Febr.	vom 1. März—31. Dec.
$h = \left(\frac{u+\left(\frac{u-1}{4}\right)_q+m+5}{7}\right)_r$	$h = \left(\frac{u+\left(\frac{u}{4}\right)_q+m+5}{7}\right)_r$.

16. Beispiele.

Shakespeare ist am 23. April 1564 geboren und an demselben Datum im Jahre 1616 gestorben. An welchem Wochentage.

Hier ist für den 23. April aus Taf. I. $m = 6$. Mithin, da beide Tage dem julianischen Kalender angehören:

für das Jahr 1564	*für das Jahr 1616*
$h = \left(\frac{1564+\left(\frac{1564}{4}\right)_q+6}{7}\right)_r = 1$,	$h = \left(\frac{1616+\left(\frac{1616}{4}\right)_q+6}{7}\right)_r = 3$,
ein Sonntag. Es ist der Sonntag Jubilate, da Ostern damals auf den 2. April traf.	ein Dienstag. Es ist der Dienstag nach Jubilate, da Ostern a. St. damals auf den 31. März traf.

17. **Zweite Aufgabe.** Wenn Monatstag und Wochentag gegeben sind, innerhalb eines bestimmten Jahrhunderts nach Chr. Geb. die Jahre zu finden, in welchen jene zusammentreffen.

Es sei das $(s+1)$ste das in Rede stehende Jahrhundert, welches gerechnet wird vom ersten März des Jahres $100s$ bis zum letzten Febr. des Jahres $100(s+1)$, und h die Zahl des gegebenen Wochentages (für den Sonntag, $=1$ u. s. w. für den Sonnabend, $=7$); so nehme man aus Taf. I. für den gegebenen Monatstag das zugehörige n und bilde:

im *julian. Kalender*	im *gregor. Kalender*
$\left(\frac{n+h+s+2}{7}\right)_r = \delta$	$\left(\frac{n+h+2s-\left(\frac{s}{4}\right)_q}{7}\right)_r = \delta$

und für das gegenwärtige Jahrhundert

$\left(\frac{n+h+6}{7}\right)_r = \delta$	$\left(\frac{n+h+4}{7}\right)_r = \delta;$

nehme dann gleicherweise in beiden Kalendern, für ein Datum

vom 1. Jan. bis 29. Febr. aus Taf. II.	vom 1. März bis 31. Dec. aus Taf. III.

für δ die zugehörigen vier Zahlen, durch c bezeichnet; und addire jeden dieser Werthe von c zu jeder der Zahlen 28, 56, 84 (der letzten nur, 1) wenn $c<16$; 2) wenn $c=16$ und der Monatstag vor dem ersten März liegt). So sind sowohl jene aus Taf. II. oder III. entnommenen Zahlen, als auch die so gefundenen Summen, jede zu $100s$ addirt, die gesuchten Jahre.

18. Beispiele.

1. Wann trifft im gegenwärtigen Jahrhundert nach dem gregor. Kalender der Tag der heiligen drei Könige (Jan. 6) auf einen Sonntag?

Hier ist $h=1$, sodann aus Taf. I. $n=1$; also $\delta=\left(\frac{1+1+4}{7}\right)_r=6.$ Aus Taf. II. erhält man für $\delta=6$, folgende Werthe für c:

	5,	11,	22,	28;
und diese addirt zu 28:	33,	39,	50,	56
zu 56:	61,	67,	78,	84
zu 84:	89,	95.		

Dies sind die gesuchten Jahre von 1805 an bis 1895.

2. Wann trifft im gegenwärtigen Jahrhundert nach dem gregor. Kalender das Weihnachtsfest (Dec. 25) auf einen Sonntag?

Hier ist $h = 1$, sodann aus Taf. I. $n = 5$; also $\delta = \left(\frac{5+1+4}{7}\right)_r = 3$.

Aus Taf. III. erhält man für $\delta = 3$ folgende Werthe für c:

	3,	8,	14,	25;
und diese addirt zu 28:	31,	36,	42,	53
zu 56:	59,	64,	70,	81
zu 84:	87,	92,	98.	

Dies sind die gesuchten Jahre von 1803 bis 1898.

19. Dritte Aufgabe. Berechnung des Osterfestes.

1. Allgemein, *im julianischen Kalender.*

Es sei die Jahreszahl t, so bilde man:

$$\left(\frac{t}{19}\right)_r = a \qquad \left(\frac{t+\left(\frac{t}{4}\right)_q}{7}\right)_r = k$$

und gehe mit diesen Werthen von a und k in Taf. IV. ein; so giebt diese unmittelbar das Datum des Osterfestes.

2. *Im gregorianischen Kalender,* für das 16te bis 19te Jahrhundert.

Es sei u das gegebene Jahr eines dieser Jahrhunderte (mit Hinweglassung der beiden ersten Ziffern); so bilde man:

für 1583 bis 1599

$$\left(\frac{u+14}{19}\right)_r = a \qquad \left(\frac{u+\left(\frac{u}{4}\right)_q+1}{7}\right)_r = k$$

für 1600 bis 1699

$$\left(\frac{u}{19}\right)_r = a \qquad \left(\frac{u+\left(\frac{u}{4}\right)_q}{7}\right)_r = k$$

und gehe mit diesen Werthen von a und k in Taf. V. ein;

für 1700 bis 1799

$$\left(\frac{u+14}{19}\right)_r = a \qquad \left(\frac{u+\left(\frac{u}{4}\right)_q+2}{7}\right)_r = k$$

für 1800 bis 1899

$$\left(\frac{u}{19}\right)_r = a \qquad \left(\frac{u+\left(\frac{u}{4}\right)_q}{7}\right) = k$$

und gehe mit diesen Werthen von a und k in Taf. VI. ein;

so giebt jedesmal die Tafel unmittelbar das Datum des Osterfestes.

Diese Tafeln sind mit Vorbedacht so eingerichtet, dafs für das siebenzehnte und neunzehnte Jahrhundert n. St., wie für den julianischen Kalender überhaupt, der Zähler in der Gleichung für a nur ein Glied, in der Gleichung für k nur zwei Glieder enthält.

20. Beispiele.

Im julianischen Kalender.

1. Für das julianische Osterdatum sind schon oben (§. 14, 1) einige Beispiele nach §. 19, 1. berechnet; nehmlich das Osterfest der Jahre 141, 142, 143 n. Chr.

2. Auf das Pfingstfest des Jahres 431 war das dritte ökumenische Concil nach Ephesus berufen. Auf welches Datum?

Für das Datum des Osterfestes hat man, da $t = 431$:

$$a = \left(\frac{431}{19}\right)_r = 13 \qquad k = \left(\frac{431 + \left(\frac{431}{4}\right)_q}{7}\right)_r = 6;$$

also aus Taf. IV. Ostern am 19. April. Demnach Pfingsten 49 Tage später, am 7. Juni.

Beide Tage werden bemerkt von Petavius *Theol. dogm. T. IV. Par. 1650. f. Lib. I. c. 8. §. 1. p. 59.* Chr. Lupus *Opp. T. II. Venet. 1724. f. p. 8. col. 1.* Garnier *Marii Mercator. Opp. T. II. Par. 1673. f. Praef. p. XXIV. XXIII.* Pagi *Critic. a. 431. n. 11. 12. T. II. Colon. Allobr. 1705. f. p. 229.* Sam. Basnage *Annal. a. 431. n. 6. T. III. Roterod. 1706. f. p. 343.* Tillemont *Mémoires p. s. à l'hist. eccles. T. XIV. Par. 1709. 4. p. 377.* Walch *Historie der Ketzereien Th. V. Leipz. 1770. 8. S. 462. §. XXVII, 1. Anm. 1.* Der sonst so genaue Mann hat sich aber *Ebendas. §. XXVI, III. Anm. 1. S. 459.* versehen, indem er den 7. Mai als den Pfingstag bezeichnet, an welchem das Concil eröffnet werden sollte.

Daſs Pfingsten in dem Jahre wirklich am 7. Juni gefeiert ist, läſst sich actenmäſsig darthun, — jedoch nur auf einem Umwege, wodurch die einfache chronologische Frage Interesse erhält, das um so gröſser ist, da die auf jenes Fest bezogene Eröffnung des Concils vermöge des Zeitpunkts, in welchem sie erfolgte, von entscheidender Wichtigkeit für den weitern Verlauf der nestorianischen Streitigkeiten ist, die auf diesem Concil erledigt werden sollten.

Es hängt alles ab von dem Tage der Ankunft der entgegengesetzten Partheien, der ägyptischen unter Cyrillus, Bischof von Alexandrien und der morgenländischen unter Johannes, Bischof von Antiochien.

Folgende chronologischen Data ergeben sich aus den Urkunden.

2. Wann trifft im gegenwärtigen Jahrhundert nach dem gregor. alender das Weihnachtsfest (Dec. 25) auf einen Sonntag?

Hier ist $h = 1$, sodann aus Taf. I. $n = 5$; also $\delta = \left(\frac{5+1+4}{7}\right)_r = 3$.

Aus Taf. III. erhält man für $\delta = 3$ folgende Werthe für c:

	3,	8,	14,	25;
und diese addirt zu 28:	31,	36,	42,	53
zu 56:	59,	64,	70,	81
zu 84:	87,	92,	98.	

Dies sind die gesuchten Jahre von 1803 bis 1898.

19. Dritte Aufgabe. Berechnung des Osterfestes.

1. Allgemein, *im julianischen Kalender*.

Es sei die Jahreszahl t, so bilde man:

$$\left(\frac{t}{19}\right)_r = a \qquad \left(\frac{t+\left(\frac{t}{4}\right)_q}{7}\right)_r = k$$

und gehe mit diesen Werthen von a und k in Taf. IV. ein; so giebt die unmittelbar das Datum des Osterfestes.

2. *Im gregorianischen Kalender*, für das 16te bis 19te Jahrhund

Es sei u das gegebene Jahr eines dieser Jahrhunderte (mit weglassung der beiden ersten Ziffern); so bilde man:

für 1583 bis 1599

$$\left(\frac{u+14}{19}\right)_r = a \qquad \left(\frac{u+\left(\frac{u}{4}\right)_q+1}{7}\right)_r = k$$

für 1600 bis 1699

$$\left(\frac{u}{19}\right)_r = a \qquad \left(\frac{u+\left(\frac{u}{4}\right)_q}{7}\right)_r$$

und gehe mit diesen Werthen von a und k in Taf. V. ein;

für 1700 bis 1799

$$\left(\frac{u+14}{19}\right)_r = a \qquad \left(\frac{u+\left(\frac{u}{4}\right)_q+2}{7}\right)_r = k$$

für 1800 bis 189

$$\left(\frac{u}{19}\right)_r = a \qquad \left(\frac{u+\left(\frac{u}{4}\right.}{7}\right.$$

und gehe mit diesen Werthen von a und k in Taf. VI. ein; so giebt jedesmal die Tafel unmittelbar das Datum des

Diese Tafeln sind mit Vorbedacht so eingerichtet, benzehnte und neunzehnte Jahrhundert n. St., wie Kalender überhaupt, der Zähler in der Gleichung für der Gleichung für k nur zwei Glieder enthält.

Unter dem 19. November 430 beriefen die Kaiser Theodosius II. und Valentinian III. ein allgemeines Concil nach Ephesus, sich zu versammeln *nach dem nächsten Osterfest, am heiligen Pfingsttage.* Dieses Ausschreiben an die Metropoliten ist erhalten in den Acten des Concils. *Mansi Concil. nov. et ampl. Collect. T. IV. (p. 1129. C) p. 1113. C.* lat. *Ibid. T. V. p. 532. B.*

Nestorius, Bischof von Constantinopel, der es am nächsten hatte, traf *gleich nach dem Osterfeste* in Ephesus ein, wo er schon viele Bischöfe versammelt fand. Socrat. *Hist. eccles. Lib. VII. c. 34. ed. Reading. p. 383.* vergl. Evagr. *Hist. eccles. Lib. I. c. 3. p. 252.* Liberat. *Breviar. c. 5. Mansi T. IX. p. 665. C.*

Cyrillus, Bischof von Alexandrien, kam *noch vor Pfingsten* in Ephesus an, wie er selbst sagt *ep. ad quosdam de clero Constant. Mansi T. IV. p. 1229. C.* vergl. Evagr. *Hist. eccles. Lib. I. c. 3. p. 253.*

Juvenalis, Bischof von Jerusalem, der zur ägyptischen Parthei hielt, traf erst *den 5. Tag nach Pfingsten* ein. Socrat. *H. e. Lib. VII. c. 34. p. 383.*

Nestorius äufserte sich im Privatgespräch mit Bischöfen der ägyptischen Parthei: „ein Kind von zwei oder drei Monaten nenne er nicht Gott", *drei Tage vor dem Concil.* Conc. Ephes. *relat. ad imperat. Mansi T. IV. p. 1240. B.* Auf diesen Vorgang, indem man ihn mit Unrecht für öffentlich nahm, bezieht sich die Angabe späterer Griechen, das ephesinische Concil (das erst am 22. Juni eröffnet wurde) sei *am 20. Juni* zusammengetreten. Theophan. *Chronograph. p. 77. C. ed. Bonn. Vol. I. p. 138. sq.* Nicephor. *Hist. eccles. Lib. XIV. c. 34. T. II. p. 512. D. 513. B.*

Als Cyrillus beschlossen hatte die Versammlung zu eröffnen und den Nestorius zur Theilnahme aufforderte, *am Tage vor der wirklichen Eröffnung,* Conc. Ephes. *relat. ad imperat. Mansi T. IV. p. 1237. B.; an demselben* übergaben 68 Bischöfe eine Protestation gegen die Eröffnung der Kirchenversammlung vor Ankunft des Johannes und einiger abendländischen Bischöfe. *Synodic. c. 7. Mansi T. V. p. 765. A.*

Unter den Protestirenden sind auch Alexander Bischof von Apamea und Alexander Bischof von Hierapolis: ihre Unterschriften a. a. O. *p. 766. A. C.* Sie waren von Johannes vorausgesandt, in dessen Auftrag sie, nach dem Vorgeben des Cyrillus, diesem anheimgegeben haben sollen, ohne länger auf ihn zu warten, zur Sache zu schreiten. Wenn aber zu-

gleich ausgesagt wird, sie seien *16 Tage nach* dem festgesetzten Zeitpunkt angekommen, Conc. Ephes. *ep. ad Caelestin. Mansi T. IV. p. 1332. B.* Cyrill. *Apologet. ad Theodos. Ibid. T. V. p. 241. A.*[1]), das ist, wie gleich bezeugt werden wird, am Tage der Eröffnung des Concils durch Cyrillus (22. Juni); so steht dies mit ihrer Unterschrift vom vorigen Tage in Widerspruch: — so dafs in der Angabe des Cyrillus ein Fehler sein mufs. Das ist auch die Meinung von Tillemont *Mém. T. XIV. p. 764.*, den Walch *Hist. der Ketzer. Th. V. S. 476. f.* mifsverstanden zu haben scheint. Dadurch tritt in chronologischer Hinsicht der Vorwurf einer simulirten Beschönigung, den Walch gegen Cyrillus erhebt, aufser Kraft.

Nichtsdestoweniger eröffnete Cyrillus die Versammlung vor Ankunft der morgenländischen Bischöfe. Das Datum dieses entscheidenden Tages ist auf dreifache Weise angegeben: in dem Protokoll selbst *X. Kal. Julias*[2]), s. *Conc. Ephes. Act. I. Mansi T. IV. p. 1124. A.*[3, a]) lat. *T. V. p. 529. C.*, ebenso in der Protestation des kaiserlichen Commissarius Candidian von demselben Tage *Synodic. c. 9. Ibid. p. 772. A.*; sodann *der 22. Juni nach dem römischen Kalender,* in dem Synodalschreiben an die Kaiser, *Mansi T. IV. p. 1237. B.*[3, b]); endlich *der 28. Payni nach dem alexandrinischen Kalender,* in den Briefen des Cyrillus *ep. ad quosd. de clero Constantin. p. 1229. D.*[3, c]) *ep. ad clerum populumque Alexandr. p. 1241. D.* — Von dieser Versammlung ward Nestorius entsetzt an demselben Tage: das Datum, *der 22. Juni,* in dem Synodalschreiben an Nestorius, „den neuen Judas" *p. 1228. A.* Den 28. Juni als Datum dieser Verhandlungen nennt Socrat. *H. e. Lib. VII. c. 34. p. 384.*

Zugleich erfahren wir, dafs dies *16 Tage nach Pfingsten,* dem festgesetzten Eröffnungstage gewesen ist: zuerst aus dem Protokoll dieser Versammlung durch die Aussage des Memnon, Bischofs von Ephesus,

---

1) Conc. Ephes. ep.: *μεθ' ἡμέραν ἑκκαιδεκάτην προέδραμόν τινες τῶν σὺν αὐτῷ ἐπισκόπων, μητροπολῖται δύο.* Cyrill. Apolog.: *ἕκτης γὰρ ἐπὶ δεκάτην διαγενομένης ἡμέρας, ἧκόν τινες μόλις τῶν σὺν αὐτῷ, τῶν ἄλλων οἱ προὔχοντες, μητροπολῖται δὲ οὗτοι.*

2) Der Anfang des Protokolls ist in die Acten der ephesinischen Räubersynode (449) und von da in die Acten des chalcedonischen Concils (451) übergegangen, aber mit abweichendem Datum. *Conc. Chalced. Act. I. Mansi T. VI. p. 872. A.*: *τῇ πρὸ ἕνδεκα καλανδῶν Αὐγούστων, ἥτις ἐστὶ κατ' Αἰγυπτίους Ἐπιφὶ κη'*: beides der 22. Juli statt des Juni.

3, a) *πρὸ δέκα καλανδῶν Ἰουλίων.* b) *ἐν τῇ ἡμέρᾳ μηνὸς Ἰουνίου δευτέρᾳ καὶ εἰκοστῇ κατὰ Ῥωμαίους.* c) *τῇ κατὰ Ἀλεξανδρεῖς ὀγδόῃ καὶ εἰκάδι τοῦ Παυνὶ μηνός.*

Mansi T. IV. p. 1129. D.[1, a]) lat. *T. V. p. 533. A.;* dieselbe Aussage mitgetheilt von Evagrius *H. e. Lib. I. c. 4. p. 254.* (wiewohl er selbst *Ibid. p. 253. 15 Tage* zählt). Eben so heifst es in dem Synodalschreiben an die Kaiser, *Mansi T. IV. p. 1237. A.* (zweimal)[1, b]) und einem spätern, *p. 1461. A.* lat. *T. V. p. 651. D. 652. D.* und in dem Synodalschreiben an den röm. Bischof Cälestinus, *T. IV. p. 1332. A.*[1, c]). Desgleichen in Cyrilli *ep. ad. quosd. de cler. Constant. p. 1229. C.*

Ibas, späterhin Bischof von Edessa kam *post duos dies damnationis Nestorii* zu Ephesus an, wie er selbst sagt *ep. ad Marin* in *Conc. Chalced. Act. X. Mansi T. VII. p. 248. C.* auch in *Facund. Hermian. Pro def. trium capit. Lib. VII. c. 2. Galland. Bibl. Patr. T. XI. p. 734. col. 1. D.* Wenn man aus einer Stelle eben des Facundus[2]) den Schlufs gemacht hat, Ibas sei gar nicht zu Ephesus gewesen; so zeugt der Zusammenhang derselben (s. auch a. a. O. *col. 1. D. col. 2. A.*) vielmehr für das Gegentheil, vergl. Garnier *Marii Mercat. Opp. T. II. p. 252. sq.* Lupus *Opp. T. VII. p. 30. col. 2. sq.* Wenn aber, wie aus dem Zusammenhang im Briefe des Ibas hervorzugehen scheint, Ibas gleichzeitig mit dem Bischof Johannes angekommen ist; so mufs wohl die Zweizahl der Tage ein Gedächtnifsfehler (nicht eine Lüge, die Garnier ihm Schuld giebt) sein, da die spätere Ankunft des Johannes keinem Zweifel unterworfen ist.

Johannes, Bischof von Antiochien, an der Spitze der morgenländischen Bischöfe, der durch verschiedene Umstände zurückgehalten war, hatte nach einer ununterbrochenen Reise von 30 Tagen seine nahe Ankunft dem Cyrillus, die Verzögerung entschuldigend, angekündigt: damals hatte er noch 5 oder 6 Tagereisen vor sich, wie aus dem Briefe selbst erhellt bei *Mansi T. IV. p. 1121. B.* Dieses Briefes, den Johannes *positus in sexta mansione* geschrieben habe, gedenkt Liberatus *Breviar. c. 5. Mansi T. IX. p. 665. E.* — Zwei Tage vor der Versammlung schrieb Cyrillus an Johannes, die ganze Synode warte auf seine Ankunft, Episcop. orient. *ep.*

[1, a]) *ἀπὸ τῆς ὡρισμένης προθεσμίας παρῆλθον ἡμέραι δεκαέξ.* [b]) *μετὰ δὲ δεκαὲξ ὅλας ἡμέρας ἀπὸ τῆς ἁγίας πεντηκοστῆς ἀριθμουμένας συνεκροτήσαμεν τὴν ἀκρόασιν.* [c]) *ὑπερεθέμεθα τὸ συνέδριον μετὰ τὴν ὁρισθεῖσαν ἡμέραν τῆς ἁγίας πεντηκοστῆς ἐφ' ὅλαις δέκα καὶ ἓξ ἡμέραις.*

[2]) Facund. *l. c. Lib. VII. c. 3. p. 735. col.* 1. *A.: Ibas autem non interfuit Ephesino concilio, in quo Nestorius est damnatus:* d. h. er war nicht bei jener ersten Versammlung der ägyptischen Parthei, wie er ja selbst sagt, dafs er zwei Tage später gekommen.

ad imperat. Mansi T. IV. p. 1272. C.; — worauf dem Cyrillus kund wurde, dafs die morgenländischen Bischöfe noch 3 Stationen entfernt wären, Episcop. orient. *ep. ad reginas p. 1277. E.*

Endlich traf Johannes, nachdem er von Antiochien bis Ephesus zu Lande 40 Tagereisen zurückgelegt hatte (Episcop. orient. *ep. ad. imperat. Mansi T. IV. p. 1272. E.*), in Ephesus ein: *21 Tage nach* dem festgesetzten Termin, laut des Synodalschreibens an die Kaiser vom 1. Juli, *p. 1424. B.*[1]); wogegen in einem spätern Synodalschreiben an die Kaiser, *p. 1461. A.*[2]) von *22. Tagen* Verspätung die Rede ist. Er hielt stehenden Fufses (Conc. Ephes. *ep. ad Caelestin. p. 1332. B.*) eine Versammlung der morgenländischen Bischöfe, in der Cyrillus und Memnon entsetzt wurden. — Dies war *5 Tage nach* der von Cyrill gehaltenen Versammlung, wie zu Anfang jener zweiten Versammlung Candidian aussagt, in den *Act. conciliabuli Ephes. p. 1260. D.*[3]), der selbst in der ersten Versammlung unter Cyrillus vergebens darauf gedrungen hatte, man möge *nur noch 4 Tage* auf die Ankunft der morgenländischen Bischöfe warten, s. seine *Contestatio* in dem *Synodic. c. 9. Mansi T. V. p. 771. B. Fünf Tage nach* Entsetzung des Nestorius sagt auch Evagrius *H. e. Lib. I. c. 5. p. 254.* Dagegen läfst das *Synodic. c. 11. p. 773. A.* den Johannes *post triduum* ankommen, und hat zum Eingang des Protokolls der von demselben gehaltenen Versammlung, *p. 773. B.* das Datum VI. Kal. Jul., den 26. Juni. Auch Theophanes *Chronogr. p. 78. A. ed. Bonn. Vol. I. p. 139.* und Nicephorus *Hist. eccles. Lib. XIV. c. 35. T. II. p. 514.* sprechen von *3 Tagen*[4]). *Post biduum* heifst es bei Liberatus *Breviar. c. 6. Mansi T. IX. p. 666. A.* — Aufserdem erhalten wir noch eine Bestimmung des Wochentages oder vielmehr eine Grenze für denselben. Am *Sonnabend Nachmittags (sabbatho meridie, dum jam advesperasceret)* war schon die Absetzung über den Cyrillus und Memnon ausgesprochen und überall angeschlagen; demgemäfs Johannes, da er erfahren hatte, diese von ihm

---

[1]) *τὴν ἁγίαν ἀνεβάλετο σύνοδον ἐπὶ εἴκοσι καὶ μίαν ἡμέραν μετὰ τὴν δεδομένην προθεσμίαν.*

[2]) *μετὰ τὴν εἰκοστὴν δευτέραν τῆς ῥηθείσης προθεσμίας μόλις φθάσας ἡμέραν.* Lat. *Ibid. T. V. p. 654. A.* nach der *ed. vet.* Dagegen abweichend *p. 652. D.* nach der *ed. Basil.: post vicesimum diem praestituti termini.*

[3]) *πρὸ τούτων ἡμερῶν ε΄... συναχθέντες.*

[4]) Theophan.: *ἦλθεν μετὰ τρεῖς ἡμέρας Ἰωάννης.* Nicephor.: *ὑστερήσας τρίτην ἡμέραν τῆς καθαιρέσεως.*

entsetzten Bischöfe wollten am folgenden Sonntage feierlichen Gottesdienst halten, den Candidian schriftlich aufforderte, sie davon abzuhalten, s. das Protokoll über das Resultat dieser Verhandlungen in dem *Synodic. c. 12. Mansi T. V. p. 774. A. D. 775. A.* Es ist kaum zu bezweifeln, dafs dies der nächste Sonnabend nach der Absetzung des Nestorius gewesen ist: erstens, weil die ägyptische Parthei am Sonntage nach Eröffnung ihrer Synode das Abendmahl wird feiern gewollt haben; zweitens, weil von der morgenländischen Parthei, die um die Zeit dieses Sonnabends mufs angekommen sein und den Cyrillus sogleich entsetzt hatte, diese Absetzung eben erst und nicht schon seit einer Woche ausgesprochen war, wie wohl deutlich aus dem angeführten Protokoll hervorgeht.

Um nun hieraus das chronologische Resultat zu ziehen, so ersieht man:

1) Cyrillus hat das Concil eröffnet am X. Kal. Jul. = 28. Payni = 22. Juni. Alle drei Angaben stimmen mit einander, da der erste Payni stets auf den 26. Mai trifft. — Wenn Socrates den 28. Juni nennt, so hat er höchst wahrscheinlich nur das römische mit dem ägyptischen Datum verwechselt, oder vielmehr beide Monate, Juni und Payni für identisch genommen.

Der Wochentag des 22. Junius im Jahre 431 n. Chr. ist nach §. 15, 1., da $t = 431$ und aus Taf. I. $m = 3$:

$$h = \left(\frac{431 + \left(\frac{431}{4}\right)_q + 3}{7}\right)_r = 2, \text{ ein Montag.}$$

2) Was die Epoche der Ankunft des Johannes und der von ihm gehaltenen Versammlung betrifft: da diese 21 Tage nach dem 7. Juni, dem festgesetzten Eröffnungstage, — wie gleich erläutert werden soll — erfolgte, so kann sie *nicht früher* sein, als der 27. Juni (sind volle Tage gezählt, so ist es der 28. Juni); und da sie 5 Tage nach dem 22. Juni, dem Datum der Versammlung unter Cyrillus, erfolgte, so kann sie *nicht später* sein, als der 27. Juni (sind laufende Tage gezählt, so ist es der 26. Juni): später auch deshalb nicht, weil der 27. Juni ein Sonnabend *ist*, und zwar der Sonnabend nach der Absetzung des Nestorius. Hieraus folgt, dafs Johannes Bischof von Antiochien am Sonnabend den 27. Juni Vormittags zu Ephesus angekommen ist, da er denn sogleich eine Versammlung der morgenländischen Bischöfe gehalten und die Häupter der ägyp-

tischen Parthei abgesetzt hat: worauf die weitern Ereignisse des Sonnabends, wie vorhin erwähnt, vorgefallen sind.

Ich verwerfe also einerseits die Angabe der 22 (statt 21) Tage von dem festgesetzten Tage bis auf die Ankunft des Johannes in dem spätern Synodalschreiben, die nicht nur mit der frühern Angabe derselben Synode, sondern auch mit der zu Protokoll genommenen Aussage Candidians in Widerspruch ist. Auf der andern Seite ist offenbar unrichtig die Annahme einer Differenz von nur 2 oder 3 Tagen zwischen der ägyptischen Versammlung und der Ankunft des Johannes in Schriften des sechsten Jahrhunderts: ihre Quelle ist wahrscheinlich der erwähnte Ausspruch im Brief des Ibas; auch mag sie aufserdem auf einem falschen Schlufs beruhen aus der Nachricht, dafs Johannes noch drei Tagereisen von Ephesus entfernt gewesen, vergl. *Synodic. c. 7.* Ueberschrift. *Mansi T. V. p. 765. A.*

Die Neuern sind über dieses Datum nicht einig, zum Theil mit sich selbst in Widerspruch. Petavius hat in der *Doctr. temp. Lib. XIII. T. II. Par. 1627. f. p. 780.* den 27. Juni angenommen (wegen der 5 Tage), später in der *Theolog. dogm. T. IV. Lib. I. c. 8. §. 4. p. 40.,* wo er näher auf die Sache eingeht, den 28. Juni (wegen der 22 Tage). Dagegen entscheidet sich Tillemont *Mém. T. XIV. p. 768.,* der ausführlicher die Frage erörtert, für den 27. oder 26. Juni (auch mit Rücksicht auf die Vorfälle des Sonnabends). Aus derselben Rücksicht bezeichnet Lupus *Opp. T. VII. p. 43. col. 1. cf. p. 42. col. 1.* Freitag den 26. Juni als len Tag der Ankunft des Johannes, bald darauf aber *p. 65. c. 1.* Sonnabend den 27. Juni. Für Freitag den 26. Juni spricht sich Sam. Basnage aus *Annal. a. 431. c. 20. 21. T. III. p. 350.* (gegen Baronius, der den 27. Juni annimmt). Sonnabend den 26. Juni sagt Garnier *Marii Mercator. Opp. T. II. Praefat. p. XXVII.,* durch ein Versehen, er meint den 27sten, siehe *p. LVII.;* aber Salig *De Eutychian. ante Eutych. Wolffenb. 1723. 4. p. 244.* hat es ihm nachgesagt. Walch *Hist. der Ketzer. Th. V. S. 491.* erklärt den Tag der Ankunft des Johannes für sehr ungewifs, es habe aber keinen Zweifel, dafs es entweder der 27. oder der 28. Juni sei. Sonnabend den 27. Juni hat Pagi *Critic. a. 431. n. 22. T. II. p. 231. sq.* Dasselbe Datum für das ephesinische Concil unter Johannes ist angesetzt von Fabricius *Bibl. Gr. ed. Harl. Vol. XII. p. 638.* und in der *Art de vérifier les dates. ed. 3. 1783. f. T. I. P. 2. p. 145.*

3) Das Pfingstfest dieses Jahres ist gefeiert 16 Tage vor der Eröffnung des Concils durch Cyrillus, die am 22. Juni, einem Montag, erfolgte. Indem man also von da zwei Wochen und was darüber ist bis auf den Pfingstsonntag zurückrechnet, so kann das Datum desselben kein anderes sein, als Sonntag der 7. Juni: — von wo bis zum 22. Juni 15 volle Tage sind, wie Evagrius hat (vgl. Lupus *Opp. T. II. p. 8. col. 2.*); während alle übrigen Aussagen, die von 16 Tagen sprechen, laufende Tage (vergl. Pagi *Critic. a. 431. n. 12. T. II. p. 229.*) zählen.

Dieses nun gilt zunächst nur von der Feier des Pfingstfestes nach alexandrinischer Rechnung, in der griechischen Kirche.

Stimmte in der lateinischen Kirche das Datum damit überein?

Nach dem ältern 84jährigen Cyclus der Lateiner allerdings nicht, da ihm zufolge im Jahre 431 Ostern auf den 12. April (s. Ideler *Handb. der Chronol. Bd. II. S. 251.*), also Pfingsten auf den 31. Mai traf, — eine Woche früher, als nach alexandrinischer Rechnung. Wohl aber nach der wahrscheinlich durch Prosper Aquitanus vorgenommenen Verbesserung jenes Cyclus (s. Ideler *a. a. O. S. 271.*), die wahrscheinlich damals in Kraft bestand. Und gerade die Ereignisse dieses Jahres (431) dienen dazu, die letztere Wahrscheinlichkeit zu bestätigen.

Was die Theilnahme des Abendlandes an dem allgemeinen Concil zu Ephesus betrifft, so war in der nordafricanischen Kirche namentlich Augustinus, Bischof von Hipporegius, vom Kaiser dazu eingeladen. Der aber war schon verstorben, als das Schreiben ankam. So nahm denn Capreolus, Bischof von Carthago, die Berufung an; aber die politischen Verhältnisse unter den Vandalen hinderten den Zusammentritt einer Synode, welche Abgeordnete zum Concil wählen sollte. Capreolus sandte also nur seinen Diaconus Besulas mit einem Schreiben an das ephesinische Concil, in welchem erwähnt wird, das kaiserliche Rescript sei erst *in diebus Paschae* angekommen. Capreol. *ep. ad concil. Ephes.* bei *Mansi T. IV. p. 1210. A.*

Von Seiten der römischen Kirche aber erschienen auf dem Concil als Abgeordnete des Bischofs Cälestinus die Bischöfe Arcadius und Projectus mit dem Presbyter Philippus. Das Commonitorium des Cälestinus für dieselben ist unter dem 8. Mai 431 ausgefertigt, bei *Mansi T. IV. p. 556. C.* Aufserdem sind noch andere Schreiben des römischen Bischofs in Sachen des ephesinischen Concils vorhanden: an den Cyrillus vom 7. Mai,

p. 1292. D., an das Concil selbst vom 8. Mai, *p. 1287. B.* und an den Kaiser Theodosius vom 15. Mai, *p. 1291. D.* Jene Abgeordneten kamen zu Ephesus an und traten sogleich in die Versammlung der ägyptischen Parthei ein, am 10. Juli (VI. Id. Jul., nach den Aegyptern am 16. Epiphi), laut des Protokolls *Conc. Ephes. Act. II. Mansi T. IV. p. 1280. D.*

In allen diesen Actenstücken und Verhandlungen aber ist keine Spur ersichtlich, dafs das Osterfest, demnach auch das Pfingstfest dieses Jahres im Abendlande zu anderer Zeit, als im Morgenlande gefeiert worden: eine Differenz, die doch wohl zur Sprache kommen mufste, wenn der Kaiser das Concil auf das Pfingstfest dieses Jahres berief. Ein Grund anzunehmen, dafs sie nicht vorhanden war.

Da nun das nächst vorhergehende Osterfest, welches nach der Anordnung des Cyclus durch Prosper ein anderes Datum erhalten hätte, 10 Jahre früher ist, im Jahre 421 (in welchem nach dem ältern 84jährigen Cyclus der 3. April, übereinstimmend mit den Alexandrinern; nach Prosper der 10. April der Ostertag ist), Prosper aber kaum früher als 430 seinen Cyclus herausgegeben hat, vgl. (van der Hagen) *Observat. in Prosperi Aquit. Chronic. Amstel. 1733. 4. p. 216: aetas etiam Prosperi hoc permittit, ut circa annum Christi 430 cyclum suum jam ediderit. cf. p. 180.*; — so wird wahrscheinlich, dafs im Jahre 431 zuerst die durch Prosper gegebene Anordnung des 84jährigen Cyclus, in der Abweichung von dem bisherigen Osterkanon, die sie herbeiführte, in Kraft getreten ist.

Im julianischen und gregorianischen Kalender.

3. Es wird das Osterfest des nächsten Jahres 1842 im alten und neuen Stil gesucht.

Hier ist

im *julian.* Kalender	im *gregor.* Kalender
da $t = 1842$,	da $u = 42$,
$a = \left(\frac{1842}{19}\right)_r = 18$	$a = \left(\frac{42}{19}\right)_r = 4$
$k = \left(\frac{1842+\left(\frac{1842}{4}\right)_q}{7}\right)_r = 6.$	$k = \left(\frac{42+\left(\frac{42}{4}\right)_q}{7}\right)_r = 3.$
Also aus Taf. IV. das julian. Osterfest am 19. April.	Also aus Taf. VI. das gregor. Osterfest am 27. März.

21. Vierte Aufgabe. **Wenn das Datum des Osterfestes gegeben ist, die Jahre zu finden, in welchen es auf jenes Datum trifft.**

1. Nach der oben §. 12, 1. gegebenen allgemeinen Formel (XXVI) für den julianischen Kalender läfst sich leicht eine Tafel entwerfen mit den Argumenten a und c; wodurch man unmittelbar bis zum Jahre 532 durch die aus dem Osterdatum berechneten Werthe von a und c das entsprechende Jahr findet. Da schon Lambert *Berl. Astr. Jahrb. für 1778. Th. II. S. 220.* vgl. *S. 222.* eine solche Tafel gegeben hat, so wiederhole ich sie hier nicht.

2. Hiernächst werde die Aufgabe so bestimmt, dafs innerhalb eines gegebenen Jahrhunderts die Jahre für das Osterdatum gesucht werden.

Die Tafeln VII. und VIII. dienen zur Auflösung derselben: für den julianischen Kalender allgemein; für den gregorianischen vom 16ten bis zum 22sten Jahrhundert.

Es sei das $(s+1)$ste das gegebene Jahrhundert; so dafs von $100s$ bis $100s+99$ die Jahre gesucht werden. So gehe man mit dem gegebenen Osterdatum, und *für den julianischen Kalender* unter dessen Ueberschrift, *für den gregorianischen Kalender* mit dem Werthe von s in Taf. VII. ein, die unmittelbar nicht mehr als eine (in den letzten sechs Tagen gar keine) Zahl giebt, welche a heifsen soll. Aufser der man aber noch die in den sechs vorhergehenden horizontalen Reihen derselben verticalen Reihe stehenden Zahlen ebenfalls als Werthe von a ansetzt. Man nimmt sodann aus derselben Tafel den dem gegebenen Osterdatum entsprechenden Werth von m; und bildet nun:

$$\text{für jeden Werth von } a, \quad \left(\frac{14s+a}{19}\right)_r = \alpha$$

und

im julian. Kalender	*im gregor. Kalender*
$\left(\frac{s+m+2}{7}\right)_r = \pi,$	$\left(\frac{2s-\left(\frac{s}{4}\right)_q+m}{7}\right)_r = \pi,$

wodurch man einen Werth von π, aber so viele α erhält, als a Werthe hat. Mit π und jedem Werth von α geht man in Taf. VIII. ein, welche unmittelbar in dem gegebenen $(s+1)$sten Jahrhundert das gesuchte Jahr giebt: für jedes dieser Paare α und π ein Jahr, in vier Fällen zwei Jahre; oder anzeigt, dafs ein solches in dem Fall nicht vorkommt.

22. Beispiele.

In welchen Jahren seit der Kalenderreformation (1582) bis zum Jahre 1999 nach dem gregorianischen Kalender trifft Ostern auf sein frühestes (März 22), und in welchen Jahren auf sein spätestes (April 25) Datum?

1. *Ostern am 22. März.*

Für dieses Datum ist aus Taf. VII. $m = 4$, und hat in derselben Tafel a nur je einen Werth, mit Ausnahme des zwanzigsten Jahrhunderts ($s = 19$), in welcher Columne zum 22. März gar kein a vorkommt, ein Zeichen, daſs in diesem Jahrhundert Ostern auf jenen Tag nicht treffen kann. Für die übrigen Jahrhunderte hat man die Werthe von a:

für $s = 15$ | $s = 16$

$$a = 2$$

demnach

$$\alpha = \left(\frac{14.15 + 2}{19}\right)_r = 3 \quad \Big| \quad \alpha = \left(\frac{14.16 + 2}{19}\right)_r = 17$$

$$\pi = \left(\frac{2.15 - \left(\frac{15}{4}\right)_q + 4}{7}\right)_r = 3 \quad \Big| \quad \pi = \left(\frac{2.16 - \left(\frac{16}{4}\right)_q + 4}{7}\right)_r = 4$$

für $s = 17$ | $s = 18$

$$a = 13$$

demnach

$$\alpha = \left(\frac{14.17 + 13}{19}\right)_r = 4 \quad \Big| \quad \alpha = \left(\frac{14.18 + 13}{19}\right)_r = 18$$

$$\pi = \left(\frac{2.17 - \left(\frac{17}{4}\right)_q + 4}{7}\right)_r = 6 \quad \Big| \quad \pi = \left(\frac{2.18 - \left(\frac{18}{4}\right)_q + 4}{7}\right)_r = 1.$$

Mit diesen Werthen von α und π giebt Taf VIII. das Jahr

$$u = \begin{cases} 3 \\ 98 \end{cases} \quad \Big| \quad u = 93 \quad \Big| \quad u = 61 \quad \Big| \quad u = 18.$$

Mithin trifft seit 1582 bis 1999 Ostern auf sein frühestes Datum nur in den Jahren 1598, 1693, 1761, 1818.

2. *Ostern am 25. April.*

Für dieses Datum ist aus Taf. VII. $m = 5$. Auch hier hat a nur je einen Werth, (den man in der sechsten horizontalen Columne vor der

Columne des 25. April findet), und zwar:

für $s = 15$	$s = 16$	$s = 17$	$s = 18$	$s = 19$
$a = 13$		$a = 5$		$a = 5$;
daraus folgt				
$\alpha = 16 \quad \pi = 4$	$\alpha = 9 \quad \pi = 5$	$\alpha = 15 \quad \pi = 0$	$\alpha = 10 \quad \pi = 2$	$\alpha = 5 \quad \pi = 4$
$u = 54$	$u = 66$	$u = 34$	$u = 86$	$u = 43$.

Das erste Jahr 1554 liegt noch jenseits der Kalenderreformation, nach deren Grundsätzen aber Ostern in diesem Jahre allerdings auf den 25. April (nach dem alten Stil traf es auf den 25. März) gefallen sein würde. — Sonach trifft seit 1582 bis 1999 Ostern auf sein spätestes Datum nur in den Jahren 1666, 1734, 1886, 1943.

Tafel I.

Datum	Jan. m	Jan. n	Febr. m	Febr. n	März m	März n	Apr. m	Apr. n	Mai m	Mai n	Jun. m	Jun. n	Juli m	Juli n	Aug. m	Aug. n	Sept. m	Sept. n	Oct. m	Oct. n	Nov. m	Nov. n	Dec. m	Dec. n
1	6	6	2	3	2	3	5	0	0	5	3	2	5	0	1	4	4	1	6	6	2	3	4	1
2	0	5	3	2	3	2	6	6	1	4	4	1	6	6	2	3	5	0	0	5	3	2	5	0
3	1	4	4	1	4	1	0	5	2	3	5	0	0	5	3	2	6	6	1	4	4	1	6	6
4	2	3	5	0	5	0	1	4	3	2	6	6	1	4	4	1	0	5	2	3	5	0	0	5
5	3	2	6	6	6	6	2	3	4	1	0	5	2	3	5	0	1	4	3	2	6	6	1	4
6	4	1	0	5	0	5	3	2	5	0	1	4	3	2	6	6	2	3	4	1	0	5	2	3
7	5	0	1	4	1	4	4	1	6	6	2	3	4	1	0	5	3	2	5	0	1	4	3	2
8	6	6	2	3	2	3	5	0	0	5	3	2	5	0	1	4	4	1	6	6	2	3	4	1
9	0	5	3	2	3	2	6	6	1	4	4	1	6	6	2	3	5	0	0	5	3	2	5	0
10	1	4	4	1	4	1	0	5	2	3	5	0	0	5	3	2	6	6	1	4	4	1	6	6
11	2	3	5	0	5	0	1	4	3	2	6	6	1	4	4	1	0	5	2	3	5	0	0	5
12	3	2	6	6	6	6	2	3	4	1	0	5	2	3	5	0	1	4	3	2	6	6	1	4
13	4	1	0	5	0	5	3	2	5	0	1	4	3	2	6	6	2	3	4	1	0	5	2	3
14	5	0	1	4	1	4	4	1	6	6	2	3	4	1	0	5	3	2	5	0	1	4	3	2
15	6	6	2	3	2	3	5	0	0	5	3	2	5	0	1	4	4	1	6	6	2	3	4	1
16	0	5	3	2	3	2	6	6	1	4	4	1	6	6	2	3	5	0	0	5	3	2	5	0
17	1	4	4	1	4	1	0	5	2	3	5	0	0	5	3	2	6	6	1	4	4	1	6	6
18	2	3	5	0	5	0	1	4	3	2	6	6	1	4	4	1	0	5	2	3	5	0	0	5
19	3	2	6	6	6	6	2	3	4	1	0	5	2	3	5	0	1	4	3	2	6	6	1	4
20	4	1	0	5	0	5	3	2	5	0	1	4	3	2	6	6	2	3	4	1	0	5	2	3
21	5	0	1	4	1	4	4	1	6	6	2	3	4	1	0	5	3	2	5	0	1	4	3	2
22	6	6	2	3	2	3	5	0	0	5	3	2	5	0	1	4	4	1	6	6	2	3	4	1
23	0	5	3	2	3	2	6	6	1	4	4	1	6	6	2	3	5	0	0	5	3	2	5	0
24	1	4	4	1	4	1	0	5	2	3	5	0	0	5	3	2	6	6	1	4	4	1	6	6
25	2	3	5	0	5	0	1	4	3	2	6	6	1	4	4	1	0	5	2	3	5	0	0	5
26	3	2	6	6	6	6	2	3	4	1	0	5	2	3	5	0	1	4	3	2	6	6	1	4
27	4	1	0	5	0	5	3	2	5	0	1	4	3	2	6	6	2	3	4	1	0	5	2	3
28	5	0	1	4	1	4	4	1	6	6	2	3	4	1	0	5	3	2	5	0	1	4	3	2
29	6	6	2	3	2	3	5	0	0	5	3	2	5	0	1	4	4	1	6	6	2	3	4	1
30	0	5			3	2	6	6	1	4	4	1	6	6	2	3	5	0	0	5	3	2	5	0
31	1	4			4	1			2	3			0	5	3	2			1	4			6	6

Tafel II.

d	*c*			
0	6	12	17	23
1	1	7	18	24
2	2	8	13	19
3	3	14	20	25
4	4	9	15	26
5	10	16	21	27
6	5	11	22	28

Tafel III.

d	*c*			
0	0	6	17	23
1	1	7	12	18
2	2	13	19	24
3	3	8	14	25
4	9	15	20	26
5	4	10	21	27
6	5	11	16	22

Tafel IV.

a =	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
0	11*A*	28*M*	18*A*	4*A*	28*M*	11*A*	4*A*	25*A*	11*A*	28*M*	18*A*	11*A*	28*M*	18*A*	4*A*	28*M*	11*A*	4*A*	18*A*
1	10*A*	27*M*	17*A*	3*A*	27*M*	17*A*	3*A*	24*A*	10*A*	3*A*	17*A*	10*A*	27*M*	17*A*	3*A*	27*M*	10*A*	3*A*	24*A*
2	9*A*	26*M*	16*A*	9*A*	26*M*	16*A*	2*A*	23*A*	9*A*	2*A*	16*A*	9*A*	26*M*	16*A*	2*A*	26*M*	16*A*	2*A*	23*A*
3	8*A*	1*A*	15*A*	8*A*	25*M*	15*A*	1*A*	22*A*	8*A*	1*A*	22*A*	8*A*	25*M*	15*A*	8*A*	25*M*	15*A*	1*A*	22*A*
4	7*A*	31*M*	14*A*	7*A*	24*M*	14*A*	31*M*	21*A*	14*A*	31*M*	21*A*	7*A*	31*M*	14*A*	7*A*	24*M*	14*A*	31*M*	21*A*
5	6*A*	30*M*	20*A*	6*A*	23*M*	13*A*	6*A*	20*A*	13*A*	30*M*	20*A*	6*A*	30*M*	13*A*	6*A*	23*M*	13*A*	30*M*	20*A*
6	12*A*	29*M*	19*A*	5*A*	29*M*	12*A*	5*A*	19*A*	12*A*	29*M*	19*A*	5*A*	29*M*	19*A*	5*A*	22*M*	12*A*	5*A*	19*A*

Tafel V.

a =	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
0	2*A*	23*A*	9*A*	2*A*	16*A*	9*A*	26*M*	16*A*	2*A*	23*A*	9*A*	2*A*	23*A*	9*A*	26*M*	16*A*	2*A*	26*M*	16*A*
1	1*A*	22*A*	8*A*	1*A*	15*A*	8*A*	25*M*	15*A*	1*A*	22*A*	15*A*	1*A*	22*A*	8*A*	1*A*	15*A*	8*A*	25*M*	15*A*
2	31*M*	21*A*	7*A*	31*M*	21*A*	7*A*	24*M*	14*A*	7*A*	21*A*	14*A*	31*M*	21*A*	7*A*	31*M*	14*A*	7*A*	24*M*	14*A*
3	30*M*	20*A*	13*A*	30*M*	20*A*	6*A*	30*M*	13*A*	6*A*	20*A*	13*A*	30*M*	20*A*	6*A*	30*M*	13*A*	6*A*	23*M*	13*A*
4	5*A*	19*A*	12*A*	29*M*	19*A*	5*A*	29*M*	12*A*	5*A*	19*A*	12*A*	29*M*	19*A*	12*A*	29*M*	19*A*	5*A*	22*M*	12*A*
5	4*A*	18*A*	11*A*	28*M*	18*A*	4*A*	28*M*	18*A*	4*A*	25*A*	11*A*	4*A*	18*A*	11*A*	28*M*	18*A*	4*A*	28*M*	11*A*
6	3*A*	24*A*	10*A*	27*M*	17*A*	10*A*	27*M*	17*A*	3*A*	24*A*	10*A*	3*A*	17*A*	10*A*	27*M*	17*A*	3*A*	27*M*	10*A*

Tafel VI.

a =	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
0	13*A*	30*M*	20*A*	13*A*	30*M*	20*A*	6*A*	23*M*	13*A*	6*A*	20*A*	13*A*	30*M*	20*A*	6*A*	30*M*	13*A*	6*A*	23*M*
1	12*A*	5*A*	19*A*	12*A*	29*M*	19*A*	5*A*	29*M*	12*A*	5*A*	19*A*	12*A*	29*M*	19*A*	5*A*	29*M*	19*A*	5*A*	22*M*
2	11*A*	4*A*	18*A*	11*A*	28*M*	18*A*	4*A*	28*M*	11*A*	4*A*	25*A*	11*A*	28*M*	18*A*	11*A*	28*M*	18*A*	4*A*	28*M*
3	10*A*	3*A*	24*A*	10*A*	27*M*	17*A*	3*A*	27*M*	17*A*	3*A*	24*A*	10*A*	3*A*	17*A*	10*A*	27*M*	17*A*	3*A*	27*M*
4	16*A*	2*A*	23*A*	9*A*	2*A*	16*A*	9*A*	26*M*	16*A*	2*A*	23*A*	9*A*	2*A*	16*A*	9*A*	26*M*	16*A*	2*A*	26*M*
5	15*A*	1*A*	22*A*	8*A*	1*A*	15*A*	8*A*	25*M*	15*A*	1*A*	22*A*	8*A*	1*A*	22*A*	8*A*	25*M*	15*A*	8*A*	25*M*
6	14*A*	31*M*	21*A*	7*A*	31*M*	14*A*	7*A*	24*M*	14*A*	31*M*	21*A*	14*A*	31*M*	21*A*	7*A*	31*M*	14*A*	7*A*	24*M*

Tafel VII.

Ostern	m	Julian. Kal.	Gregor. Kal. $s =$ 15 16	17 18	19 20 21
22*M*	4	15	2	13	.
23*M*	3	4	.	2	13
24*M*	2	.	10	.	2
25*M*	1	12	.	10	.
26*M*	0	1	18	.	10
27*M*	6	.	7	18	.
28*M*	5	9	.	7	18
29*M*	4	.	15	.	7
30*M*	3	17	4	15	.
31*M*	2	6	.	4	15
1*A*	1	.	12	.	4
2*A*	0	14	1	12	.
3*A*	6	3	.	1	12
4*A*	5	.	9	.	1
5*A*	4	11	.	9	.
6*A*	3	0	17	.	9
7*A*	2	.	6	17	.
8*A*	1	8	.	6	17
9*A*	0	.	14	.	6
10*A*	6	16	3	1	.
11*A*	5	5	.	3	14
12*A*	4	.	11	.	3
13*A*	3	13	0	11	.
14*A*	2	2	.	0	11
15*A*	1	.	8	.	0
16*A*	0	10	.	8	.
17*A*	6	.	16	.	8
18*A*	5	18	5	16	16
19*A*	4	7	13	5	5
20*A*	3	.	.	.	.
21*A*	2	.	.	.	.
22*A*	1	.	.	.	.
23*A*	0	.	.	.	.
24*A*	6	.	.	.	.
25*A*	5	.	.	.	.

Tafel VIII.

$n =$ / $a =$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	57	19	.	76	38	95
1	.	1|96	58	.	20	77	39
2	.	40	2|97	59	.	21	78
3	79	.	41	3|98	.	60	22
4	23	.	80	42	99	4	61
5	62	.	24	81	43	.	5
6	6	63	.	25	82	.	44
7	45	7	.	64	26	83	.
8	84	46	.	8	65	27	.
9	28	85	47	.	9	66	.
10	.	29	86	.	48	10	67
11	.	68	30	87	.	49	11
12	.	12	69	31	.	88	50
13	51	.	13	70	.	32	89
14	90	.	52	14	71	.	33
15	34	91	.	53	15	.	72
16	73	35	.	92	54	.	16
17	17	74	.	36	93	55	.
18	56	18	75	.	37	94	.

Verbesserungen.

S. 104 Z. 8 v. u. ist zu lesen: Datum des Osterfestes und Pfingstfestes im Jahre 431 und Bestimmung der Tage, an welchen das III. ökumenische Concil zu Ephesus eröffnet wurde. — Datum des julian. und gregor. Osterfestes im Jahre 1842. §. 20.

S. — Z. 2 v. u. Wann trifft von 1582 bis 1999 das gregorianische Osterfest auf sein frühestes, wann auf sein spätestes Datum? §. 22.

5.

Ueber die Zerlegung gebrochener algebraischer rationaler Functionen in Partialbrüche.

(Von Herrn Prof. *Oettinger* zu Freiburg i. Br.)

(Fortsetzung des Aufsatzes No. 2. im vorigen Hefte.)

V.

Um die Werthe der Coefficienten, welche den Partialbrüchen zugehören, die durch Zerlegung der Binomien entstehen, zu finden, gehen wir von folgendem einfachen Falle

$$\frac{fx}{(x-b)^p x^n}$$

aus. Es sei zu dem Ende

$$\frac{fx}{(x-b)^p x^n} = \frac{E_0}{(x-b)^p} + \frac{E_1}{(x-b)^{p-1}} + \frac{E_2}{(x-b)^{p-2}} \dots$$
$$\dots \frac{E_{p-1}}{x-b} + \frac{A_0}{x^n} + \frac{A_1}{x^{n-1}} + \dots \frac{A_{n-1}}{x}.$$

Durch Vervielfachen mit dem Nenner der Facultät erhalten wir

$$fx = x^n[E_0 + E_1(x-b) + E_2(x-b)^2 + \dots E_{p-1}(x-b)^{p-1}]$$
$$+ (x-b)^p[A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots A_{n-1} x^{n-1}].$$

Wird nun

$$x - b = y$$

gesetzt, so ist $x = y + b$. Führt man diesen Werth statt x ein, und bemerkt, dafs $fx = B_0 + B_1 x + B_2 x + \dots B_z x^z$ ist, so hat man

$$f(y+b) = B_0 + B_1(y+b) + B_2(y+b)^2 + B_3(y+b)^3 + \dots B_z(y+b)^z$$
$$= (y+b)^n[E_0 + E_1 y + E_2 y^2 + E_3 y^3 + \dots + E_{p-1} y^{p-1}]$$
$$+ y^p[A_0 + A_1(y+b) + A_2(y+b)^2 + \dots A_{n-1}(y+b)^{n-1}].$$

Aus dieser Gleichung werden nun die Werthe für die E auf ähnliche Art gefunden, wie die der A gefunden wurden. Zu dem Ende werden die Binomien, welche in $f(y+b)$ enthalten sind, entwickelt und nach den steigenden Potenzen von y geordnet; ferner wird das auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens angezeigte Vervielfachen ausgeführt werden müssen. Dadurch ergiebt sich folgende Zusammenstellung:

88.
$$
\begin{aligned}
&B_0\\
&B_1 b + B_1 y\\
&B_2 b^2 + 2B_2 by + B_2 y^2\\
&B_3 b^3 + 3B_3 b^2 y + \tfrac{3.2}{1.2} B_3 b y^2 + B_3 y^3\\
&B_4 b^4 + 4B_4 b^3 y + \tfrac{4.3}{1.2} B_4 b^2 y^2 + \tfrac{4.3.2}{1.2.3} B_4 b y^3 + B_4 y^4\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&B_z b^z + \tfrac{z}{1} B_z b^{z-1} y + \tfrac{z(z-1)}{1.2} B_z b^{z-2} y^2 + \ldots + \tfrac{z^{z|1}}{1^{z|1}} B_z b^0 y^z\\
= &\; b^n E_0 + b^n E_1 y + b^n E_2 y^2 + b^n E_3 y^3 + \ldots\\
&+ \tfrac{n}{1} b^{n-1} E_0 y + \tfrac{n}{1} b^{n-1} E_1 y^2 + \tfrac{n}{1} b^{n-1} E_2 y^3 + \ldots\\
&+ \tfrac{n(n-1)}{1.2} b^{n-2} E_0 y^2 + \tfrac{n^{2|-1}}{1^{2|1}} b^{n-2} E_1 y^3 + \ldots\\
&+ \tfrac{n^{3|-1}}{1^{3|1}} b^{n-3} E_0 y^3 + \ldots
\end{aligned}
$$

Werden nun die Vorzahlen, welche denselben Potenzen von y zugehören, gleichgesetzt und die der Verticalreihen auf der linken Seite des Gleichheitszeichens der Kürze wegen durch

$$\Sigma_0^z B_z b^z,\quad \Sigma_1^z \tfrac{z}{1} B_z b^{z-1},\quad \Sigma_2^z \tfrac{z(z-1)}{1.2} B_z b^{z-2},\quad \ldots\quad \Sigma_k^z \tfrac{z^{k|-1}}{1^{k|1}} B_z b^{z-k}$$

bezeichnet, so erhält man durch ganz einfache Entwicklung folgende Zusammenstellung, welche das Gesetz für die Werthbestimmung des E enthält:

89.
$$
\begin{aligned}
E_0 &= \frac{\Sigma_0^z B_z b^z}{b^n}\\
E_1 &= \frac{\Sigma_1^z \frac{z}{1} B_z b^{z-1}}{b^n} - n\frac{E_0}{b}\\
E_2 &= \frac{\Sigma_2^z \frac{z^{2|-1}}{1^{2|1}} B_z b^{z-2}}{b^n} - n\frac{E_1}{b} - \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{E_0}{b^2}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
E_k &= \frac{\Sigma_k^z \frac{z^{k|-1}}{1^{k|1}} B_z b^{z-k}}{b^n} - \frac{n.E_{k-1}}{b} - \frac{n(n-1)E_{k-2}}{1.2.b^2} - \ldots\\
&\quad \ldots - \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)E_0}{1.2\ldots k.b^k}.
\end{aligned}
$$

Diese Bildungsweise ist zurücklaufend. Aus ihr läfst sich durch Einführung der frühern Werthe von E in die entsprechenden Gleichungen folgende Darstellung gewinnen:

90. $$E_0 = \frac{\Sigma_0^z B_z b^z}{b^h}$$

$$E_1 = \frac{\Sigma_1^z \frac{z}{1} B_z b^{z-1}}{b^n} - n\frac{\Sigma_0^z B_z b^z}{b^{n+1}}$$

$$E_2 = \frac{1}{b^n}\left(\Sigma_2^z \frac{z^{2|-1}}{1^{2|1}} B_z b^{z-2} - n\frac{\Sigma_1^z \frac{z}{1} B_z b^{z-1}}{b} + \frac{n(n+1)}{1.2}\Sigma_0^z B_z b^z\right)$$

. . . .

$$E_k = \frac{1}{b^n}\left[\Sigma_k^z \frac{z^{k|-1}}{1^{k|1}} B_z b^{z-k} - \frac{n}{b}\Sigma_{k-1}^z \frac{z^{k-1|-1}}{1^{k-1|1}} B_z b^{z-k+1} - \ldots\right.$$

$$\left.\ldots (-)^k \left(\frac{n}{1}\right)^{k|1} \frac{1}{b^k} \Sigma_0^z B_z b^z\right].$$

Die entwickelte Darstellung von (89) ist folgende:

91. $$E_0 = \frac{B_0 + B_1 b + B_2 b^2 + B_3 b^3 + \ldots}{b^n}$$

$$E_1 = \frac{B_1 + 2B_2 b + 3B_3 b^2 + \ldots}{b^n} - \frac{n E_0}{b}$$

$$E_2 = \frac{B_2 + 3B_3 b + 6B_4 b^2 + \ldots}{b^n} - \frac{n E_1}{b} - \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{E_0}{b^2}$$

$$E_3 = \frac{B_3 + 4B_4 b + 10B_5 b^2 + \ldots}{b^n} - \frac{n E_2}{b} - \frac{n(n-1) E_1}{1.2.b^2} - \frac{n(n-1)(n-2) E_0}{1.2.3.b^3};$$

die aus (90.) ist

92. $$E_1 = \frac{1}{b^n}\left[B_1 + 2B_2 b + 3B_3 b^2 + \ldots - \frac{n}{b}(B_0 + B_1 b + B_2 b^2 + \ldots)\right]$$

$$E_2 = \frac{1}{b^n}\left[B_2 + 3B_2 b + 6B_4 b^2 + \ldots - \frac{n}{b}(B_1 + 2B_2 b + 3B_3 b^2 + \ldots)\right.$$

$$\left. + \frac{n(n+1)}{1.2 b^2}(B_0 + B_1 b + B_2 b^2 + \ldots)\right]$$

. . . .

Ganz unmittelbar ergeben sich hieraus die Werthe von E_0, E_1, E_2, ..., wenn die Function

$$\frac{fx}{(x+b)^p x^n}$$

in Partialbrüche zerlegt werden soll. Zu dem Ende wird in den eben gefundenen Gleichungen $-b$ statt b zu setzen sein. Es ist hieraus

93. $$E_0 = (-)^n \frac{\Sigma_0^z (-)^z B_z b}{b^n}$$

$$E_1 = (-)^n \frac{\Sigma_1^z (-)^{z-1} \frac{z}{1} B_z b^{z-1}}{b^n} + \frac{n E_0}{b}$$

$$E_2 = (-)_n \frac{\Sigma_2^z (-)^{z-2} \frac{z^{2|-1}}{1^{2|1}} B_z b^{z-2}}{b^n} + \frac{n E_1}{b} - \frac{n(n-1) E_0}{1.2.b^2}$$

. . . .

$$E_k = (-)^n \frac{\Sigma_k^z (-)^{z-k} \frac{z^{k|-1}}{1^{k|1}} B_z b^{z-k}}{b^n} + \frac{n E_{k-1}}{b} - \frac{n(n-1) E_{k-2}}{1.2.b^2} + \dots$$
$$\dots (-)^{k-1} \frac{n^{k|-1} E_0}{1^{k|1}},$$

94. $$E_1 = (-)^n \frac{1}{b^n} \left(\Sigma_1^z (-)^{z-1} B_z b^{z-1} + \frac{n}{b} \Sigma_0^z (-)^z B_z b^z \right)$$

$$E_2 = (-)^n \frac{1}{b^n} \left(\Sigma_2^z (-)^{z-2} \frac{z^{2|-1}}{1^{2|1}} B\, b^{z-2} + \frac{n}{b} \Sigma_1^z (-)^{z-1} B_z b^{z-1} \right.$$
$$\left. + \frac{n(n+1)}{1.2.b^2} \Sigma_0^z (-)^z B_z b^{z-2} \right)$$

. . . .

$$E_k = (-)^n \frac{1}{b^n} \left[\Sigma_k^z (-)^{z-k} \frac{z^{k|-1}}{1^{k|1}} B_z b^{z-k} + \frac{n}{b} \Sigma_{k-1}^z (-)^{z-k+1} B_z b^{z-k+1} + \dots \right.$$
$$\left. \dots + \left(\frac{n}{1}\right)^{k|1} \Sigma_0^z (-)^z B_z b^z \right].$$

Soll die Function

$$\frac{fx}{(b-x)^p x^n}$$

in Partialbrüche zerlegt und sollen die Werthe für E_0, E_1, E_2, ... bestimmt werden, so ergiebt sich auf ähnliche Weise, wie die zur Darstellung von (88.) befolgte, die hierzu nöthige Entwicklung, welche zu folgenden Gleichungen führt:

95. $$E_0 = \frac{\Sigma_0^z B_z b^z}{b^n}$$

$$E_1 = -\frac{\Sigma_1^z \frac{z}{1} B_z b^{z-1}}{b^n} + \frac{n E_0}{b}$$

$$E_2 = (-)^2 \frac{\Sigma_2^z \frac{z(z-1)}{1.2} B_z b^{z-2}}{b^n} + \frac{n E_1}{b} - \frac{n(n-1) E_0}{1.2.b^2}$$

$$E_3 = (-)^3 \frac{\Sigma_3^z \frac{z^{3|-1}}{1^{3|1}} B_z b^{z-3}}{b^n} + \frac{n E_2}{b} - \frac{n(n-1)}{1.2} \frac{E_1}{b^2} + \frac{n(n-1)(n-2) E_0}{1.2.3.b^3}$$

. . . .

$$E_k = (-)^k \frac{\Sigma_k^z \frac{z^{k|-1}}{1^{k|1}} B_z b^{z-k}}{b^n} + \frac{n E_{k-1}}{b} - \frac{n(n-1) E_{k-2}}{1.2.b^2} + \ldots\ldots (-)^{k-1} \frac{n^{k|-1}}{1^{k|1}} \frac{E_0}{b^k}.$$

96. $$E_1 = -\frac{1}{b^n}\left[\Sigma_1^z \frac{z}{1} B_z b^{z-1} - \frac{n}{b} \Sigma_0^z B_z b^z\right]$$

$$E_2 = (-)^2 \frac{1}{b^n}\left[\Sigma_2^z \frac{z^{2|-1}}{1^{2|1}} B_z b^{z-2} - \frac{n}{b} \Sigma_1^z \frac{z}{b} B_z b^{z-1} + \frac{n(n+1)}{1.2.b^2} \Sigma_0^z B_z b^z\right]$$

. . . .

$$E_k = (-)^k \frac{1}{b^n}\left[\Sigma_k^z \frac{z^{k|-1}}{1^{k|1}} B_z b^{z-k} - \frac{n}{b} \Sigma_{k-1}^z \frac{z^{k-1|-1}}{1^{k-1|1}} B_z b^{z-k+1} - \ldots\ldots (-)^k \left(\frac{n}{1}\right) \frac{1}{b^n} \Sigma_0^z B_z b^z\right].$$

Wir wenden uns nun zur Bestimmung der Werthe von $E_0, E_1, E_2 \ldots$, welche durch Zerlegung der Function

$$\frac{fx}{f(x-a_r)(x-b)^p x^n}$$

in Partialbrüche entstehen. Ist

$$\frac{f}{f(x-a_r)(x-b)^p x^n} = \frac{E_0}{(x-b)^p} + \frac{E_1}{(x-b)^{p-1}} + \frac{E_2}{(x-b)^{p-2}} + \ldots \frac{E_{p-1}}{(x-b)} + \psi M,$$

so wird durch Vervielfachen

$$fx = [E_0 + E_1(x-b) + E_2(x-b)^2 \ldots + E_{p-1}(x-b)^{p-1}] f(x-a_r) x^n + (x-b)^p (\psi M_1).$$

Wird hierin $x - b = y$, also $x = y + b$ gesetzt, so entsteht folgende Darstellung:

$$B_0 + B_1(y+b) + B_2(y+b)^2 + B_3(y+b)^3 + \ldots$$
$$= [E_0 + E_1 y + E_2 y^2 + E_3 y^3 + \ldots E_{p-1} y^{p-1}] f(y+b-a_r)(y+b)^n + y^p(\psi M_2).$$

Werden die angezeigten Operationen ausgeführt und die Vorzahlen, welche einer und derselben Potenz von y zugehören, gleichgesetzt, so ergiebt sich

$$\Sigma_0^z B_z b^z = E_0 C^r b^n$$
$$\Sigma_1^z z B_z b^{z-1} = E_1 C^r b^n + (C^{r-1} b^n + n C^r b^{n-1}) E_0$$
$$\Sigma_2^z \frac{z^{2|-1}}{1^{2|1}} B_z b^{z-2} = E_2 C^r b^n + (C^{r-1} b^n + n C^r b^{n-1}) E_1 + \left(C^{r-2} b^n + n C^{r-1} b^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} C^r b^{n-2}\right) E_0$$
$$(b-a_1,\quad b-a_2,\quad b-a_3,\quad \ldots\ldots\ldots\quad b-a_r)$$

. . . .

Hieraus entwickeln sich nun mit Zuziehung des Satzes (39.) folgende Bestimmungen:

97. $$E_0 = \frac{C^r}{b^n}\Sigma_0^z B_z b^z$$

$$E_1 = \frac{C^r}{b^n}\Sigma_1^z \frac{z}{1} B_z b^{z-1} - \left(C^1 + \frac{n}{b}\right) E_0$$

$$E_2 = \frac{C^r}{b^n}\Sigma_2^z \frac{z^{2|-1}}{1^{2|1}} B_z b^{z-2} - \left(C^1 + \frac{n}{b}\right) E_1 - \left(C^2 + \frac{nC^1}{b} + \frac{n(n-1)}{1.2.b^2}\right) E_0$$

. . . .

$$E_k = \frac{C^r}{b^n}\Sigma_k^z \frac{z^{k|-1}}{1^{k|1}} B_z b^{z-k} - \left(C^1 + \frac{n}{b}\right) E_{k-1} - \dots$$

$$\dots - \left(C^k + \frac{nC^{k-1}}{b} + \dots \frac{n^{k|-1}}{1^{k|1}}\frac{C^0}{b^n}\right) E_0$$

$$\left(\frac{1}{b-a_1},\quad \frac{1}{b-a_2},\quad \frac{1}{b-a_3},\quad \dots\dots\dots \quad \frac{1}{b-a_r}\right).$$

Durch Einführung der Werthe der frühern E in die gehörigen Gleichungen ergiebt sich eine unabhängige Bildungsweise, nemlich:

98. $$E_1 = \frac{C^r}{b^n}\left[\Sigma_1^z z B_z b^z - \left(C'^1 + \frac{n}{b}\right)\Sigma_0^z B_z b^z\right]$$

$$E_2 = \frac{C^r}{b^n}\left[\Sigma_2^z \frac{z^{2|-1}}{1^{2|1}} B_z b^{z-2} - \left(C'^1 + \frac{n}{b}\right)\Sigma_1^z \frac{z}{1} B_z b^{z-1}\right.$$

$$\left. + \left(C'^2 + \frac{nC'^1}{b} + \frac{n(n+1)}{1.2.b^2}\right)\Sigma_0^z B_z b^z\right]$$

. . . .

$$E_k = \frac{C^r}{b^n}\left[\Sigma_k^z \frac{z^{k|-1}}{1^{k|1}} B_z b^{z-k} - \left(C'^1 + \frac{n}{b}\right)\Sigma_{k-1}^z \frac{z^{k-1|-1}}{1^{k|1}} B_z b^{z-1} \dots\right.$$

$$\left.\dots (-)^k \left(C'^k + \frac{nC'^{k-1}}{b} + \frac{n(n+1)\,C'^{k-2}}{1.2.b^2} \dots + \frac{n^{k|1}}{1^{k|1}}\cdot\frac{1}{b^k}\right)\Sigma_0^z B_z b^z\right]$$

$$\left(\frac{1}{b-a_1},\quad \frac{1}{b-a_2},\quad \frac{1}{b-a_3},\quad \dots\dots\dots \quad \frac{1}{b-a_r}\right).$$

Ist die Function

$$\frac{fx}{f(x+a_r)(x+b)^p x^n}$$

in Partialbrüche zu zerlegen, so werden die vorstehenden Gleichungen die gewünschten Dienste leisten, wenn in ihnen $-b$ statt b und $-a_1$, $-a_2$, $-a_3$ .... statt a_1, a_2, a_3 .... gesetzt wird. Hierdurch entsteht

99. $$E_0 = (-)^{r+n}\frac{C^r}{b^n}\Sigma_0^z (-)^z B_z b^z$$

$$E_1 = (-)^{r+n}\frac{C^r}{b^n}\Sigma_1^z (-)^{z-1}\frac{z}{1} B_z b^{z-1} + \left(C' + \frac{n}{b}\right) E_0$$

$$E_2 = (-)^{r+n}\frac{C^r}{b^n}\Sigma_2^z(-)^{z-2}\frac{z^{2|-1}}{1^{2|1}}B_z b^{z-2} + \left(C^1+\frac{n}{b}\right)E_1$$
$$-\left(C^2+\frac{nC^1}{b}+\frac{n(n-1)}{1.2.b^2}\right)E_0$$

. . . .

$$E_k = (-)^{r+n}\frac{C^r}{b^n}\Sigma_k^z(-)^{z-k}\frac{z^{k|-1}}{1^{k|1}}B_z b^{z-k} + \left(C^1+\frac{n}{b}\right)E_{k-1}$$
$$-\left(C^2+\frac{nC^1}{b}+\frac{n(n-1)}{1.2.b^2}\right)E_{k-2} + \ldots.$$
$$\ldots.(-)^{k-1}\left(C^k+\frac{nC^{k-1}}{b}+\frac{n(n-1)}{1.2}\frac{C^{k-2}}{b^2}+\ldots.\frac{n^{k-1|-1}}{1^{k|1}}\cdot\frac{1}{b^k}\right)E_0;$$

100. $$E_1 = (-)^{r+n}\frac{C^r}{b^n}\left[\Sigma_1^z(-)^{z-1}zB_z b^{z-1} + \left(C'^1+\frac{n}{b}\right)\Sigma_0^z(-)^z B_z b^z\right]$$
$$E_2 = (-)^{r+n}\frac{C^r}{b^n}\left[\Sigma_2^z(-)^{z-2}\frac{z^{2|-1}}{1^{2|1}}B_z b^{z-2} + \left(C'^1+\frac{n}{b}\right)\Sigma_1^z(-)^{z-1}\frac{z}{1}B_z b^{z-1}\right.$$
$$\left.+\left(C'^2+\frac{nC'^1}{b}+\frac{n(n+1)}{1.2}\right)\Sigma_0^z(-)^z B_z b^z\right]$$

. . . .

$$E_k = (-)^{r+n}\frac{C^r}{b^n}\left[\Sigma_k^z(-)^{z-k}\frac{z^{k|-1}}{1^{k|1}}B_z b^{z-k}\right.$$
$$+\left(C'^1+\frac{n}{b}\right)\Sigma_{k-1}^z(-)^{z-k+1}\frac{z^{k-1|-1}}{1^{k-1|1}}B_z b^{z-k+1}+\ldots.$$
$$\left.\ldots.+\left(C'^k+\frac{nC'^{k-1}}{b}+\frac{n(n+1)}{1.2}\frac{C^{k-2}}{b^2}+\ldots.\left(\frac{n}{1}\right)^{k|1}\frac{1}{b^k}\right)\Sigma_0^z B_z b^z\right]$$
$$\left(\frac{1}{b-a_1},\quad\frac{1}{b-a_2},\quad\frac{1}{b-a_3},\quad\ldots\ldots\ldots\quad\frac{1}{b-a_r}\right).$$

Soll die Function

$$\frac{fx}{f(a_r-x)(b-x)^p x^n}$$

in Partialbrüche zerlegt werden, so ergiebt sich durch eine ähnliche Entwicklung, wie die vorhergehenden:

101. $$E_0 = \frac{C^r\Sigma_0^z B_z b^z}{b^n}$$
$$E_1 = -\frac{C^r}{b^n}\Sigma_1^z\frac{z}{1}B_z b^{z-1} - \left(C^1-\frac{n}{b}\right)E_0$$
$$E_2 = (-)^2\frac{C^r}{b^n}\Sigma_2^z\frac{z^{2|-1}}{1^{2|1}}B_z b^{z-2} - \left(C^1-\frac{n}{b}\right)E_1$$
$$-\left(C^2-\frac{nC^1}{b}+\frac{n(n-1)}{1.2.b^2}\right)E_0$$

. . . .

$$E_l = (-)^k\frac{C^r}{b^n}\Sigma_k^z\frac{z^{k|-1}}{1^{k|1}}B_z b^{z-k} - \left(C^1-\frac{n}{b}\right)E_{k-1}\ \ldots.$$
$$\ldots.-\left(C^k-\frac{nC^{k-1}}{b}+\frac{n(n-1)}{1.2}\frac{C^{k-2}}{b^2}-\ldots.\frac{n^{k|-1}}{1^{k|1}b^k}\right)E_0,$$

$$102.\quad E_1 = (-)^1 \frac{C^r}{b^n}\Big[\Sigma_1^z \frac{z}{1} B_z b^{z-1} + \Big(C'^1 - \frac{n}{b}\Big) \Sigma_0^z B_z b^z\Big]$$

$$E_2 = (-)^2 \frac{C^r}{b^n}\Big[\Sigma_2^z \frac{z^{2|-1}}{1^{2|1}} B_z b^{z-2} + \Big(C'^1 - \frac{n}{b}\Big)\Sigma_1^z \frac{z}{1} B_z b^{z-1} + \Big(C'^2 - \frac{nC}{b} + \frac{n(n+1)}{1.2.b^2}\Big)\Sigma_0^z B_z b^z\Big]$$

. . . .

$$E_k = (-)^k \frac{C^r}{b^n}\Big[\Sigma_k \frac{z^{k|-1}}{1^{k|1}} B_z b^{z-k} + \Big(C'^1 - \frac{n}{b}\Big)\Sigma_{k-1}^z \frac{z^{k-1|-1}}{1^{k-1|1}} B_z b^{z-k+1} \ldots$$

$$\ldots + \Big(C'^k + \frac{n C'^{k-1}}{b} + \frac{n(n+1)C'^{k-2}}{1.2.b^2} + \ldots \Big(\frac{n}{1}\Big)^{k|1}\frac{1}{b^k}\Big)\Sigma_0^z B_z b^z\Big]$$

$$\Big(\frac{1}{a_1 - b},\quad \frac{1}{a_2 - b},\quad \frac{1}{a_3 - b},\quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{1}{a_r - b}\Big).$$

Fährt man auf die angegebene Weise fort, so ergiebt sich für die Zerlegung der Function

$$\frac{fx}{f(x-a_m)(x-b)^p(x-c)^q x^n}$$

folgende Darstellung, wenn die oben zu (59.) angegebene Bezeichnung angewendet wird:

$$103.\quad E_0 = \frac{C^m \Sigma_0^z B_z b^z}{(b-c)^q b^n}$$

$$E_1 = \frac{C^m \Sigma_1^z \frac{z}{1} B_z b^{z-1}}{(b-c)^q b^n} - FC'\Big(C, \frac{1}{b-c}, \frac{1}{b}\Big)^1 E_0$$

$$E_2 = \frac{C^m \Sigma_2^z \frac{z^{2|-1}}{1^{2|1}} B_z b^{z-2}}{(b-c)^q b^n} - FC'\Big(C, \frac{1}{b-c}, \frac{1}{b}\Big) E_1 - FC'\Big(C, \frac{1}{b-c}, \frac{1}{b}\Big)^2 E_0$$

. . . .

$$E_k = \frac{C^m \Sigma_k^z \frac{z^{k|-1}}{1^{k|1}} B_z b^{z-k}}{(b-c)^q b^n} - FC'\Big(C, \frac{1}{b-c}, \frac{1}{b}\Big)^1 E_{k-1} \ldots$$

$$\ldots - FC'\Big(C, \frac{1}{b-c}, \frac{1}{c}\Big)^k E_0$$

$$\Big(\frac{1}{b-a_1},\quad \frac{1}{b-a_2},\quad \frac{1}{b-a_3},\quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{1}{b-a_m}\Big)$$

oder

$$104.\quad E_1 = \frac{C^m}{(b-c)^q b^n}\Big[\Sigma_1^z \frac{z}{1} B_z b^{z-1} - FC'\Big(C', \frac{1}{b-c}, \frac{1}{b}\Big)^1 \Sigma_0^z B_z b^z\Big]$$

$$E_2 = \frac{C^m}{(b-c)^q b^n}\Big[\Sigma_2^z \frac{z^{2|-1}}{1^{2|1}} B_z b^{z-2} - FC'\Big(C', \frac{1}{b-c}, \frac{1}{b}\Big)^1 \Sigma_1^z \frac{z}{1} B_z b^{z-1} + FC'\Big(C', \frac{1}{b-c}, \frac{1}{b}\Big)^2 \Sigma_0^z B_z b^z\Big]$$

. . . .

$$E_k = \frac{C^m}{(b-c)^q b^n}\Big[\Sigma_k^z \frac{z^{k|-1}}{1^{k|1}} B_z b^{z-k} - F'C'\Big(C', \frac{1}{b-c}, \frac{1}{b}\Big)^1 \Sigma_1^z \frac{z}{1} B_z b^{z-1} + \ldots$$

$$\ldots (-)^k F'C'\Big(C', \frac{1}{b-c}, \frac{1}{b}\Big)^k \Sigma_0^z B_z b^z\Big]$$

$$\Big(\frac{1}{b-a_1}, \quad \frac{1}{b-a_2}, \quad \frac{1}{b-a_3} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{1}{b-a_m}\Big).$$

So wie die Coefficienten der Partialbrüche, welche durch Zerlegung des Binomiums $(x-b)^p$ entstehen, aus b, c, q, n und $\frac{1}{b-a_1}$, $\frac{1}{b-a_2}$, ... erzeugt werden, so werden auch die Coefficienten der Partialbrüche, welche durch Zerlegung des Binomiums $(x-c)^q$ entstehen, aus c, b, p und n gewonnen werden. Zeigen wir diese Coefficienten durch H_1, H_2, H_3 .... an, so findet sich

$$105.\quad H_k = \frac{C^m}{(c-b)^p c^n}\Sigma_k^z \frac{z^{k|-1}}{1^{k|1}} B_z c^{z-k} - FC'\Big(C, \frac{1}{c-b}, \frac{1}{c}\Big)^1 H_{k-1}$$

$$- FC'\Big(C, \frac{1}{c-b}, \frac{1}{b}\Big)^2 H_{k-2} \ldots - FC'\Big(C, \frac{1}{c-b}, \frac{1}{b}\Big)^k H_0$$

oder

$$106.\quad H_k = \frac{C^m}{(c-b)^p c^n}\Big[\Sigma_k^z \frac{z^{k|-1}}{1^{k|1}} B_z c^{z-k} - F'C'\Big(C', \frac{1}{c-b}, \frac{1}{c}\Big)^1 \Sigma_{k-1}^z \frac{z^{k-1|-1}}{1^{k-1|1}} B_z c^{z-k+1} + \ldots$$

$$\ldots (-)^k F'C'\Big(C', \frac{1}{c-b}, \frac{1}{c}\Big)^k \Sigma_0^z B_z c^z\Big]$$

$$\Big(\frac{1}{c-a_1}, \quad \frac{1}{c-a_2}, \quad \frac{1}{c-a_3} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{1}{c-a_m}\Big).$$

Geht man auf dem einmal betretenen Wege weiter fort, so ergiebt sich leicht folgendes allgemeine Gesetz, wodurch die Werthe der Coefficienten, welche durch Zerlegung der Binomien der Function

$$\frac{fx}{f(x-a_r)(x-b_1)^{p_1}(x-b_2)^{p_2}\ldots(x-b_s)^{p_s}x^n}$$

entstehen, bestimmt werden:

$$107.\quad {}^mE_k = \frac{C^r \Sigma_k^z \frac{z^{k|-1}}{1^{k|1}} B_z b_m^{z-k}}{(b_m-b_1)^{p_1}(b_m-b_2)^{p_2}\ldots(b_m-b_{m-1})^{p_{m-1}}(b_m-b_{m+1})^{p_{m+1}}\ldots(b_m-b_s)^{p_s} b_m^n}$$

$$-FC'\Big(C, \frac{1}{b_m-b_1}, \frac{1}{b_m-b_2}, \ldots \frac{1}{b_m-b_{m-1}}, \frac{1}{b_m-b_{m+1}}, \ldots \frac{1}{b_m-b_s}, \frac{1}{b_m}\Big)^1 {}^mE_{k-1}$$

$$-FC'\Big(C, \frac{1}{b_m-b_1}, \frac{1}{b_m-b_2}, \ldots \frac{1}{b_m-b_{m-1}}, \frac{1}{b_m-b_{m+1}}, \ldots \frac{1}{b_m-b_s}, \frac{1}{b_m}\Big)^2 {}^mE_{k-2}$$

. . . .

$$-FC'\Big(C, \frac{1}{b_m-b_1}, \frac{1}{b_m-b_2}, \ldots \frac{1}{b_m-b_{m-1}}, \frac{1}{b_m-b_{m+1}}, \ldots \frac{1}{b_m-b_s}, \frac{1}{b_m}\Big)^k {}^mE_0$$

$$\Big(\frac{1}{b_m-a_1}, \quad \frac{1}{b_m-a_2}, \quad \frac{1}{b_m-a_3}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{1}{b_m-a_r}\Big).$$

$$108.\ {}^{m}E_k = \frac{C^r}{(b_m-b_1)^{p_1}\dots(b_m-b_{m-1})^{p_{m-1}}(b_m-b_{m+1})^{p_{m+1}}\dots(b_m-b_s)^{p_s}b_m^n}\Big[\Sigma_k^z \frac{z^{k|-1}}{1^{k|1}}B_z b^{z-k}$$
$$-F^1C'\left(C', \frac{1}{b_m-b_1}, \frac{1}{b_m-b_2}, \dots \frac{1}{b_m-b_{m-1}}, \frac{1}{b_m-b_{m+1}}, \dots \frac{1}{b_m-b_s}, \frac{1}{b_m}\right)^1 \Sigma_{k-1}^z \frac{z^{k-1|-1}}{1^{k-1|1}}B_z b_m^{z-k+1}$$
$$+F^1C'\left(C', \frac{1}{b_m-b_1}, \frac{1}{b_m-b_2}, \dots \frac{1}{b_m-b_{m-1}}, \frac{1}{b_m-b_{m+1}}, \dots \frac{1}{b_m-b_s}, \frac{1}{b_m}\right)^2 \Sigma_{k-2}^z \frac{z^{k-2|-1}}{1^{k-2|1}}B_z b_m^{z-k+2}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$(-)^k F^1C'\left(C', \frac{1}{b_m-b_1}, \frac{1}{b_m-b_2}, \dots \frac{1}{b_m-b_{m-1}}, \frac{1}{b_m-b_{m+1}}, \dots \frac{1}{b_m-b_s}, \frac{1}{b_m}\right)^k \Sigma_0^z B_z b_m^z\Big]$$
$$\left(\frac{1}{b_m-a_1}, \quad \frac{1}{b_m-a_2}, \quad \frac{1}{b_m-a_3}, \quad \dots\dots\dots \quad \frac{1}{b_m-a_r}\right).$$

Für die Function

$$\frac{fx}{f(x+a_r)\,\varphi(x+b_s)^{p_s}x^n}$$

ergiebt sich

$$109.\ {}^{m}E_k = (-)^\nu \frac{(b_m-b_m)^{p_m}C^r\,\Sigma_k^z(-)^{z-k}\frac{z^{k|-1}}{1^{k|1}}B_z b_m^{z-k}}{(b_m-b_1)^{p_1}(b_m-b_2)^{p_2}\dots(b_m-b_s)^{p_s}b_m^n}$$
$$+FC'\left(C, \frac{1}{b_m-b_1}, \frac{1}{b_m-b_2}, \dots \frac{1}{b_m-b_{m-1}}, \frac{1}{b_m-b_{m+1}}, \dots \frac{1}{b_m-b_s}, \frac{1}{b_m}\right)^1 {}^{m}E_{k-1}$$
$$-FC'\left(C, \frac{1}{b_m-b_1}, \frac{1}{b_m-b_2}, \dots \frac{1}{b_m-b_{m-1}}, \frac{1}{b_m-b_{m+1}}, \dots \frac{1}{b_m-b_s}, \frac{1}{b_m}\right)^2 {}^{m}E_{k-2}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$(-)^{k-1}FC\left(C, \frac{1}{b_m-b_1}, \frac{1}{b_m-b_2}, \dots \frac{1}{b_m-b_{m-1}}, \frac{1}{b_m-b_{m+1}}, \dots \frac{1}{b_m-b_s}, \frac{1}{b_m}\right)^k {}^{m}E_0,$$

$$110.\ {}^{m}E_k = (-)^\nu \frac{C^r(b_m-b_m)^{p_m}}{(b_m-b_1)^{p_1}\dots(b_m-b_s)^{p_s}b_m^n}\Big[\Sigma_k^z(-)^{z-k}\frac{z^{k|-1}}{1^{k|1}}B_z b_m^{z-k}$$
$$+F^1C'\left(C', \frac{1}{b_m-b_1}, \dots \frac{1}{b_m-b_{m-1}}, \frac{1}{b_m-b_{m+1}}, \dots \frac{1}{b_m-b_s}, \frac{1}{b_m}\right)^1 \Sigma_{k-1}^z(-)^{z-k+1}\frac{z^{k-1|-1}}{1^{k-1|1}}B_z b_m^{z-k+1}$$
$$+F^1C'\left(C', \frac{1}{b_m-b_1}, \dots \frac{1}{b_m-b_{m-1}}, \frac{1}{b_m-b_{m+1}}, \dots \frac{1}{b_m-b_s}, \frac{1}{b_m}\right)^2 \Sigma_{k-2}^z(-)^{z-k+2}\frac{z^{k-2|-1}}{1^{k-2|1}}B_z b_m^{z-k+2}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$+F^1C'\left(C', \frac{1}{b_m-b_1}, \dots \frac{1}{b_m-b_{m-1}}, \frac{1}{b_m-b_{m+1}}, \dots \frac{1}{b_m-b_s}, \frac{1}{b_m}\right)^k \Sigma_0^z(-)^z B_z b_m^z\Big]$$
$$\left(\frac{1}{b_m-a_1}, \quad \frac{1}{b_m-a_2}, \quad \frac{1}{b_m-a_3}, \quad \dots\dots\dots \quad \frac{1}{b_m-a_r}\right).$$

Hierin ist $\nu = r + p_1 + p_2 \dots p_{m-1} + p_{m+1} \dots p_s + n$ und

$$\frac{(b_m-b_m)^{p_m}}{(b_m-b_1)^{p_1}(b_m-b_2)^{p_2}\dots(b_m-b_s)^{p_s}}$$
$$= \frac{1}{(b_m-b_1)^{p_1}\dots(b_m-b_{m-1})^{p_{m-1}}(b_m-b_{m+1})^{p_{m+1}}(b_m-b_s)^{p_s}}.$$

Für die Function

$$\frac{fx}{f(a_r-x)(b_1-x)^{p_1}\;\ldots\;(b_s-x)^{p_s}x^n}$$

ist:

$$111.\quad {}^mE_k=(-)^k\frac{(b_m-b_m)^{p_m}\,C'\,\Sigma_k^z\frac{z^{k|-1}}{1^{k|1}}B_z\,b_m^{z-k}}{(b_1-b_m)^{p_1}(b_2-b_m)^{p_2}\ldots(b_s-b_m)^{p_s}\,b_m^n}$$

$$-FC'\left(C,\frac{1}{b_1-b_m},\frac{1}{b_2-b_m},\ldots\frac{1}{b_{m-1}-b_m},\frac{1}{b_{m+1}-b_m},\ldots\frac{1}{b_s-b_m},-\frac{1}{b_m}\right)^1{}^mE_{k-1}$$

$$-FC'\left(C,\frac{1}{b_1-b_m},\frac{1}{b_2-b_m},\ldots\frac{1}{b_{m-1}-b_m},\frac{1}{b_{m+1}-b_m},\ldots\frac{1}{b_s-b_m},-\frac{1}{b_m}\right)^2{}^mE_{k-2}$$

$$\ldots\ldots\ldots,\ldots\ldots\ldots\ldots,\ldots\ldots\ldots$$

$$-FC'\left(C,\frac{1}{b_1-b_m},\frac{1}{b_2-b_m},\ldots\frac{1}{b_{m-1}-b_m},\frac{1}{b_{m+1}-b_m},\ldots\frac{1}{b_s-b_m},-\frac{1}{b_m}\right)^k{}^mE_0.$$

$$112.\quad {}^mE_k=(-)^k\frac{(b_m-b_m)^{p_m}\,C'}{(b_1-b_m)^{p_1}(b_2-b_m)^{p_2}\ldots(b_m-b_s)^{p_s}\,b_m^n}\Big[\Sigma_k^z\frac{z^{k|-1}}{1^{k|1}}B_z b_m^{z-k}$$

$$+F'C'\left(C',\frac{1}{b_1-b_m},\frac{1}{b_2-b_m},\ldots\frac{1}{b_{m-1}-b_m},\frac{1}{b_{m+1}-b_m},\ldots\frac{1}{b_s-b_m},-\frac{1}{b_m}\right)^1\Sigma_{k-1}^z\frac{z^{k-1|-1}}{1^{k-1|1}}B_z b^{z-k+1}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+F'C'\left(C',\frac{1}{b_1-b_m},\frac{1}{b_2-b_m},\ldots\frac{1}{b_{m-1}-b_m},\frac{1}{b_{m+1}-b_m},\ldots\frac{1}{b_s-b_m},-\frac{1}{b_m}\right)^k\Sigma_0^z B_z b^z\Big]$$

$$\left(\frac{1}{a_1-b_m},\quad\frac{1}{a_2-b_m},\quad\frac{1}{a_3-b_m},\quad\ldots\ldots\ldots\quad\frac{1}{a_r-b_m}\right).$$

Einfacher werden diese Darstellungen, wenn die Functionen $f(x\pm a_r)$ und $f(a_r-x)$ nicht in der zu zerlegenden Function vorkommen. Dann entsteht z. B. folgende Function:

$$\frac{fx}{(x-b_1)^{p_1}(x-b_2)^{p_2}\;\ldots\;(x-b_s)^{p_s}x^n}$$

und es ergiebt sich aus (107. u. 108.)

$$113.\quad {}^mE_k=\frac{(b_m-b_m)^p\,\Sigma_k^z\frac{z^{k|-1}}{1^{k|1}}B_z\,b^{z-k}}{(b_m-b_1)^{p_1}(b_m-b_2)^{p_2}\;\ldots\;(b_m-b_s)^{p_s}b_m^n}$$

$$-FC'^1.{}^mE_{k-1}-FC'^2.{}^mE_{k-2}-FC'^3.{}^mE_{k-2}\;\ldots\;-FC'^k.{}^mE_0,$$

$$114.\quad {}^mE_k=\frac{(b_m-b_m)^p}{(b_m-b_1)^{p_1}(b_m-b_2)^{p_2}\;\ldots\;(b_m-b_s)^{p_s}b_m^n}\Big[\Sigma_k^z\frac{z^{k|-1}}{1^{k|1}}B_z b^z$$

$$-\Sigma_{k-1}^z\frac{z^{k-1|-1}}{1^{k-1|1}}B_z b_m^{z-k+1}F'C'^1+\Sigma_{k-2}^z\frac{z^{k-2|-1}}{1^{k-2|1}}B_z b_m^{z-k+2}F'C'^2\;\ldots\;(-)^k\Sigma_0^z B_z b_m^z F'C'^k\Big]$$

$$\left(\frac{1}{b_m-b_1},\quad\frac{1}{b_m-b_2},\quad\frac{1}{b_m-b_3},\quad\ldots\ldots\ldots\quad\frac{1}{b_m-b_s}\right)$$

u. s. w.

Nun ist noch übrig, zu der allgemeinen Form der in 1. und 2. vorgelegten Function aufzusteigen, um die Gleichungen für die Werthe der verschiedenen E und G zu erhalten. Zu dem Ende gehen wir von der Zerlegung folgender Function aus:

$$\frac{fx}{f(x+a_r)f(c_q-x)(d-x)^t x^n}.$$

Es sei

$$\frac{fx}{f(x+a_r)f(c_q-x)(d-x)^t x^n} = \frac{G_0}{(d-x)^t} + \frac{G_1}{(d-x)^{t-1}} + \ldots + \frac{G_{t-1}}{d-x} + \Phi M,$$

so wird

$$fx = [G_0 + G_1(d-x) + G_2(d-x)^2 + \ldots$$
$$\ldots G_{t-1}(d-x)^{t-1}] f(x+a_r) f(c_q-x) x^n + (d-x)^t (\Phi M_1).$$

Wird hierin $d-x=y$ und $x=d-y$ gesetzt, so geht diese Gleichung in folgende über:

$$f(d-y) = B_0 + B_1(d-y) + B_2(d-y)^2 + B_3(d-y)^3 + \ldots$$
$$= [G_0 + G_1 y + G_2 y^2 + G_3 y^3 + \ldots$$
$$\ldots + G_{t-1} y^{t-1}] f(d+a_r-y) f(c_q-d+y)(d-y)^n + y^t (\Phi M_2).$$

Werden nun $f(d+a_r-y)$, $f(c_q-d+y)$, $(d-y)^n$ nach den Potenzen von y entwickelt und mit der eingeklammerten Reihe vervielfacht und die Vorzahlen gleicher Potenzen von y gleichgesetzt, so ergiebt sich folgende Vergleichung:

$$\Sigma_0^z B_z d^z = C_a^r C_c^q d^n G_0$$

$$-\Sigma_1^z \frac{z}{1} B_z d^{z-1} = C_a^r C_c^q d^n G_1 + (C_a^r C_c^{q-1} d^n - C_a^{r-1} C_c^q d^n - n C_a^r C_c^q d^{n-1}) G_0$$

$$(-)^2 \Sigma_2^z \frac{z^{2|-1}}{1^{2|1}} B_z d^{z-2} = C_a^r C_c^q d^n G_2 + (C_a^r C_c^{q-1} d^n - C_a^{r-1} C_c^q d^n - n C_a^r C_c^q d^{n-1}) G_1$$
$$+ \Big(C_a^r C_c^{q-2} d^n - C_a^{r-1} C_c^{q-1} d^n + C_a^{r-2} C_c^q d^n - n C_a^r C^{q-1} d^{n-1}$$
$$+ n C_a^{r-1} C_c^q d^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} C_a^r C_c^r d^{n-1}\Big) G_0$$

$$(d+a_1,\ d+a_2,\ \ldots\ d+a_r),\quad (c_1-d,\ c_2-d,\ \ldots\ c_q-d)$$

. . . .

Die Entwicklung giebt folgende Werthe:

115. $$G_0 = \frac{C_a^r C_c^q \Sigma_0^z B_z d^z}{d^n}$$

$$G_1 = -\frac{C_a^r C_c^n \Sigma_1^z \frac{z}{1} B_z d^{z-1}}{d^n} - \left(-C_a^1 + C_c^1 - \frac{n}{d}\right) G_0$$

$$G_2 = (-)^2 \frac{C_a^r C_c^q \Sigma_2^z \frac{z^{2|-1}}{1^{2|1}} B_z d^{z-2}}{d^n} - \left(-C_a^1 + C_c - \frac{n}{d}\right) G_1$$
$$- \left(C_a^2 - C_a^1 . C_c^1 + \frac{n}{d} C_a^1 + C_c^2 - \frac{n C_c^1}{d} + \frac{n(n-1)}{1.2.d^2}\right) G_0$$

u. s. w. Das allgemeine Gesetz stellt sich kürzer und deutlicher in Zeichen durch folgende Gleichung dar:

$$G_k = (-)^k \frac{\Sigma_k^z \frac{z^{k|-1}}{1^{k|1}} B_z d^{z-k} C_a^r C_c^q}{d^n} - FC'\left(-C_a, C_c - \frac{1}{d}\right)^1 G_{k-1}$$
$$- FC'\left(-C_a, C_c - \frac{1}{d}\right)^2 G_{k-2} \dots - FC'\left(-C_a, C_c - \frac{1}{d}\right)^k G_0$$
$$\left(\frac{1}{d+a_1}, \frac{1}{d+a_2}, \dots \frac{1}{d+a_r}\right), \quad \left(\frac{1}{c_1-d}, \frac{1}{c_2-d}, \dots \frac{1}{c_q-d}\right)$$

Die unabhängige Bildungsweise, welche sich hieraus ergiebt, ist folgende:

116. $$G_1 = (-)^1 \frac{C_a^r C_c^q}{d^n}\left[\Sigma_1^z \frac{z}{1} B_z d^{z-1} + FC'\left(-C_a^1, C_c^1, -\frac{1}{d}\right)^1 \Sigma_0^z B_z d^z\right]$$
$$G_2 = (-)^2 \frac{C_a^r C_c^q}{d^n}\left[\Sigma_2^z \frac{z^{2|-1}}{1^{2|1}} B_z d^{z-2} + FC'\left(-C_a^1, C_c^1, -\frac{1}{d}\right)^1 \Sigma_1^z \frac{z}{1} B_z d^{z-1}\right.$$
$$\left. + FC'\left(-C_a^1, C_c^1, -\frac{1}{d}\right)^2 G_0\right]$$

. . . .

$$G_k = (-)^k \frac{C_a^r C_c^q}{d^n}\left[\Sigma_k^z \frac{z^{k|-1}}{1^{k|1}} B_z d^{z-k} + FC'\left(-C_a^1, C_c^1, -\frac{1}{d}\right)^1 \Sigma_{k-1}^z \frac{z^{k-1|-1}}{1^{k-1|1}} B_z d^{z-k+1} \dots\right.$$
$$\left. \dots + FC'\left(-C_a^1, C_c, -\frac{1}{d}\right)^k G_0\right]$$
$$\left(\frac{1}{d+a_1}, \frac{1}{d+a_2}, \dots \frac{1}{d+a_r}\right), \quad \left(\frac{1}{c_1-d}, \frac{1}{c_2-d}, \dots \frac{1}{c_q-d}\right).$$

Soll die Function

$$\frac{fx}{f(x+a_m)(x+b)^p f(c_\lambda - x)(d-x)^t (g-x)^s x^n}$$

in Partialbrüche zerlegt werden, so sind die Coefficienten der Brüche, welche sich auf die Potenzen des Binomiums $(d-x)^t$ beziehen, in folgendem Gesetze enthalten

117. $$G_\lambda = (-)^k \frac{C_a^m C_c^h . \Sigma_k^z \frac{z^{k|-1}}{1^{k|1}} B_z d^{z-k}}{(d+b)^p (g-d)^s d^n} - FC'\left(-C_a, -\frac{1}{d+b}, +C_c, \frac{1}{g-d}, -\frac{1}{d}\right)^1 G_{k-1} \dots$$
$$\dots - FC'\left(-C_a, -\frac{1}{d+b}, C_c \frac{1}{g-d}, -\frac{1}{d}\right)^k G_0,$$

$$118.\quad G_k = (-)^k \frac{C_a^m C_c^h}{(d+b)^p (g-d)^t d^n}\Big[\Sigma_k^z \frac{z^{k|-1}}{1^{k|1}} B_z d^{z-k}$$
$$+ F'C'\Big(-C_a^1, -\frac{1}{d+b}, C_c^1, \frac{1}{g-d}, -\frac{1}{d}\Big)\Sigma_{k-1}^z \frac{z^{k-1|-1}}{1^{k-1|1}} B_z d^{z-k+1} + \dots$$
$$\dots + F'C'\Big(-C_a^1, -\frac{1}{d+b}, C_c^1, \frac{1}{g-d}, -\frac{1}{d}\Big)\Sigma_0^z B_z d^z\Big]$$
$$\Big(\frac{1}{d+a_1}, \frac{1}{d+a_2}, \dots \frac{1}{d+a_m}\Big), \quad \Big(\frac{1}{c_1-d}, \frac{1}{c_2-d}, \dots \frac{1}{c_h-d}\Big).$$

Die Coefficienten der Brüche, welche sich auf die Potenzen des Binomiums $(g-x)^t$ beziehen, sind in folgendem Gesetze enthalten:

$$119.\quad H_k = (-)^k \frac{C_a^m C_c^h \Sigma_k^z \frac{z^{k|-1}}{1^{k|1}} B_z g^{z-k}}{(g+b)^p (d-g)^t g^n} - FC'\Big(-C_a, -\frac{1}{g+b}, C_c, \frac{1}{d-g}, -\frac{1}{g}\Big)^1 H_{k-1} \dots$$
$$\dots - FC'\Big(-C_a, -\frac{1}{g+b}, +C_c, \frac{1}{d-g}, -\frac{1}{g}\Big)^k H_0,$$

$$120.\quad H_k = (-)^k \frac{C_a^n C_c^h}{(g+b)^p (d-g)^t g^n}\Big[\Sigma_k^z \frac{z^{k|-1}}{1^{k|1}} B_z g^{z-k}$$
$$+ F'C'\Big(-C_a^1, -\frac{1}{g+b}, C_c^1, \frac{1}{d-g}, -\frac{1}{g}\Big)^1 \Sigma_{k-1}^z \frac{z^{k-1|-1}}{1^{k-1|1}} B_z g^{z-k+1} \dots$$
$$\dots + F'C'\Big(-C_a^1, -\frac{1}{g+b}, C_c^1, \frac{1}{d-g}, -\frac{1}{g}\Big)^k \Sigma_0^z B_z g^z\Big]$$
$$\Big(\frac{1}{g+a_1}, \frac{1}{g+a_2}, \dots \frac{1}{g+a_m}\Big), \quad \Big(\frac{1}{c_1-g}, \frac{1}{c_2-g}, \dots \frac{1}{c_h-g}\Big).$$

Werden diese Schlüsse weiter fortgesetzt, so ergiebt sich hieraus leicht das Bildungsgesetz für die Coefficienten der Partialbrüche, welche durch Zerlegung der Function

$$\frac{fx}{f(x+a_r)(x+b_1)^{p_1}\dots(x+b_s)^{p_s} f(c_q-x)(d_1-x)^{t_1}\dots(d_u-x)^{t_u} x^n}$$

entstehen. Es ist in folgenden Gleichungen enthalten

$$123.\quad {}^mG_k = (-)^k \frac{(d_m-d_m)^{t_m} C_a^r C_c^q \Sigma_k^z \frac{z^{1|-1}}{1^{k|1}} B_z d_m^{z-k}}{(d_m+b_1)^{p_1}\dots(d_m+b_s)^{p_s}(d_1-d_m)^{t_1}\dots(d_u-d_m)^{t_u} d_m^n}$$
$$-FC'\Big(-C_a, -\frac{1}{d_m+b_1}, \dots, -\frac{1}{d_m+b_s}, C_c, \frac{1}{d_1-d_m}, \dots \frac{1}{d_{m-1}-d_m}, \frac{1}{d_{m+1}-d_m}, \dots$$
$$\dots \frac{1}{d_u-d_m}, -\frac{1}{d_m}\Big)^1 {}^mG_{k-1}$$

. . . .

$$-FC'\Big(-C_a, -\frac{1}{d_m+b_1}, \dots, -\frac{1}{d_m+b_s}, C_c, \frac{1}{d_1-d_m}, \dots \frac{1}{d_{m-1}-d_m}, \frac{1}{d_{m+1}-d_m}, \dots$$
$$\dots \frac{1}{d_u-d_m}, -\frac{1}{d_m}\Big)^k {}^mG_0,$$

$$124.\quad {}^mG_k = (-)^k \frac{(d_m-d_m)^{t_m} C_a^r C_c^q}{(d_m+b_1)^{p_1}\dots(d_m+b_s)^{p_s}(d_1-d_m)^{t_1}\dots(d_u-d_m)^{t_u} d_m^n}\Big[\Sigma_k^z \frac{z^{k|-1}}{1^{k|1}} B_z d_m^{z-k}$$

$$+F'C'\Big(-C_a^1, -\frac{1}{d_m+b_1}, \dots -\frac{1}{d_m+b_s}, C_c^1, \frac{1}{d_1-d_m}, \dots \frac{1}{d_{m-1}-d_m}, \frac{1}{d_{m+1}-d_m}, \dots$$

$$\dots \frac{1}{d_u-d_m}, -\frac{1}{d_m}\Big)^1 \Sigma_{k-1}^z \frac{z^{k-1|-1}}{1^{k-1|1}} B_z d_m^{z-k+1}$$

. . . .

$$+F'C'\Big(-C_a^1, -\frac{1}{d_m+b_1}, \dots -\frac{1}{d_m+b_s}, C_c^1, \frac{1}{d_1-d_m}, \dots \frac{1}{d_{m-1}-d_m}, \frac{1}{d_{m+1}-d_m}, \dots$$

$$\dots \frac{1}{d_u-d_m}, -\frac{1}{d_m}\Big)^k \Sigma_0^z B_z d_m^z$$

$$\Big(\frac{1}{d_m+b_1}, \frac{1}{d_m+b_2}, \dots \frac{1}{d_m+b_s}\Big), \qquad \Big(\frac{1}{c_1-d_m}, \frac{1}{c_2-d_m} \dots \frac{1}{c_q-d_m}\Big).$$

Soll die Function

$$\frac{fx}{f(x-a_r)\varphi(x-b_s)^{p_s} f(c_q-x)\varphi(d_u-x)^{t_u} x^n}$$

in Partialbrüche zerlegt werden, so sind die entsprechenden Gröfsen mit dem entgegengesetzten Zeichen in (123.) und (124.) einzuführen.

$$125.\quad {}^mG_k = (-)^k \frac{(d_m-d_m)^{t_m} C_a^r C_c^q \Sigma_k^z \frac{z^{k|-1}}{1^{k|1}} B_z d_m^{z-k}}{(d_m-b_1)^{p_1}\dots(d_m-b_s)^{p_s}(d_1-d_m)^{t_1}\dots(d_u-d_m)^{t_u} d_m^n}$$

$$-FC'\Big(-C_a, -\frac{1}{d_m-b_1}, \dots -\frac{1}{d_m-b_s}, C_c, \frac{1}{d_1-d_m}, \dots \frac{1}{d_{m-1}-d_m}, \frac{1}{d_{m+1}-d_m}, \dots$$

$$\dots \frac{1}{d_u-d_m}, -\frac{1}{d_m}\Big)^1 {}^mG_{k-1}$$

. . . .

$$-FC'\Big(-C_a, -\frac{1}{d_m-b_1}, \dots -\frac{1}{d_m-b_s}, C_c, \frac{1}{d_1-d_m}, \dots \frac{1}{d_{m-1}-d_m}, \frac{1}{d_{m+1}-d_m}, \dots$$

$$\dots \frac{1}{d_u-d_m}, \dots \frac{1}{d_m}\Big)^k {}^mG_0,$$

$$126.\quad {}^mG_k = (-)^k \frac{(d_m-d_m)^{t_m} C_a^r C_c^q}{(d_m-b_1)^{p_1}\dots(d_m-b_s)^{p_s}(d_1-d_m)^{t_1}\dots(d_u-d_m)^{t_u} d_m^n}\Big[\Sigma_k^z \frac{z^{k|-1}}{1^{k|1}} B_z d_m^{z-k}$$

$$+F'C'\Big(-C_a^1 -\frac{1}{d_m-b_1}, \dots -\frac{1}{d_m-b_s}, C_c^1, \frac{1}{d_1-d_m}, \dots \frac{1}{d_{m-1}-d_m}, \frac{1}{d_{m+1}-d_m}, \dots$$

$$\dots \frac{1}{d_u-d_m}, -\frac{1}{d_m}\Big)^1 \Sigma_{k-1}^z \frac{z^{k-1|-1}}{1^{k-1|1}} B_z d_m^{z-k}$$

. . . .

$$+F'C'\Big(-C_a^1 -\frac{1}{d_m-b_1}, \dots -\frac{1}{d_m-b_s}, C_c^1, \frac{1}{d_1-d_m}, \dots \frac{1}{d_{m-1}-d_m}, \frac{1}{d_{m+1}-d_m}, \dots$$

$$\dots \frac{1}{d_u-d_m}, -\frac{1}{d_m}\Big)^k \Sigma_0^z B_z d_m^z\Big]$$

$$\Big(\frac{1}{d_m-a_1}, \frac{1}{d_m-a_2}, \dots \frac{1}{d_m-a_r}\Big), \qquad \Big(\frac{1}{c_1-d_m}, \frac{1}{c_2-d_m}, \dots \frac{1}{c_q-d_m}\Big)$$

Um nun auch das Bildungsgesetz der E für die allgemeine Form der Function 1 zu gewinnen, gehen wir von dem besonderen Falle

$$\frac{fx}{f(x-a_r)(x-b)^p f(c_q-x)\,x^n}$$

aus. Es sei

$$\frac{fx}{f(x-a_r)(x-b)^p f(c_q-x)x^n} = \frac{E_0}{(x-b)^p} + \frac{E_1}{(x-b)^{p-1}} + \frac{E_2}{(x-b)^{p-2}} + \dots \frac{E_{p-1}}{x-b} + (\psi M),$$

so wird

$$fx = [E_0 + E_1(x-b) + E_2(x-b)^2 + \dots E_{p-1}(x-b)^{p-1}]\, f(x-a_r)\, f(c_q-x)\, x^n$$
$$+ (x-b)^p(\psi M_1).$$

Wird hierin $x-b=y$, also $x=b+y$ gesetzt, so erhält man

$$B_0 + B_1(y+b) + B_2(y+b)^2 + B_3(y+b)^3 + \dots$$
$$= [E_0 + E_1 y + E_2 y + \dots E_{p-1} y^{p-1}]\, f(y+b-a_r)\, f(c_q-b-y)(y+b)^n$$
$$+ y^p(\psi M_2).$$

Werden nun $f(y+b-a_r)$, $f(c_q-b-y)$, $(y+b)^n$ nach den steigenden Potenzen von y entwickelt, mit den Gliedern der eingeklammerten Reihe vervielfacht, und die nöthigen Verwandlungen auf der linken Seite des Gleichheitszeichens ausgeführt, so ergiebt sich folgende Vergleichung:

$$\Sigma_0^z B_z b^z = C_a^r C_c^q b^n E_0$$

$$\Sigma_1^z \frac{z}{1} B_z b^{z-1} = C_a^r C_c^q b^n E_1 + (C_a^{r-1} C_c^q b_n - C_a^r C_c^{q-1} b^n + n C_a^r C_c^q b^{n-1}) E_0$$

$$\Sigma_2^z \frac{z^{2|-1}}{1^{2|1}} B_z b^{z-2} = C_a^r C_c^q b^n E_2 + \left(C_a^{r-1} C_c^q b^n - C_a^r C_c^{q-1} b^n + \frac{n}{1} C_a^r C_c^q b^{n-1}\right) E_1$$
$$+ \left(C_a^{r-2} C_c^q b^n - C_a^{r-1} C_c^{q-1} b^n + C_a^r C_c^{q-2} b^n + n C_a^{r-1} C_c^q b^{n-1} - n C_a^r C_c^{q-1} b^{n-1}\right.$$
$$\left. + \frac{n(n-1)}{1.2} C_a^r C_c^q b^{n-2}\right) E_0$$

. . . .

$$(b-a_1,\ b-a_2,\ \dots\ b-a_r), \qquad (c_1-b,\ c_2-b,\ \dots\ c_q-b).$$

Werden nun die nöthigen Entwicklungen gemacht, so entsteht in Rücksicht auf (39.) folgender Ausdruck:

127. $$E_0 = \frac{C_a^r C_c^q}{b^n} \Sigma_0^z B_z b^z$$

$$E_1 = \frac{C_a^r C_c^q}{b^n} \Sigma_1^z \frac{z}{1} B_z b^{z-1} - \left(C_a^1 - C_c^1 + \frac{n}{b}\right) E_0$$

$$E_2 = \frac{C_a^r C_c^q}{b^n} \Sigma_2^z \frac{z^{2|-1}}{1^{2|1}} B_z b^{z-2} - \left(C_a^1 - C_c^1 + \frac{n}{b}\right) E_1$$
$$- \left(C_a^2 - C_a^1 C_c^1 + C_c^2 + \frac{n C_a^1}{b} - \frac{n C_c^1}{b} + \frac{n(n-1)}{1.2.b^2}\right) E_0$$

u. s. w. Hieraus folgt allgemein, in den schon bekannten Zeichen:

$$E_k = \frac{C_a^r C_c^q}{b^n} \Sigma_k^z \frac{z^{k|-1}}{1^{k|1}} B_z b^{z-k} - FC'\left(C_a, -C_c, \frac{1}{b}\right)^1 E_{k-1} - FC'\left(C_a, -C_c, \frac{1}{b}\right)^2 E_{k-2} \dots$$
$$\dots - FC'\left(C_a, -C_c, \frac{1}{b}\right)^k E_0$$
$$\left(\frac{1}{b-a_1}, \frac{1}{b-a_2}, \dots \frac{1}{b-a_r}\right), \qquad \left(\frac{1}{c_1-b}, \frac{1}{c_2-b}, \dots \frac{1}{c_q-b}\right),$$

oder

128. $$E_1 = \frac{C_a^r C_c^q}{b^n}\left[\Sigma_1^z \frac{z}{1} B_z b^{z-1} - FC'\left(C_a^1, -C_c^1, \frac{1}{b}\right)^1 \Sigma_0^z B_z b^z\right]$$

$$E_2 = \frac{C_a^r C_c^q}{b^n}\left[\Sigma_2^z \frac{z^{2|-1}}{1^{2|1}} B_z b^{z-2} - FC'\left(C_a^1, -C_c^1, \frac{1}{b}\right)^1 \Sigma_1^z \frac{z}{1} B_z b^{z-1}\right.$$
$$\left. + FC'\left(C_a^1, -C_c^1, \frac{1}{b}\right)^2 \Sigma_0^z B_z b^z\right]$$

. . . .

$$E_k = \frac{C_a^r C_c^q}{b^n}\left[\Sigma_k^z \frac{z^{k|-1}}{1^{k|1}} B_z b^{z-k} - FC'\left(C_a^1, -C_c^1, \frac{1}{b}\right)^1 \Sigma_{k-1}^z \frac{z^{k-1|-1}}{1^{k-1|1}} B_z b^{z-k+1} + \dots\right.$$
$$\left. \dots (-)^k FC'\left(C_a^1, -C_c^1, \frac{1}{b}\right)^k \Sigma_0^z B_z b^z\right]$$
$$\left(\frac{1}{b-a_1}, \frac{1}{b-a_2}, \dots \frac{1}{b-a_r}\right), \qquad \left(\frac{1}{c_1-b}, \frac{1}{c_2-b}, \dots \frac{1}{c_q-b}\right).$$

Wendet man nun auf diese Ausdrücke die Bemerkungen an, welche schon früher in ähnlichen Fällen angewendet wurden, so führen sie zu folgendem allgemeinen Gesetze, durch welches die Werthe der E in dem allgemeinen Schema bei Zerlegung der Function

$$\frac{fx}{f(x-a_r)\,\varphi(x-b_s)^{p_s} f(c_q-x)\,\varphi(d_u-x)^{t_u}\,x^n}$$

bestimmt werden. Es ist

129. $$^mE_k = \frac{C_a^r . C_c^q (b_m - b_m)^{p_m} \Sigma_k^z \frac{z^{k|-1}}{1^{k|1}} B_z b_m^{z-k}}{(b_m-b_1)^{p_1}(b_m-b_2)^{p_2}\dots(b_m-b_s)^{p_s}(d_1-b_m)^{t_1}(d_2-b_m)^{t_2}\dots(d_u-b_m)^{t_u} b_m^n}$$
$$-FC'\left(C_a, \frac{1}{b_m-b_1}, \dots \frac{1}{b_m-b_{m-1}}, \frac{1}{b_m-b_{m+1}}, \dots \frac{1}{b_m-b_s}, -C, -\frac{1}{d_1-b_m}, \dots\right.$$
$$\left.\dots -\frac{1}{d_u-b_m}, \frac{1}{b_m}\right)^1 {}^mE_{k-1}$$

. . . .

$$-FC'\left(C_a, \frac{1}{b_m-b_1}, \dots \frac{1}{b_m-b_{m-1}}, \frac{1}{b_m-b_{m+1}}, \dots \frac{1}{b_m-b_s}, -C_c, -\frac{1}{d_1-b_m}, \dots\right.$$
$$\left.\dots -\frac{1}{d_u-b_m}, \frac{1}{b_m}\right)^k {}^mE_0,$$

$$130.\quad {}^mE_k = \frac{(b_m-b_m)^{p_m} C_a^r C_c^q}{(b_m-b_1)^{p_1} \ldots (b_m-b_s)^{p_s}(d_1-b_m) \ldots (d_u-b_m)^{t_u} b_m^n}\Big[\Sigma_k^z \frac{z^{k|-1}}{1^{k|1}} B_z b^{z-k}$$

$$-F'C'\Big(C_a^1, \frac{1}{b_m-b_1}, \ldots \frac{1}{b_m-b_{m-1}}, \frac{1}{b_m-b_{m+1}}, \ldots \frac{1}{b_m-b_s}, -C_c^1, -\frac{1}{d_1-d_m}, \ldots$$

$$\ldots -\frac{1}{d_u-b_m}, \frac{1}{b_m}\Big)^1 \Sigma_{k-1}^z \frac{z^{k-1|-1}}{1^{k-1|1}} B_z b^{z-k+1}$$

. . . .

$$(-)^k F^v C^v\Big(C_a^1, \frac{1}{b_m-b_1}, \ldots \frac{1}{b_{m-1}-b_{m-1}}, \frac{1}{b_{m+1}-b_{m+1}}, \ldots$$

$$\ldots \frac{1}{b_m-b_s}, -C_c^1, -\frac{1}{d_1-b_m}, \ldots -\frac{1}{d_u-b_m}, \frac{1}{b_m}\Big)^k \Sigma_0^z B_z b^z\Big]$$

$$\left(\frac{1}{b_m-a_1},\ \frac{1}{b_m-a_2},\ \ldots\ \frac{1}{b_m-a_r}\right),\quad \frac{1}{c_1-b_m},\ \frac{1}{c_2-b_m},\ \ldots\ \frac{1}{c_q-b_m}\Big).$$

Hieraus ergeben sich nun leicht die Werthe der E, wenn die Function

$$\frac{fx}{f(x+a_r)\,\varphi(x+b_s)^{p_s} f(c_q-x)\,\varphi(d_u-x)^{t_u} x^n}$$

in Partialbrüche zerlegt werden soll. Es ist dann $-b_1$, $-b_2$, ... $-b_s$, $-a_1$, $-a_2$, ... $-a_r$ statt b_1, b_2, ... b_s, a_1, a_2, ... a_r zu setzen. Werden diese Werthe eingeführt, so ist aus den Gleichungen (129.) und (130.)

$$131.\quad {}^mE_k = (-)^r \frac{(b_m-b_m)^{p_m} C_a^r C_c^q \Sigma_k^z \frac{z^{k|-1}}{1^{k|1}} (-)^{z-k} B_z b_m^{z-k}}{(b_m-b_1)^{p_1} \ldots (b_m-b_s)^{p_s}(d_1+b_m)^{t_1} \ldots (d_u+b_m)^{t_u} b_m^n}$$

$$+FC'\Big(C_a, \frac{1}{b_m-b_1}, \ldots \frac{1}{b_m-b_{m-1}}, \frac{1}{b_m-b_{m+1}}, \ldots \frac{1}{b_m-b_s}, C_c, \frac{1}{d_1+b_m}, \ldots$$

$$\ldots \frac{1}{d_u+b_m}, \frac{1}{b_m}\Big)^1 E_{k-1}$$

. . . .

$$(-)^k FC'\Big(C_a, \frac{1}{b_m-b_1}, \ldots \frac{1}{b_m-b_{m-1}}, \frac{1}{b_m-b_{m+1}}, \ldots \frac{1}{b_m-b_s}, C_c, \frac{1}{d_1+b_m}, \ldots$$

$$\ldots \frac{1}{d_u+b_m}, \frac{1}{b_m}\Big)^k {}^mE_0,$$

$$132.\quad {}^mE_k = (-)^r \frac{(b_m-b_m)^{p_m} C_a^r C_c^q}{(b_m-b_1)^{p_1} \ldots (b_m-b_s)^{p_s}(d_1+b_m)^{t_1} \ldots (d_u+b_m)^{t_u} b_m^n}\Big[\Sigma_k^z \frac{z^{k|-1}}{1^{k|1}} (-)^{z-k} B_z b_m^{z-k}$$

$$+F'C'\Big(C_a^1, \frac{1}{b_m-b_1}, \ldots \frac{1}{b_m-b_{m-1}}, \frac{1}{b_m-b_{m+1}}, \ldots \frac{1}{b_m-b_s}, C_c^1, \frac{1}{d_1+b_m}, \ldots$$

$$\ldots \frac{1}{d_u+b_m}, \frac{1}{b_m}\Big)^1 \Sigma_{k-1}^z (-)^{z-k+1} \frac{z^{k-1|-1}}{1^{k-1|1}} B_z b^{z-k+1}$$

$$+FC\Big(C_a^1, \frac{1}{b_m-b_1}, \ldots \frac{1}{b_m-b_{m-1}}, \frac{1}{b_m-b_{m+1}}, \ldots \frac{1}{b_m-b_s}, C_c^1, \frac{1}{d_1+b_m}, \ldots$$

$$\ldots \frac{1}{d_u+b_m}, \frac{1}{b_m}\Big)^k \Sigma_1^z (-)^{z-k+2} \frac{z^{k-2|-1}}{1^{k|1}} B_z b^{z-k+2}$$

. . . .

$$+F'C'\Big(C^1_a, \frac{1}{b_m-b_1}, \dots \frac{1}{b_m-b_{m-1}}, \frac{1}{b_m-b_{m+1}}, \dots \frac{1}{b_m-b_s}, C^1_c, \frac{1}{d_1+b_m}, \dots$$
$$\dots \frac{1}{d_u+b_m}, \frac{1}{b_m}\Big)^k \Sigma_0^z (-)^k B_z b^z$$
$$\Big(\frac{1}{b_m-a_1}, \frac{1}{b_m-a_2}, \dots \frac{1}{b_m-a_r}\Big) \Big(\frac{1}{d_1+b_m}, \frac{1}{d_2+b_m}, \dots \frac{1}{d_u+b_m}\Big).$$

Hierin ist $\nu = r + p_1 + p_2 + \dots p_s + n$. Aus den hier gefundenen Gleichungen lassen sich nun leicht alle besondern Fälle ableiten, wenn auch ein anderer Zeichenwechsel dem Nenner der zu zerlegenden Function zum Grunde liegen sollte. Kommen nur Binomien im Nenner vor, so fallen die Zeichen, welche Verbindungen andeuten, weg. Wir heben auch hier einige besondere Fälle hervor, um die Brauchbarkeit der gefundenen Gleichungen zu zeigen.

Besondere Fälle.

Die schon unter IV. zusammengestellten Fälle legen wir auch hier zum Grunde, um die besonderen Formen einer Function, deren Nenner aus drei Factoren besteht, erkennen zu lassen. Einfachere Fälle sind schon oben mitgetheilt. Wir geben die entwickelte Darstellung. Die Werthe für die A sind schon oben mitgetheilt. Die Werthe der Coefficienten, die sich auf das Binomium $(x \pm a)^p$ beziehen, sollen durch E, die der Coefficienten, welche sich auf $(x-b)^q$ und $(b-x)^q$ beziehen, durch H und G bezeichnet werden.

Für die Form der Function

$$133. \quad \frac{fx}{(x-a)^p (x-b)^q x^n}$$

ergiebt sich aus (103.) und (104.), wenn a statt b und b statt c gesetzt wird,

$$E_0 = \frac{B_0 + B_1 a + B_2 a^2 + \dots}{(a-b)^q . a^n}$$

$$E_1 = \frac{B_1 + 2B_2 a + 3B_3 a^2 + \dots}{(a-b)^q . a^n} - \Big(\frac{q}{a-b} + \frac{n}{a}\Big) E_0$$

$$E_2 = \frac{B_2 + 3B_3 a + 6B_4 a^2 + \dots}{(a-b)^q a^n} - \Big(\frac{q}{a-b} + \frac{n}{a}\Big) E_1$$
$$- \Big(\frac{q(q-1)}{1.2(a-b)^2} + \frac{q.n}{(a-b)a} + \frac{n(n-1)}{1.2.a^2}\Big) E_0,$$

. . . .

oder

$$E_1 = \frac{B_1+2B_2a+3B_3a^2+\ldots\ldots}{(a-b)^q a^n} - \frac{B_0+B_1a+B_2a^2+\ldots\ldots}{(a-b)^q a^n}\left(\frac{q}{a-b}+\frac{n}{a}\right)$$

$$E_2 = \frac{B_2+3B_3a+6B_4a^2+\ldots\ldots}{(a-b)^q a^n} - \frac{B_1+2B_2a+3B_3a^2+\ldots\ldots}{(a-b)^q a^n}\left(\frac{q}{a-b}+\frac{n}{a}\right)$$
$$+\frac{B_0+B_1a+B_2a^2+\ldots\ldots}{(a-b)^q a^n}\left(\frac{q(q+1)}{1.2(a+b)^2}+\frac{q.n}{(a-b)a}+\frac{n(n+1)}{1.2.a^2}\right)$$

. . . .

$$H_0 = \frac{B_0+B_1b+B_2b^2+\ldots\ldots}{(b-a)^p b^n}$$

$$H_1 = \frac{B_1+2B_2b+3B_3b^2+\ldots\ldots}{(b-a)^p b^n} - \left(\frac{p}{b-a}+\frac{n}{b}\right)H_0$$

$$H_2 = \frac{B_2+3B_3b+6B_4b^2+\ldots\ldots}{(b-a)^p b^n} - \left(\frac{p}{b-a}+\frac{n}{b}\right)H_1$$
$$-\left(\frac{p(p-1)}{1.2(b-a)^2}+\frac{p.n}{(b-a)b}+\frac{n(n-1)}{1.2.b^2}\right)H_0$$

. . . .

oder

$$H_1 = \frac{B_1+2B_2b+3B_3b^2+\ldots\ldots}{(b-a)^p b^n} - \frac{B_0+B_1b+B_2b^2+\ldots\ldots}{(b-a)^p b^n}\left(\frac{p}{b-a}+\frac{n}{b}\right)$$

$$H_2 = \frac{B_2+3B_3b+6B_4b^2+\ldots\ldots}{(b-a)^p b^n} - \frac{B_1+2B_2b+3B_3b^2+\ldots\ldots}{(b-a)^p b^n}\left(\frac{p}{b-a}+\frac{n}{b}\right)$$
$$+\frac{B_0+B_1b+B_2b^2+\ldots\ldots}{(b-a)^p b^n}\left(\frac{p(p+1)}{1.2(b-a)^2}+\frac{pn}{(b-a)b}+\frac{n(n+1)}{1.2.b^2}\right)$$

. . . .

Für die Form der Function

$$134. \quad \frac{fx}{(x+a)^p(x+b)^q x^n}$$

ist aus (109.) und (110.)

$$E_0 = (-)^{q+n}\frac{B_0-B_1a+B_2a^2-\ldots\ldots}{(a-b)^q a^n}$$

$$E_1 = (-)^{q+n}\frac{B_1-2B_2a+3B_3a^2-\ldots\ldots}{(a-b)^q a^n} + \left(\frac{q}{a-b}+\frac{n}{a}\right)E_0$$

$$E_2 = (-)^{q+n}\frac{B_2-3B_3a+6B_4a^2-\ldots\ldots}{(a-b)^q a^n} + \left(\frac{q}{a-b}+\frac{n}{a}\right)E_1$$
$$-\left(\frac{q(q-1)}{1.2(a-b)^2}+\frac{n.q}{(a-b)a}+\frac{n(n-1)}{1.2.a^2}\right)E_0$$

oder

$$E_1 = (-)^{q+n}\frac{1}{(a-b)^q a^n}\Big[B_1-2B_2a+3B_3a^2\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots+\left(\frac{q}{a-b}+\frac{n}{a}\right)(B_0-B_1a+B_2a^2\ldots\ldots)\Big]$$

$$E_2 = (-)^{q+n} \frac{1}{(a-b)^q a^n} \Big[B_2 - 3B_3 a^2 + 6B_4 a^3 \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + \left(\frac{q}{a-b} + \frac{n}{a}\right)(B_1 - B_2 a + 3B_3 a^2 \ldots\ldots)$$
$$+ \left(\frac{q(q+1)}{1.2(a-b)^2} + \frac{qn}{(a-b)a} + \frac{n(n+1)}{1.2.a^2}\right)(B_0 - B_1 a + B_2 a^2 - \ldots\ldots)\Big],$$

$$H_0 = (-)^{p+n} \frac{B_0 - B_1 b + B_2 b^2 - \ldots\ldots}{(b-a)^p b^n}$$

$$H_1 = (-)^{p+n} \frac{B_1 - 2B_2 b + 3B_3 b^2 - \ldots\ldots}{(b-a)^p b^n} + \left(\frac{p}{b-a} + \frac{n}{b}\right) E_0$$

$$H_2 = (-)^{p+n} \frac{B_2 - 3B_3 b + 6B_4 b^2 - \ldots\ldots}{(b-a)^p b^n} + \left(\frac{p}{b-a} + \frac{n}{b}\right) E_1$$
$$- \left(\frac{p(p-1)}{1.2(b-a)^2} + \frac{pn}{(b-a)b} + \frac{n(n-1)}{1.2.b^2}\right) E_0$$

. . . .

oder

$$H_1 = (-)^{p+n} \frac{1}{(b-a)^p b^n} \Big[B_1 - 2B_2 b + 3B_3 b^2 \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + \left(\frac{p}{b-a} + \frac{n}{b}\right) B_0 - B_1 b + B_2 b^2 - \ldots\ldots)\Big]$$

$$H_2 = (-)^{p+n} \frac{1}{(b-a)^p b^n} \Big[B_2 - 3B_3 b + 6B_4 b^2 - \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + \left(\frac{p}{b-a} + \frac{n}{b}\right)(B_1 - 2B_2 b + 3B_3 b^2 \ldots\ldots)$$
$$+ \left(\frac{p(p+1)}{1.2(b-a)^2} + \frac{pn}{(b-a)b} + \frac{n(n+1)}{1.2.b^2}\right)(B_0 - B_1 b + B_2 b^2 - \ldots\ldots)\Big]$$

. . . .

Für die Form der Function

$$135. \qquad \frac{fx}{(x+a)^p (x-b)^q x^n}$$

ergiebt sich aus (133.), wenn $-a$ statt a gesetzt wird,

$$E_0 = (-)^{q+n} \frac{B_0 - B_1 a + B_2 a^2 - \ldots\ldots}{(a+b)^q a^n}$$

$$E_1 = (-)^{q+n} \frac{B_1 - 2B_2 a + 3B_3 a^2 - \ldots\ldots}{(a+b)^q a^n} + \left(\frac{q}{a+b} + \frac{n}{a}\right) E_0$$

$$E_2 = (-)^{q+n} \frac{B_2 - 3B_3 a + 6Ba^2 - \ldots\ldots}{(a+b)^q a^n} + \left(\frac{q}{a+b} + \frac{n}{a}\right) E_1$$
$$- \left(\frac{q(q-1)}{1.2(a+b)^2} + \frac{qn}{(a+b)a} + \frac{n(n-1)}{1.2.a^2}\right) E_0$$

oder

$$E_1 = (-)^{q+n} \frac{1}{(a+b)^q a^n} \Big[B_1 - 2B_2 a + 3B_3 a^2 \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + \left(\frac{q}{a+b} + \frac{n}{a}\right)(B_0 - B_1 a + B_2 a^2)\Big]$$

$$E_2 = (-)^{q+n}\frac{1}{(a+b)^q a^n}\Big[B_2 - 3B_3 a + 6B_4 a^2 - \dots$$
$$\dots + \left(\frac{q}{a+b}+\frac{n}{a}\right)(B_1 - 2B_2 a + 3B_3 a^2 \dots)$$
$$+\left(\frac{q(q+1)}{1.2(a+b)^2}+\frac{qn}{(a+b)a}+\frac{n(n+1)}{1.2.a^2}\right)(B_0 - B_1 a + B_2 a^2 - \dots)\Big],$$

. . . .

$$H_0 = \frac{B_0 + B_1 b + B_2 b^2 + \dots}{(b+a)^p b^n},$$
$$H_1 = \frac{B_1 + 2B_2 b + 3B_3 b^2 + \dots}{(b+a)^p b^n} - \left(\frac{p}{b+a}+\frac{n}{b}\right)E_0,$$
$$H_2 = \frac{B_2 + 3B_3 b + 6B_4 b^2 + \dots}{(b+a)^p b^n} - \left(\frac{p}{b+a}+\frac{n}{b}\right)E_1$$
$$-\left(\frac{p(p-1)}{1.2(b+a)^2}+\frac{p.n}{(b+a)b}+\frac{n(n-1)}{1.2.b^2}\right)E_0,$$

. . . .

$$H_1 = \frac{1}{(b+a)^p b^n}\Big[B_1 + 2B_2 b + 3B_3 b^2 + \dots$$
$$\dots - \left(\frac{p}{b+a}+\frac{n}{b}\right)B_0 + B_1 b + B_2 b^2 + \dots)\Big],$$
$$H_2 = \frac{1}{(b+a)^p b^n}\Big[B_2 + 3B_3 b + 6B_4 b^2 + \dots$$
$$\dots - \left(\frac{p}{b+a}+\frac{n}{b}\right)(B_1 + 2B_2 b + 3B_3 b^2 \dots)$$
$$+\left(\frac{p(p+1)}{1.2(b+a)^2}+\frac{pn}{(b+a)b}+\frac{n(n+1)}{1.2.b^2}\right)(B_0 + B_1 b + B_2 b^2 \dots)\Big],$$

. . . .

Für die Form der Function

$$136. \qquad \frac{fx}{(a-x)^p(b-x)^q x^n}$$

ergiebt sich aus (111.) u. (112.), wenn die gehörigen Werthe eingeführt werden:

$$E_0 = \frac{B_0 + B_1 a + B_2 a^2 + \dots}{(b-a)^q a^n},$$
$$E_1 = -\frac{B_1 + 2B_2 a + 3B_3 a^2 + \dots}{(b-a)^q a^n} - \left(\frac{q}{b-a}-\frac{n}{a}\right)E_0,$$
$$E_2 = \frac{B_2 + 3B_3 a + 6B_4 a^2 + \dots}{(b-a)^q a^n} - \left(\frac{q}{b-a}-\frac{n}{a}\right)E_1$$
$$-\left(\frac{q(q-1)}{1.2(b-a)^2}-\frac{q.n}{(b-a)a}+\frac{n(n-1)}{1.2.a^2}\right)E_0,$$

$$E_1 = -\frac{1}{(b-a)^q a^n}\Big[B_1 + 2B_2 a + 3B_3 a^2 \ldots.$$
$$\ldots. + \Big(\frac{q}{b-a} - \frac{n}{a}\Big)(B_0 + B_1 a + B_2 a^2 + \ldots.)\Big],$$
$$E_2 = \frac{1}{(b-a)^q a^n}\Big[B_2 + 3B_3 b + 6B_4 b^2 \ldots.$$
$$\ldots. + \Big(\frac{q}{b-a} - \frac{n}{a}\Big)(B_1 + 2B_2 a + 3B_3 a^2 + \ldots.) + \ldots.\Big],$$
$$H_0 = \frac{B_0 + B_1 b + B_2 b^2 + \ldots.}{(a-b)^p b^n},$$
$$H_1 = -\frac{B_1 + 2B_2 b + 3B_3 b^2 + \ldots.}{(a-b)^p b^n} - \Big(\frac{p}{a-b} - \frac{n}{a}\Big) H_0,$$
$$H_2 = \frac{B_2 + 3B_3 b + 6B_4 b^2 + \ldots.}{(a-b)^p b^n} - \Big(\frac{p}{a-b} - \frac{n}{b}\Big) H_1$$
$$-\Big(\frac{p(p-1)}{1.2(a-b)^2} - \frac{pn}{(a-b)b} + \frac{n(n-1)}{1.2.b^2}\Big) H_0,$$

. . . .

$$H_1 = -\frac{1}{(a-b)^p b^n}\Big[B_1 + 2B_2 b + 3B_3 b^2 \ldots.$$
$$\ldots. - \Big(\frac{p}{a-b} - \frac{n}{b}\Big)(B_0 + B_1 b + B_2 b^2 \ldots.)\Big],$$
$$H_2 = \frac{1}{(a-b)^p b^n}\Big[B_2 + 3B_3 b + 6B_4 b^2 \ldots.$$
$$\ldots. + \Big(\frac{p}{a-b} - \frac{n}{c}\Big)(B_1 + 2B_2 b + 3B_3 b^2 \ldots.) + \ldots.\Big].$$

Für die Form der Function

$$137. \quad \frac{fx}{(x-a)^p (b-x)^q x^n}$$

ist aus (129.) u. (130.), (125.) u. (126.):

$$E_0 = \frac{B_0 + B_1 a + B_2 a^2 + \ldots.}{(b-a)^q a^n},$$
$$E_1 = \frac{B_1 + 2B_2 a + 3B_3 a^2 + \ldots.}{(b-a)^q a^n} + \Big(\frac{q}{b-a} - \frac{n}{a}\Big) E_0,$$
$$E_2 = \frac{B_2 + 3B_3 a + 6B_4 a^2 + \ldots.}{(b-a)^q a^n} + \Big(\frac{q}{b-a} - \frac{n}{a}\Big) E_1$$
$$-\Big(\frac{q(q-1)}{1.2(b-a)^2} - \frac{q.n}{(b-a)a} + \frac{n(n-1)}{1.2.a^2}\Big) E_0,$$

. . . .

$$E_1 = \frac{1}{(b-a)^q a^n}\Big[B_1 + 2B_2 a + 3B_3 a^2 \ldots.$$
$$\ldots. + \Big(\frac{q}{b-a} - \frac{n}{a}\Big)(B_0 + B_1 a + B_2 a^2 \ldots.)\Big],$$
$$E_2 = \frac{1}{(b-a)^q a^n}\Big[B_2 + 3B_3 a + 6B_4 a^2 \ldots.$$
$$\ldots. + \Big(\frac{q}{b-a} - \frac{n}{a}\Big)(B_1 + 2B_2 a + 3B_3 a^2 \ldots.) + \ldots.\Big],$$

$$G_0 = \frac{B_0+B_1b+B_2b^2+\ldots.}{(b-a)^p b^n},$$

$$G_1 = -\frac{B_1+2B_2b+3B_3b^2+\ldots.}{(b-a)^p b^n} + \left(\frac{p}{b-a}+\frac{n}{b}\right)G_0,$$

$$G_2 = \frac{B_2+3B_3b+6B_4b^2+\ldots.}{(b-a)^p b^n} + \left(\frac{p}{b-a}+\frac{n}{b}\right)G_1$$
$$-\left(\frac{p(p-1)}{1.2(b-a)^2}+\frac{pn}{(b-a)b}+\frac{n(n-1)}{1.2.b^2}\right)G_0,$$

. . . .

$$G_1 = -\frac{1}{(b-a)^p b^n}\Big[B_1+2B_2b+3B_3b^2+\ldots.$$
$$\ldots. -\left(\frac{p}{b-a}+\frac{n}{b}\right)(B_0+B_1b+B_2b^2\ldots.)\Big],$$

$$G_2 = \frac{1}{(b-a)^p b^n}\Big[B_2+3B_3b+6B_4b^2+\ldots.$$
$$\ldots. -\left(\frac{p}{b-a}+\frac{n}{b}\right)(B_1+2B_2b+3B_3b^2\ldots.)+\ldots.\Big].$$

Für die Form der Function

$$138.\qquad \frac{fx}{(x+a)^p(b-x)^q x^n}$$

ergiebt sich aus (137.), oder aus (131.) u. (132), (123.) u. (124.):

$$E_0 = (-)^n\frac{B_0-B_1a+B_2a^2-\ldots.}{(b+a)^q a^n},$$

$$E_1 = (-)^n\frac{B_1-2B_2a^2+3B_3a^2-\ldots.}{(b+a)^p b^n} + \left(\frac{q}{b+a}+\frac{n}{a}\right)E_0,$$

$$E_2 = (-)^n\frac{B_2-3B_3a+6B_4a^2-\ldots.}{(b+a)^q a^n} + \left(\frac{q}{b+a}+\frac{n}{a}\right)E_1$$
$$-\left(\frac{q(q-1)}{1.2(b+a)^2}+\frac{q.n}{(b+a)a}+\frac{n(n-1)}{1.2.a^2}\right)E_0,$$

. . . .

$$E_1 = (-)^n\frac{1}{(b+a)^q a^n}\Big[B_1-2B_2a+3B_3a^2-\ldots.$$
$$\ldots.+\left(\frac{q}{b+a}+\frac{n}{a}\right)(B_0-B_1a+B_2a^2\ldots.)\Big],$$

$$E_2 = (-)^n\frac{1}{(b+a)^q a^n}\Big[B_2-3B_3a^2+6B_4a^2-\ldots.$$
$$\ldots.+\left(\frac{q}{b+a}+\frac{n}{a}\right)(B_1-2B_2a+3B_3a^2-\ldots.)+\ldots.\Big],$$

$$G_0 = \frac{B_0+B_1b+B_2b^2+\ldots.}{(b+a)^p b^n},$$

$$G_1 = -\frac{B_1+2B_2b+3B_3b^2+\ldots.}{(b+a)^p b^n} + \left(\frac{p}{b+a}+\frac{n}{b}\right)G_0,$$

$$G_2 = \frac{B_2+3B_3b+6B_4b^2+\dots}{(b+a)^p b^n} + \left(\frac{p}{b+a}+\frac{n}{b}\right)G_1$$
$$-\left(\frac{p(p-1)}{1.2(b+a)^2}+\frac{p.n}{(b+a)b}+\frac{n(n-1)}{1.2.b^2}\right)G_0,$$

. . . .

$$G_1 = -\frac{1}{(b+a)^p b^n}\Big[B_1+2B_2b+3B_3b^2+\dots$$
$$\dots -\left(\frac{p}{b+a}+\frac{n}{b}\right)(B_0+B_1b+B_2b^2+\dots)\Big],$$

$$G_2 = \frac{1}{(b+a)^p b^n}\Big[B_2+3B_3b+6B_4b^2+\dots$$
$$\dots -\left(\frac{p}{b+a}+\frac{n}{b}\right)(B_1+2B_2b+3B_3b^2+\dots)+\dots\Big].$$

Die vorstehenden Gleichungen sollen nun auf die oben angegebenen Beispiele angewendet werden. Für die Form

$$\frac{1+2x}{(x-2)^3(x-1)x^2}$$

ist aus (133.), wenn $a=2$, $b=1$, $B_0=1$, $B_1=2$, $p=3$, $q=1$, $n=2$ gesetzt wird:

$$E_0 = \frac{1+2.2}{(2-1)^1.2^2} = \tfrac{5}{4},$$

$$E_1 = \frac{2}{(2-1)2^2} - \left(\frac{1}{2-1}+\frac{2}{2}\right).\tfrac{5}{4} = \tfrac{1}{2}-\tfrac{5}{2} = -2,$$

$$E_2 = 0+\left(\frac{1}{2-1}+\frac{2}{2}\right)(-2)-\left(0+\frac{1.2}{(2-1)2}+\frac{1}{2^2}\right)\tfrac{5}{4} = 4-\tfrac{5}{4}.\tfrac{5}{4} = \tfrac{39}{16},$$

$$H_0 = \frac{1+.2.1}{(1-2)^3 1^2} = -3.$$

Hiernach ist, in Rücksicht auf die oben entwickelten Werthe für A_0 u. A_1,

$$\frac{1+2x}{(x-2)^3(x-1)x^2} = \frac{5}{4(x-2)^3} - \frac{2}{(x-2)^2} + \frac{39}{16(x-2)} - \frac{3}{x-1} + \frac{1}{8x^2} + \frac{9}{16x}.$$

Die Function

$$\frac{1+2x}{(x+2)^3(x+1)x^2}$$

zerfällt nach (134.) in folgende Partialbrüche:

$$E_0 = (-)^{1+2}\frac{1-2.2}{(2-1)^1 2^2} = \tfrac{3}{4},$$

$$E_1 = (-)^{1+2}\frac{2}{(2-1)^1 2^2} + \left(\frac{1}{2-1}+\frac{2}{2}\right).\tfrac{3}{4} = -\tfrac{1}{2}+\tfrac{3}{2} = 1,$$

$$E_2 = +\left(\frac{1}{2-1}+\frac{2}{2}\right).1-\left(\frac{2.1}{(2-1)2}+\frac{1}{4}\right).\tfrac{3}{4} = 2-\tfrac{5}{4}.\tfrac{3}{4} = \tfrac{17}{16},$$

$$H_0 = (-)^{3+2}\frac{1-2.1}{(1-2)^3 1^2} = -1.$$

Hiernach ist

$$\frac{1+2x}{(x+2)^3(x+1)x^2} = \frac{3}{4(x+2)^3} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{17}{16(x+2)} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{8x^2} - \frac{1}{16x}.$$

Eben so ist für die übrigen Functionen, welche in dem vorstehenden Schema enthalten sind:

$$\frac{1+2x}{(x+2)^3(x-1)x^2} = \frac{1}{4(x+2)^3} + \frac{1}{6(x+2)^2} + \frac{11}{144(x+2)} + \frac{1}{9(x-1)} - \frac{1}{8x^2} - \frac{3}{16x};$$

$$\frac{1+2x}{(2-x)^3(1-x)x^2} = -\frac{5}{4(2-x)^3} - \frac{2}{(2-x)^2} - \frac{39}{16(2-x)} + \frac{3}{1-x} + \frac{1}{8x^2} + \frac{9}{16x};$$

$$\frac{1+2x}{(x-2)^3(1-x)x^2} = -\frac{5}{4(x-2)^3} + \frac{2}{(x-2)^2} - \frac{39}{16(x-2)} - \frac{3}{1-x} - \frac{1}{8x^2} - \frac{9}{16x};$$

$$\frac{1+2x}{(x+2)^3(1-x)x^2} = -\frac{1}{4(x+2)^3} - \frac{1}{6(x+2)^2} - \frac{11}{144(x+2)} + \frac{1}{9(1-x)} + \frac{1}{8x^2} - \frac{3}{16x}.$$

Hieran knüpfen wir noch die Zerlegung folgender Function

$$\frac{1}{(x+1)(1-x)^2x^3},$$

welche *Euler* in seiner Analysis (*1ster Thl. p. 51. Uebersetzung von Michelsen*) nach seiner Methode behandelt hat. Sie ergiebt sich aus (86.) und (138.), wenn $B_0 = 1$, $p = 1$, $q = 2$, $n = 3$, $a = 1$ und $b = 1$ gesetzt wird. Es ist

$$A_0 = \frac{1}{1^1.1^2} = 1,$$

$$A_1 = 0 - 1(1-2).1 = 1,$$

$$A_2 = 0 - 1(1-2).1 - \left(0 - \frac{1.2}{1.1} + \frac{2.1}{1.2.1^2}\right).1 = +1+1 = 2,$$

$$E_0 = (-)^3.\frac{1}{(1+1)^1.1^3} = -\tfrac{1}{4},$$

$$G_0 = \frac{1}{(1+1)^1.1^3} = \tfrac{1}{2},$$

$$G_1 = -0 + \left(\frac{1}{1+1} + \frac{3}{1}\right).\tfrac{1}{2} = \tfrac{7}{4}.$$

Hiernach ist

$$\frac{1}{(x+1)(1-x)^2x^3} = -\frac{1}{4(x+1)} + \frac{1}{2(1-x)^2} + \frac{7}{4(1-x)} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x}.$$

Das vorstehende Beispiel wurde deswegen hier aufgenommen, damit man sich von der Brauchbarkeit der hier mitgetheilten Zerlegungsmethode überzeugen könne. *Euler* hat eine und eine halbe Seite Calcul nöthig, um die vorstehende Function in Partialbrüche zu zerlegen. Nach

unserer Methode sind nicht einmal sechs volle Zeilen erforderlich, und doch ist die Rechnung in aller Ausführlichkeit mitgetheilt. Zugleich bestätigt dieses Beispiel die Bemerkung, dafs $a=b$ sein kann.

VI.

Die für die Werthe der E, G und A gefundenen Gleichungen lassen sich auch durch Differenzialrechnung ableiten. Wie dies geschehe, soll an dem E gezeigt werden. Es sei, wie oben,

$$\frac{fx}{(x-b)^p x^n} = \frac{E_0}{(x-b)^p} + \frac{E_1}{(x-b)^{p-1}} + \frac{E_2}{(x-b)^{p-2}} + \dots$$
$$\dots + \frac{E_{p-1}}{x-b} + \frac{A_0}{x^n} + \frac{A_1}{x^{n-1}} + \dots + \frac{A_{n-1}}{x},$$

so entsteht hieraus

139. $$fx = [E_0 + E_1(x-b) + E_2(x-b)^2 + \dots + E_{p-1}(x-b)^{p-1}]x^n + (x-b)^p[A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_{n-1}x^{n-1}].$$

Wird hierin $x=b$ gesetzt, so verschwindet der zweite Ausdruck auf der rechten Seite des Gleichheitzeichens ganz, nebst allen Gliedern des ersten bis auf eines und man hat

$$E_0 = \frac{f(x=b)}{b^n} = \frac{B_0 + B_1 b + B_2 b^2 + \dots + B_z b^z}{b^n}.$$

Wird die Gleichung (139.) differenziirt und durch ∂x dividirt, so entsteht

$$\frac{\partial fx}{\partial x} = [E_1 + 2E_2(x-b) + 3E_3(x-b)^2 \dots]x^n + nx^{n-1}[E_0 + E_1(x-b) + E_2(x-b)^2 \dots] + \frac{\partial}{\partial x}[(x-b)^p \Sigma_1^n A_{n-1}x^{n-1}].$$

Wird auch hier $x=b$ gesetzt, so verschwinden alle Glieder auf der rechten Seite bis auf zwei und es ergiebt hieraus zur Bestimmung des Werthes von E_1:

$$E_1 = \frac{\partial f(x=b)}{\partial x . b^n} - \frac{nE_0}{b}.$$

Wird die eben differenziirte Gleichung noch einmal differenziirt, durch ∂x dividirt und nach dem Differenziiren $x=b$ gesetzt, so läfst sich hieraus der Werth von E_2 bestimmen. Es findet sich

$$E_2 = \frac{\partial^2 f(x=b)}{1.2(\partial x)^2 b^n} - \frac{nE_1}{b} - \frac{n(n-1)}{1.2.b^2}E_0.$$

Wird obige Gleichung wieder differenziirt, durch ∂x dividirt, dann $x=b$ gesetzt und diese Entwicklungsweise so fortgeführt, so ergeben sich folgende Ausdrücke:

140. $$E_0 = \frac{f(x=b)}{b^n},$$

$$E_1 = \frac{\partial f(x=b)}{\partial x . b^n} - \frac{n}{b} E_0,$$

$$E_2 = \frac{\partial^2 f(x=b)}{1.2(\partial x)^2 b^n} - \frac{n E_1}{b} - \frac{n(n-1)}{1.2.b^2} E_0,$$

$$E_3 = \frac{\partial^3 f(x=b)}{1.2.3(\partial x)^3 b^n} - \frac{n E_2}{b} - \frac{n(n-1)}{1.2.b^2} E_1 - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3.b^3} E_0,$$

. . . .

$$E_k = \frac{\partial^k f(x=b)}{1.2 \ldots . k(\partial x)^k b^n} - \frac{n E_{k-1}}{b} - \frac{n(n-1)}{1.2} \frac{E_{k-2}}{b^2} - \ldots .$$

$$\ldots . - \frac{n(n-1) \ldots . (n-k+1)}{1.2 \ldots . k . b^k} E_0.$$

Durch Substitution ergeben sich hieraus folgende Gleichungen:

141. $$E_1 = \frac{1}{b^n}\left[\frac{\partial f(x=b)}{\partial x} - \frac{n f(x=b)}{b}\right],$$

$$E_2 = \frac{1}{b^n}\left[\frac{\partial^2 f(x=b)}{1.2(\partial x)^2} - \frac{n}{1} \frac{\partial f(x=b)}{\partial x . b} + \frac{n(n+1)}{1.2} \frac{f(x=b)}{b^2}\right].$$

. . . .

$$E_k = \frac{1}{b^n}\left[\frac{\partial^k f(x=b)}{1^{k|1}(\partial x)^k} - \frac{n}{1} \frac{\partial^{k-1} f(x=b)}{1^{k-1|1}(\partial x)^{k-1} b} + \ldots . (-)^k \left(\frac{n}{1}\right)^{k|1} \frac{f(x=b)}{b^k}\right].$$

Bemerkt man nun, dafs

$$f(x=b) = B_0 + B_1 b + B_2 b^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots B_z b^z = \Sigma_0^z B_z b^z,$$

$$\frac{\partial f(x=b)}{\partial x} = B_1 + B_2 b + B_3 b^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots z B_z b^{z-?} = \Sigma_1^z \frac{z}{1} B_z b^{z-1},$$

$$\frac{\partial^2 f(x=b)}{1.2(\partial x)^2} = B_2 + \frac{3.2}{1.2} B_3 b + \frac{4.3}{1.2} B_4 b^2 + \ldots . \frac{z(z-1)}{1.2} B_z b^{z-2} = \Sigma_1^z \frac{z^{2|-1}}{1^{2|1}} B_z b^{z-2}.$$

u. s. w., so ergiebt sich hieraus die Identität zwischen den unter (89.) und (90.) und den hier gegebenen Gleichungen.

Auf ganz gleiche Weise läfst sich die Function

$$\frac{fx}{f(x-a_r)(x-b)^p x^n}$$

behandeln. Man findet

142. $$E_0 = \frac{f(x=b) C^r}{b^n},$$

$$E_1 = \frac{\partial f(x=b) C^r}{\partial x . b^n} - E_0\left(C^1 + \frac{n}{b}\right),$$

$$E_2 = \frac{\partial^2 f(x=b) C^r}{1.2(\partial x)^2 b^n} - \left(C^1 + \frac{n}{b}\right) E_1 - \left(C^2 + \frac{n C^1}{b} + \frac{n(n-1)}{1.2.b^2}\right) E_{0r}$$

. . . .

$$E_k = \frac{\partial^k f(x=b)\, C^r}{1^{k|1} (\partial x)^k b^n} - \left(C^1 + \frac{n}{b}\right) E_{k-1} - \ldots \\ \ldots - \left(C^k + \frac{n\, C^{k-1}}{b} + \ldots \frac{n^{k|-1}}{1^{k|1}} \frac{1}{b^k}\right) E_0$$

und

143. $$E_0 = \frac{f(x=b)\, C^r}{b^n},$$

$$E_1 = \frac{C^r}{b^n}\left[\frac{\partial f(x=b)}{\partial x} - \left(C'^1 + \frac{n}{b}\right) f(x=b)\right],$$

$$E_2 = \frac{C^r}{b^n}\left[\frac{\partial^2 f(x=b)}{1.2 (\partial x)^2} - \left(C'^1 + \frac{n}{b}\right) \frac{d f(x=b)}{\partial x} \\ + \left(C'^2 + \frac{n\, C'^1}{b} + \frac{n(n+1)}{1.2.b^2}\right) f(x=b)\right],$$

. . . .

$$E_k = \frac{C^r}{b^n}\left[\frac{\partial^k f(x=b)}{1^{k|1} (\partial x)^k} - \left(C'^1 + \frac{n}{b}\right) \frac{\partial^{k-1} f(x=b)}{1^{k-1,1} (\partial x)^{k-1}} + \ldots \\ \ldots (-)^k \left(C'^k + \frac{n\, C'^{k-1}}{b} + \ldots + \frac{n^{k|1}}{1^{k|1}} \frac{1}{b^k}\right) f(x=b)\right]$$

$$\left(\frac{1}{b-a_1},\ \frac{1}{b-a_2},\ \frac{1}{b-a_3},\ \ldots\ \frac{1}{b-a_r}\right).$$

Vergleicht man diese Gleichungen mit (97.) und (98.), so erkennt man leicht ihre Identität mit denselben. Nun kann man die früher angegebene Methode oder die der Differenzialrechnung weiter verfolgen, und man wird immer zu denselben Resultaten gelangen, wie in V. Sollen die Gleichungen der A durch Differenzialrechnung entwickelt werden, so führt das eben angeführte Verfahren zum Ziele, wenn nach dem Differenziiren $x = 0$ gesetzt wird. Uebrigens ist zu bemerken, daſs zur Entwicklung der hier gefundenen Resultate die unter II. mitgetheilten Hülfssätze aus den Combinationen nöthig sind, auch wenn die Differenzialrechnung als Mittel der Ableitung benutzt wird.

Der Ueberblick über die vorliegende Abhandlung zeigt, wie die hier gefundenen Gleichungen unter einander zusammenhängen, und wie sie von einander abgeleitet werden können. Die Gleichungen (78 — 81.), welche zur Werthbestimmung der A dienen, sind allgemein. Aus ihnen lassen sich alle besonderen Fälle ableiten, welche in IV. zusammengestellt sind, wenn die Zeichen beachtet, und die Exponenten der auszustoſsenden Binomien $= 0$ gesetzt werden.

Noch allgemeiner sind die Gleichungen, welche in V. gefunden wurden; denn alle in IV. mitgetheilten Gleichungen lassen sich aus ihnen ableiten. Hiezu ist nur nöthig, noch ein weiteres Binomium in die allgemeine Function (1.) einzuführen, wodurch sie in folgende übergeht:

$$\frac{fx}{f(x-a_r)\,\varphi(x\pm b_s)^{p_s}\,f(c_q-x)\,\varphi(d_u-x)^{t_u}\,(x-g)^w\,x^n},$$

dann diese Function nach Maafsgabe der Gleichungen (129—132.) zu entwickeln, $n=0$ zu setzen, den erforderlichen Werth statt x in sämmtliche Binomien einzuführen und ihn sofort in 0 und w in n übergehen zu lassen. Hiedurch entstehen die Gleichungen (78—81.) und aus ihnen alle in IV. angegebenen speciellen Fälle. Dieser Weg der Entwicklung ist vielleicht etwas kürzer, aber beschwerlicher und mühevoller, als der befolgte, und dürfte wohl auch den Ueberblick erschweren. Wir haben es daher vorgezogen, den leichtern und einfachern Entwicklungsgang zu wählen, und zu zeigen, wie die vorgelegte Methode die Werthe der verschiedenen Coefficienten auf getrenntem Wege finden lehrt.

Was endlich die Aufsuchung der hier mitgetheilten Resultate durch Differenzial-Rechnung betrifft, die in VI. enthalten ist, so ergiebt sich bei dem ersten Blicke, dafs die unter IV. und V. angegebenen Resultate ebenfalls leicht und sicher hiedurch gefunden werden können. Wir haben jedoch geglaubt, die hier mitgetheilten Gleichungen auf elementarem Wege suchen zu dürfen, weil eine Methode, welche ihre Sätze auf elementarem Wege entwickelt, derjenigen, welche in ihren Entwicklungen Zuflucht zum höhern Calcul nimmt, wohl vorzuziehen sein möchte; besonders wenn sie, wie hier, sehr leicht und einfach ihren Zweck erreicht und schnell zu allgemeinen Resultaten führt.

Das unter (82—87., 133—138.) vorgelegte Schema giebt einen nicht uninteressanten Ueberblick über die Eigenthümlichkeit der mitgetheilten Gebilde, über das Gesetz, welches ihnen zum Grunde liegt, und über den Zusammenhang, welcher unter ihnen herrscht.

6.

Ueber die Bestimmung des Grades einer durch Elimination hervorgehenden Gleichung.

(Von Herrn Dr. *Ferd. Minding* zu Berlin.)

Es sind zwar verschiedene Methoden bekannt, um aus zwei algebraischen Gleichungen, zwischen zwei Unbekannten, eine neue, nur noch eine Unbekannte enthaltende Gleichung herzuleiten; häufig aber wünscht man nur den Grad dieser Endgleichung zu wissen, nicht sie selbst aufzustellen, und wenn ich nicht irre, so ist eine Regel, welche diesen Grad mit der einem so elementaren Gegenstande angemessenen Leichtigkeit finden lehrte, bis jetzt nicht gegeben worden. Man weifs zwar, wenn die Gleichungen beziehungsweise von den Graden h und k sind, d. h. wenn die höchste Summe der Exponenten eines Gliedes in der einen h, in der anderen k beträgt, dafs alsdann der gesuchte Grad dem Producte hk höchstens gleichkommen kann; hiermit ist aber nur eine Grenze gegeben, von welcher der wirkliche Grad oft sehr abweicht. Um diesen zu finden, ist vor allem nöthig, die wahre Form der Endgleichung festzustellen. Man habe folgende Gleichungen:

1. $f(x,y) = A_0 y^m + A_1 y^{m-1} + A_2 y^{m-2} + \dots + A_{m-1} y + A_m = 0,$

2. $\varphi(x,y) = B_0 y^n + B_1 y^{n-1} + B_2 y^{n-2} + \dots + B_{n-1} y + B_n = 0,$

in welchen die Buchstaben A und B mit angehängten Zeigern beliebige ganze Polynome in x bedeuten. Löset man die Gleichung (2.) nach y auf, bezeichnet ihre Wurzeln mit $y_1, y_2, \dots y_n$, und bildet das Product

3. $$P = f(x,y_1) \cdot f(x,y_2) \dots f(x,y_n),$$

so ist $B_0^m . P$ eine ganze Function von x, und wenn man setzt

4. $$B_0^m . P = \psi x,$$

so ist

5. $$\psi x = 0$$

die verlangte Endgleichung.

Um zu zeigen, dafs $B_0^m . P$ eine ganze Function ist, bemerke man zuerst, dafs P eine rationale Function von x ist, welche, wenn die darin vorkommenden symmetrischen Functionen von $y_1, y_2, \dots y_n$ vermittelst

der Gleichung (2.) in x ausgedrückt werden, nur eine Potenz von B_0 zum Nenner erhalten kann. Bezeichnet man irgend eine jener symmetrischen Functionen durch

$$S = y_1^{m_1} y_2^{m_2} y_3^{m_3} \dots y_n^{m_n} + \dots,$$

wo die nachfolgenden durch Puncte angedeuteten Glieder aus dem ersten durch Verwechselung von $y_1, y_2, \dots y_n$ entstehen, so kann keiner der Exponenten $m_1, m_2, \dots m_n$ gröfser sein als m. Man setze nun:

$$S_1 = \frac{1}{y_1^{m-m_1} \cdot y_2^{m-m_2} \dots y_n^{m-m_n}} + \dots,$$

mithin
$$S = (y_1, y_2 \dots y_n)^m S_1 = (-1)^{mn} \frac{B_n^m}{B_0^m} S_1.$$

Das Zeichen S_1 bedeutet eine ganze symmetrische Function der umgekehrten Wurzeln von (2.), mithin ist der Werth von S_1 ein rationaler Bruch, der nur eine Potenz von B_n zum Nenner haben kann; setzt man daher $S_1 = \frac{Z}{B_n^\lambda}$, wo Z ein ganzes Polynom in x oder genauer eine ganze Function der Polynome $B_0, B_1, \dots B_n$ und λ eine positive ganze Zahl ist, so kommt

$$S = (-1)^{mn} \frac{B_n^m \cdot Z}{B_0^m \cdot B_m^\lambda}.$$

Da nun S offenbar nur eine Potenz von B_0 zum Nenner haben kann, so mufs B_n^λ in dem vorstehenden Zähler aufgehen, mithin ist $B_0^m S$ und folglich auch $B_0^m P = \psi x$ eine ganze Function.

Bezeichnet man die Wurzeln der Gleichung (1.) nach y aufgelöst, durch $\eta_1, \eta_2, \dots \eta_m$, setzt

$$Q = \varphi(x, \eta_1) . \varphi(x, \eta_2) \dots \varphi(x, \eta_m)$$

und bemerkt dafs

$$\varphi(x, \eta_1) = B_0(\eta_1 - y_1)(\eta_1 - y_2) \dots (\eta_1 - y_n), \text{ u. s. f.},$$

so wird:

$$Q = B_0(\eta_1 - y_1) \dots (\eta_1 - y_n) \times B_0(\eta_2 - y_1) \dots (\eta_2 - y_n) \times \dots$$
$$\dots \times B_0(\eta_m - y_1) \dots (\eta_m - y_n),$$

und weil

$$A_0(y_1 - \eta_1)(y_1 - \eta_2) \dots (y_1 - \eta_m) = f(x, y_1), \text{ u. s. f.},$$

so folgt:

$$6. \quad A_0^n Q = (-1)^{mn} B_0^m P.$$

Hieraus ergiebt sich, dafs $\psi x = 0$ die verlangte Endgleichung ist. Nämlich für jeden der Aufgabe zusagenden Werth von x wird nothwen-

dig $P=0$ (eben so auch $Q=0$), also $\psi x=0$. Sollte ferner diese Gleichung einen überflüssigen Factor enthalten, so wäre für einen solchen $\psi x=0$, zugleich aber weder $P=0$ noch $Q=0$; alsdann müfsten, wegen (4.) und (6.), A_0 und B_0 zugleich verschwinden, was im Allgemeinen nicht möglich ist. Haben in einem besonderen Falle A_0 und B_0 einen Factor gemein, so ist allemal auch das Polynom ψx durch diesen Factor theilbar, weil es immer, wie leicht zu sehen, von folgender Form ist: $\psi x = A_0 U + B_0 V$, in welcher U und V ganze Polynome sind; da man jedoch einen solchen Fall stets durch eine unendlich kleine Aenderung der Coefficienten beseitigen kann, und zwar ohne den Grad eines derselben zu ändern, so folgt, dafs die Gleichung $\psi x=0$ in keinem Falle eine der Aufgabe fremde Wurzel darbietet.

Der Grad des Polynoms ψx ergiebt sich nun auf folgende Weise. Man hat

$$\psi x = B_0^m . f(x, y_1) . f(x, y_2) \ldots . f(x, y_n).$$

Entwickelt man die Wurzeln $y_1, y_2, \ldots. y_n$ der Gleichung (2.) nach fallenden Potenzen von x, und setzt die erhaltenen Reihen anstatt jener in vorstehenden Ausdruck, so werden alle gebrochnen und negativen Potenzen von x sich gegenseitig aufheben und das Polynom ψx wird unverändert, wie vorhin, hervorgehen. Da nur der Grad von ψx verlangt wird, so setze man statt jener Reihe nur ihre ersten Glieder, die für $y_1, y_2, \ldots. y_n$ beziehungsweise sein mögen: $c_1 x^{h_1}, c_2 x^{h_2}, \ldots. c_n x^{h_n}$. Das Verfahren, durch welches die Reihen und namentlich die höchsten Exponenten $h_1, h_2, \ldots. h_n$ oder die *Grade* der Wurzeln gefunden werden, ist hinlänglich bekannt; man vergleiche z. B. *Lacroix Traité* S. 223 der ersten Ausgabe, wo die Entwickelung nach steigenden Potenzen gezeigt wird. Man bestimme hierauf den höchsten Exponenten von x in jeder der Functionen $f(x, c_1 x^{h_1})$, $f(x, c_2 x^{h_2}), \ldots.$ oder die *Grade* der Functionen $f(x, y_1), f(x, y_2), \ldots.$, welche mit $k_1, k_2, \ldots. k_n$ bezeichnet werden mögen. Diese können ganz oder gebrochen, aber nie negativ sein, weil A_n wenigstens vom Grade Null ist. Wird endlich noch der Grad von B_0 mit b bezeichnet, so ist

$$7. \quad mb + k_1 + k_2 + k_3 + \ldots. + k_n$$

nothwendig eine *ganze* Zahl, welche den höchsten Exponenten von ψx oder den gesuchten Grad der Endgleichung angiebt. In besonderen Fällen kann man noch die Werthe von $c_1, c_2, \ldots. c_n$ berücksichtigen, um zu sehen, ob der Coefficient des höchsten Gliedes in einem der Factoren

$f(x, y_1)$, ... von ψx und mithin in ψx selbst vielleicht gerade Null wird, und in einem solchen Falle wird man genöthigt sein, auch die folgenden Glieder der Reihen für $y_1, y_2, \ldots y_n$ theilweise in Rechnung zu bringen; es wird jedoch nicht erforderlich sein diese Andeutung hier weiter auszuführen; vielmehr ist klar, dafs im Allgemeinen der obige Werth (7.) den wirklichen Grad des Polynoms ψx darstellt.

Es seien z. B. folgende zwei Gleichungen gegeben, in welchen das Zeichen (x^μ) ein Polynom in x vom Grade μ anzeigt:

$$f(x,y) = (x^2)y^4 + (x^3)y^3 + (x^4)y^2 + (x^5)y + (x^5) = 0,$$

$$\varphi(x,y) = (x^8)y^5 + (x^6)y^4 + (x^9)y^3 + (x^4)y^2 + (x^3)y + (x^4) = 0.$$

Diese Gleichungen sind vom 6ten und vom 13ten Grade, also ist der Grad der Endgleichung nicht höher als $6.13 = 78$. Um ihn genau zu finden, berechne man die Grade der Wurzeln y von $\varphi(x,y) = 0$; man findet sofort $k_1 = k_2 = \frac{1}{2}$, $k_3 = k_4 = k_5 = -\frac{5}{3}$. Hieraus folgen die Grade von $f(x, y_1), \ldots$, nämlich $k_1 = k_2 = \frac{11}{2}$, $k_3 = k_4 = k_5 = 5$; ferner ist $B_0 = (x^8)$, also $b = 8$, und $m = 4$, also der Grad der Endgleichung $mb + k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 = 4.8 + 11 + 15 = 58$.

Wenn man die gegebenen Gleichungen, anstatt nach y, nach x ordnet, um nach obiger Regel den Grad der Endgleichung in y zu suchen, so findet man nicht immer denselben Werth für diesen wie für den vorigen Grad. Zur Erklärung dieses Umstandes mufs man bemerken, dafs die Endgleichung in x nur die *endlichen* Werthe von x ergiebt, welche beiden vorgelegten Gleichungen zu genügen geeignet sind. Steigt also die Endgleichung in y auf einen höheren Grad als die in x, so gehören nothwendig einige Wurzeln der Gleichung in y zu unendlichen Werthen von x. Es ist auch allemal leicht, diese Werthe durch eine unendlich kleine Aenderung der Coefficienten in einer der vorliegenden Gleichungen zum Vorschein zu bringen, und die Ungleichheit der Grade der Endgleichungen zu tilgen. Es seien nämlich die Gleichungen (1.) und (2.) nach x geordnet, folgende:

$$f(x,y) = \alpha_0 x^\mu + \alpha_1 x^{\mu-1} + \ldots + \alpha_\mu = 0,$$

$$\varphi(x,y) = \beta_0 x^\nu + \beta_1 x^{\nu-1} + \ldots + \beta_\nu = 0,$$

wo $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \beta_0, \ldots \beta_\nu$ ganze Polynome in y sind. Wenn nun weder A_0 mit B_0, noch α_0 mit β_0 einen Factor gemein hat, so können weder unendliche Werthe von y für endliche von x, noch unendliche von x für endliche von y Statt finden; folglich kann alsdann zwischen den Graden

der Endgleichungen in x und in y kein Unterschied sein. Man braucht also, wenn gemeinsame Factoren zwischen A_0 und B_0 oder α_0 und β_0 vorhanden sind, nur einen Coefficienten in A_0 und einen in α_0 zu ändern, um für die Endgleichungen in x und y gleiche Grade zu erhalten. Setzt man nachher diese Aenderungen gleich Null, so kann man die Coefficienten der höchsten Glieder der Endgleichungen prüfen, um zu entscheiden, wie viele Werthe von x und wie viele von y unendlich werden, und wie viele *endliche* Lösungen der vorgelegten Gleichungen schliefslich vorhanden sind. Diese Ausführung der Rechnung ist jedoch unnöthig, wenn man die vorgetragene Regel gehörig anwendet. Man habe z. B. folgende Gleichungen:

$$f(x,y) = (a+bx^2)y^4+(c+ex)y^2+gx^3y+h+kx^2+lx^3 = 0,$$
$$\varphi(x,y) = \beta x^5y^2+(\gamma+\delta x^2)y+\lambda+\mu x^4 = 0,$$

oder nach x geordnet:

$$f(x,y) = (l+gy)x^3+(k+by^4)x^2+ey^2x+h+cy^2+ay^4 = 0,$$
$$\varphi(x,y) = \beta y^2x^5+\mu x^4+\delta yx^2+\lambda+\gamma y = 0.$$

Hier ist $A_0 = a+bx^2$, $B_0 = \beta x^5$, $\alpha_0 = l+gy$, $\beta_0 = \beta y^2$; folglich haben, wenn weder $a=0$, noch $l=0$, A_0 und B_0, so wie α_0 und β_0 keinen gemeinsamen Factor, daher die Grade der Endgleichungen in x und y übereinstimmend gefunden werden $=26$. Setzt man aber zugleich $a=0$ und $l=0$, und berechnet alsdann die Grade der Endgleichungen, so findet man 25 für die Gleichung in x, und 24 für die in y. Durch das Verschwinden von a und l werden also zwei Wurzeln der vorigen Endgleichung in y und eine der vorigen Endgleichung in x unendlich; zugleich aber wird auch die neue Endgleichung in x durch x^2, den gemeinsamen Factor von A_0 und B_0, so wie die neue Endgleichung in y durch y, den gemeinsamen Factor von α_0 und β_0, theilbar. Von den 26 endlichen Lösungen, welche den anfänglichen Gleichungen zukamen, bleiben also 23 im Allgemeinen noch endlich, wenn a und l verschwinden; die drei übrigen hingegen sind: $x_{24}=0$, $y_{24}=\infty$; $x_{25}=0$, $y_{25}=\infty$; $x_{26}=\infty$, $y_{26}=0$. Man sieht, wie hier die gesuchte Anzahl der endlichen Lösungen durch wiederholte Anwendung der vorgetragenen Regel und Vergleichung der Resultate gefunden wird.

Nachschrift. Nach Beendigung des Vorstehenden ist mir ein neues Werk zu Gesicht gekommen: „System der Algebra von Dr. *P. J. E. Finck*, Professor zu Strafsburg; Leipzig bei Barth, 1841," in welchem S. 405 zur Bestimmung des Grades der Endgleichung eine viel genauere Regel angegeben wird, als diejenige, deren im Eingange des vorstehenden Aufsatzes erwähnt ist. Die Regel ist, dem Inhalte nach, folgende: Wenn alle Coefficienten A_0, A_1, ... A_m der Gleichung (1.) vom Grade m' und alle Coefficienten B_0, B_1, ... B_n der Gleichung (2.) vom Grade n' sind, so ist der Grad des Polynoms ψx, welches die Endgleichung liefert, folgender: $mn'+nm'$. Der Beweis dieses Satzes, der zwei Seiten des Lehrbuches füllt, folgt sehr einfach aus dem Obigen; denn in diesem Falle sind alle y aus der Gleichung (2.) vom Grade 0, d. i. $h_1=h_2=\ldots=h_n=0$, folglich $k_1=k_2=\ldots=k_n=m'$; zugleich ist $b=n'$, weil B_0 vom Grade n'; folglich der Grad der Endgleichung: $mb+k_1+k_2+\ldots+k_n=mn'+nm'$, w. z. b. w. Wird diese Regel auf Fälle angewendet, in welchen die Coefficienten von ungleichen Graden sind, so ist das Resultat nicht mehr zuverlässig, weil es die Ausgleichung jener Grade voraussetzt, welche fremdartige Wurzeln herbeiführt. Bei der im gegenwärtigen Aufsatz vorgetragenen Regel werden dagegen, um den Grad von ψx zu finden, die Grade der Coefficienten nur so in Rechnung gebracht, wie sie gegeben sind.

7.

Ueber Transformation vielfacher Integrale.

(Vom Herrn Dr. *Haedenkamp* zu Hamm in Westphalen.)

Wenn zwischen den Veränderlichen x_1, x_2, x_3, ... x_n die Gleichung

$$1.\quad \frac{x_1^2}{a_1}+\frac{x_2^2}{a_2}+\frac{x_3^2}{a_3}\ \dots\ \frac{x_n^2}{a_n}=1$$

statt findet, in welcher $a_1, a_2, \dots a_n$ als Constanten betrachtet werden und zwar $a_1 > a_2 > a_3 \dots a_{n-1} > a_n$ ist, so geht aus den Wurzeln der Gleichung

$$\frac{x_1^2}{a_1(a_1-y)}+\frac{x_2^2}{a_2(a_2-y)}+\frac{x_3^2}{a_3(a_3-y)}\ \dots\ \frac{x_n^2}{a_n(a_n-y)}=0$$

oder

$$2.\quad \frac{x_1^2}{a_1-y}+\frac{x_2^2}{a_2-y}+\frac{x_3^2}{a_3-y}\ \dots\ \frac{x_n^2}{a_n-y}=1$$

eine merkwürdige analytische Transformation der Veränderlichen x_1, x_2, x_3, ... x_n hervor, wovon sich fruchtbare Anwendungen auf verschiedene Probleme machen lassen. Ich will hier von dieser Substitution auf bestimmte vielfache Integrale Anwendung machen, die merkwürdige Relationen zwischen den *Abel*schen Transcendenten darstellen. Bezeichnet man die Wurzeln der Gleichung (2.), die vom $(n-1)$ten Grade ist, so wie sie der Gröfse nach auf einander folgen, durch y_1, y_2, y_3, ... y_{n-1}, so sieht man leicht, dafs alle diese Wurzeln positiv sein und einzeln zwischen den einzelnen Intervallen der Reihe der Werthe

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \dots\ a_n$$

liegen müssen. Die Werthe von x_1, x_2, x_3, ... x_n lassen sich nun einfach durch die Wurzeln y_1, y_2, y_3, ... y_{n-1} ausdrücken; man erhält nemlich

$$3.\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{x_1^2}{a_1} &= \frac{(a_1-y_1)(a_1-y_2)(a_1-y_3)\ \dots\ (a_1-y_{n-1})}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)\ \dots\ (a_1-a_n)},\\
\frac{x_2^2}{a_2} &= \frac{(a_2-y_1)(a_2-y_2)(a_2-y_3)\ \dots\ (a_2-y_{n-1})}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)(a_2-a_4)\ \dots\ (a_2-a_n)},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\frac{x_n^2}{a_n} &= \frac{(a_n-y_1)(a_n-y_2)(a_n-y_3)\ \dots\ (a_n-y_{n-1})}{(a_n-a_1)(a_n-a_2)(a_n-a_3)\ \dots\ (a_n-a_{n-1})}.
\end{aligned}\right.$$

Aus der Gleichung (2.) findet man auch noch unmittelbar folgende beiden einfachen Gleichungen:

$$y_1+y_2+y_3 \dots y_{n-1} = a_1+a_2+a_3 \dots a_n-(x_1^2+x_2^2+x_3^2 \dots x_n^2),$$

$$4. \quad \frac{y_1 y_2 y_3 \dots y_{n-1}}{a_1 a_2 a_3 \dots a_n} = \frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+\frac{x_3^2}{a_3^2} \dots \frac{x_n^2}{a_n^2} = 0.$$

Nimmt man von der identischen Gleichung

$$5. \quad \frac{-y(y_1-y)(y_2-y)\dots(y_{n-1}-y)}{(a_1-y)(a_2-y)(a_3-y)\dots(a_n-y)} = 1-\left(\frac{x_1^2}{a_1-y}+\frac{x_2^2}{a_2-y}+\frac{x_3^2}{a_3-y} \dots \frac{x_n^2}{a_n-y}\right)$$

das Differential, und setzt, nach der Differentiation, nach einander y_1, y_2, y_3, ... y_{n-1} statt y, so erhält man, da bekanntlich dann der Ausdruck linker Hand, wenn y_m eine der Wurzeln bezeichnet, in

$$\frac{-y_m(y_1-y_m)(y_2-y_m)\dots(y_{n-1}-y_m)}{(a_1-y_m)(a_2-y_m)(a_3-y_m)\dots(a_n-y_m)}$$

übergeht, folgende Relationen:

$$6. \quad \begin{cases} \frac{x_1^2}{(a_1-y_1)^2}+\frac{x_2^2}{(a_2-y_1)^2}+\frac{x_3^2}{(a_3-y_1)^2} \dots \frac{x_n^2}{(a_n-y_1)^2} \\ \qquad = \frac{-y_1(y_2-y_1)(y_3-y_1)\dots(y_{n-1}-y_1)}{(a_1-y_1)(a_2-y_1)\dots(a_n-y_{n-1})} = \Theta_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{x_1^2}{(a_1-y_{n-1})^2}+\frac{x_2^2}{(a_2-y_{n-1})^2} \dots \frac{x_n^2}{(a_n-y_{n-1})^2} \\ \qquad = \frac{-y_{n-1}(y_1-y_{n-1})(y_2-y_{n-1})\dots(y_{n-2}-y_{n-1})}{(a_1-y_n)(a_2-y_{n-1})(a_3-y_{n-1})\dots(a_n-y_{n-1})} = \Theta_{n-1}. \end{cases}$$

Diese Formeln gehen übrigens auch aus der Gleichung (4.) hervor, wenn man darin $(y_2-y_1)\dots(y_{n-1}-y_1)$ statt y_2, y_3, ... y_{n-1} und (a_1-y_1) ... ... a_n-y_1 statt a_1, a_2, a_3, ... a_n setzt, u. s. w. Differentiirt man die Gleichungen (3.) nach den Veränderlichen y_1, y_2, ... y_{n-1}, so erhält man, wenn man diese Gröfsen einzeln nach einander als veränderlich betrachtet, folgende Formeln:

$$7. \quad \begin{cases} \partial x_1^2+\partial x_2^2 \dots \partial x_n^2 = \Theta_1 \partial y_1^2, \\ \partial x_1^2+\partial x_2^2 \dots \partial x_n^2 = \Theta_2 \partial y_2^2, \\ \dots\dots\dots\dots \\ \partial x_1^2+\partial x_2^2 \dots \partial x_n^2 = \Theta_n \partial y_n^2; \end{cases}$$

und wenn alle zugleich als veränderlich angesehen werden:

$$8. \quad \partial x_1^2+\partial x_2^2 \dots \partial x_n^2 = \Theta_1 \partial y_1^2+\Theta_2 \partial y_2^2+\Theta_3 \partial y_3^2 \dots \Theta_{n-1} \partial y_{n-1}^2.$$

Betrachten wir jetzt das vielfache Integral

$$\int \frac{\partial x_1\, \partial x_2\, \partial x_3 \dots \partial x_{n-1}}{x_n}$$

und drücken dasselbe durch die Veränderlichen $y_1, y_2, y_3, \ldots y_n$ aus, so erhält man mit Hülfe der Gleichungen (4.) und (7.)

$$\frac{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3 \ldots \partial x_{n-1}}{\frac{x_n}{\sqrt{a_n}}}.\Theta = \partial y_1 \partial y_2 \partial y_3 \ldots \partial y_{n-1} \sqrt{\left(\frac{\Theta_1.\Theta_2.\Theta_3 \ldots \Theta_{n-1}}{a_1 a_2 a_3 \ldots a_{n-1}}\right)};$$

und für $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \ldots \Theta_{n-1}$ die oben (4.) und (6.) gefundenen Werthe gesetzt, erhält man das merkwürdige Integral

$$9. \quad \int \frac{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3 \ldots \partial x_n}{x_n \sqrt{(a_1 a_2 \ldots a_{n-1})}}$$

$$= \int \frac{(y_1-y_2)\ldots(y_1-y_{n-1}).(y_2-y_3)\ldots(y_2-y_{n-1})\ldots(y_{n-2}-y_{n-1})\partial y_1 \ldots \partial y_{n-1}}{\sqrt{(X_1 X_2 X_3 \ldots X_{n-1})}},$$

worin der Kürze wegen

$$X_1 = (a_1-y_1)(a_2-y_1)(a_3-y_1) \ldots (a_n-y_1)$$

u. s. w.

gesetzt worden ist. Wenn das Integral linker Hand auf alle positive Werthe der Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$, welche der Bedingung (1.) genügen, ausgedehnt wird: so müssen die Integrale in Beziehung auf $y_1, y_2, \ldots y_{n-1}$ in den Grenzen a_1 und a_2, a_2 und a_3, a_3 und a_4, ... a_{n-1} und a_n genommen werden. Setzt man nun

$$\frac{x_1}{\sqrt{a_1}} = \cos\varphi_1,$$

$$\frac{x_2}{\sqrt{a_2}} = \sin\varphi_1 \cos\varphi_2,$$

$$\frac{x_3}{\sqrt{a_3}} = \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \cos\varphi_3,$$

. . . .

$$\frac{x_{n-1}}{\sqrt{a_{n-1}}} = \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \sin\varphi_3 \ldots \sin\varphi_{n-1} \cos\varphi_n,$$

$$\frac{x_n}{\sqrt{a_n}} = \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \ldots \sin\varphi_n,$$

so ist

$$\int \frac{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3 \partial x_4 \ldots \partial x_{n-1}}{x_n \sqrt{(a_1 a_2 \ldots a_{n-1})}}$$

$$\int \sin^{n-1}\varphi_1 \partial\varphi_1 \int \sin^{n-3}\varphi_2 \partial\varphi_2 \ldots \int \sin\varphi_{n-2} \partial\varphi_{n-2} \int \partial\varphi_{n-1}.$$

Für die angezeigten Grenzen von $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ sind die von $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \ldots \varphi_n$ 0 und $\frac{1}{2}\pi$ geworden, und man erhält daher für dieses Integral, wie es *Jacobi* in der Abhandlung im 12ten Bande dieses Journals zeigt, wenn n

eine gerade Zahl ist:

$$\frac{(\frac{1}{2}\pi)^{\frac{n}{2}}}{2 \ldots\ldots (n-2)(n-3)},$$

und wenn n ungrade ist:

$$\frac{(\frac{1}{2}\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{3 \ldots\ldots (n-2)(n-4)};$$

daher ist, wenn wir diesen Werth durch S bezeichnen,

10. $$S = \int \frac{(y_1-y_2)\ldots(y_1-y_{n-1}).(y_2-y_3)\ldots(y_2-y_{n-1}).(y_3-y_4)\ldots(y_{n-2}-y_{n-1})\partial y_1 \partial y_2 \ldots \partial y_{n-1}}{\sqrt{(X_1 X_2 X_3 \ldots\ldots X_{n-1})}};$$

in welchem Ausdrucke die Veränderlichen $y_1, y_2, \ldots\ldots y_{n-1}$ zwischen den angezeigten Grenzen genommen werden müssen. Dieses vielfache bestimmte Integral enthält, da die Veränderlichen getrennt sind, *Abel*sche Integrale, in welchen die Veränderlichen y unter dem Wurzelzeichen auf den Grad n steigen. Man hat also eine Relation zwischen den verschiedenen Gattungen dieser Integrale, die aber von einer und derselben Ordnung sind. Diese Relation, glaube ich, hat auch *Jacobi* im 19ten Bande Seite 312 d. J gemeint. Setzt man $n = 3$, so erhält man wieder

$$\tfrac{1}{2}\pi = \int \frac{(y_1-y_2)\,\partial y_1\,\partial y_2}{\sqrt{(a_1-y_1)(a_2-y_1)(a_3-y_1)(a_1-y_1)(a_2-y_2)(a_3-y_2)}};$$

welcher Ausdruck die von *Legendre* entdeckte Relation zwischen den elliptischen Integralen 1ster und 2ter Gattung enthält. Will man sich auch bei diesen Integralen, wie man es bei den elliptischen gewohnt ist, der trigonometrischen Functionen bedienen, so setze man

$$y_m = a_m \cos^2\varphi_m^2 + a_{(m+1)} \sin^2\varphi_m,$$

oder auch

$$y_m = \frac{a_m \cdot a_{m+1}}{a_m \cos\varphi_m^2 + a_{(m+1)} \sin\varphi_m^2},$$

wo a_m und a_{m+1} die Grenzen von y_m sind. Durch diese Substitutionen gehen auch die Gleichungen (3.) in folgende über:

$$\frac{x_1}{\sqrt{(a_1)}} = \sin\varphi_1\,\Delta(\alpha_2^1,\varphi_2)\,\Delta(\alpha_3^1,\varphi_3)\,\Delta(\alpha_4^1,\varphi_4)\,\ldots\ldots$$
$$\frac{x_2}{\sqrt{(a_2)}} = \cos\varphi_1\,\sin\varphi_2\,\Delta(\alpha_3^{(2)},\varphi_3)\,\Delta(\alpha_4^{(2)},\varphi_4)\,\ldots\ldots$$
$$\frac{x_3}{\sqrt{(a_3)}} = \Delta(\alpha_1^1,\varphi_1)\,\cos\varphi_2\,\sin\varphi_3\,\Delta(\alpha_4^{(3)},\varphi_4)\,\ldots\ldots$$
$$\frac{x_4}{\sqrt{(a_4)}} = \Delta(\alpha_1^{(2)},\varphi_1)\,\Delta(\alpha_2^{(2)},\varphi_2)\,\cos\varphi_3\,\sin\varphi_4\,\ldots\ldots$$
$$\frac{x_5}{\sqrt{(a_5)}} = \Delta(\alpha_1^{(3)},\varphi_1)\,\Delta(\alpha_2^{(3)},\varphi_2)\,\Delta(\alpha^{(3)}\ \varphi_3)\cos\varphi_4\,\ldots\ldots$$

u. s. w.

Für n Veränderliche erhält man $(n-2)^2$ Moduln; $(n-2)$ derselben bestimmen aber die übrigen. Durch diese Substitution hat *Jacobi* die im 19ten Bande Seite 312 d. J. mitgetheilte Gleichung, welche die kürzeste Linie auf einem 3axigen Ellipsoïd bestimmt, gefunden. *Jacobi* ist aber bei 3 Variabeln nicht stehen geblieben; er hat allgemein die Gleichungen für das Minimum des Integrals (8.):

$$\int \sqrt{(\partial x_1^2 + \partial x_2^2 \ldots\ldots \partial x_n^2)} = \int \partial s = \int \sqrt{(\Theta_1 \partial y_1^2 + \Theta_2 \partial y_2^2 \ldots\ldots \Theta_{n-1} \partial y_{n-1}^2)}$$

entwickelt, obgleich am angeführten Orte nicht mitgetheilt.

Ich will hier noch beiläufig die durch die obigen Substitutionen gefundenen, ersten Integrale des Systems von $n-2$ Differentialgleichungen 2ter Ordnung, auf welche man für n Variabeln geführt wird, in nuce mittheilen. Setzt man der Kürze wegen

$$\frac{\Theta_1 \partial y_1^2}{\partial s^2} = v_1^2, \quad \frac{\Theta_2 \partial y_2^2}{\partial s^2} = v_2^2, \quad \ldots\ldots \quad \frac{\Theta_{n-1} \partial y_{n-2}^2}{\partial s^2} = v_{n-1}^2,$$

so ist für das Minimum von $\int \partial s$, wie ich gefunden habe,

$$(y_1 - y_1) \ldots\ldots (y_1 - y_{n-1}) v_1^2 = c_1 + c^{n-3} y_1 - c^{n-4} y_1^2 \ldots\ldots \pm c y_1^{n-3} \mp y_1^{n-2} = Y_1,$$
$$(y_2 - y_1) \ldots\ldots (y_2 - y_{n-1}) v_2^2 = c_2 + c^{n-3} y_2 - c^{n-4} y_2^2 \ldots\ldots \pm c y_2^{n-3} \mp y_2^{n-2} = Y_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(y_{n-1} - y_1) \ldots (y_{n-1} - y_{n-2}) v_{n-1}^2 = c_{n-1} + c^{n-3} y_{n-1} - c^{n-4} y_{n-1} \ldots \pm c y_{n-1}^{n-3} \mp y_{n-1}^{n-2} = Y_{n-1},$$

und

$$y_1 + y_2 \ldots\ldots y_{n-1} - c = y_1 v_1^2 + y_2 v_2^2 + y_3 v_3^2 \ldots\ldots y_{n-1} v_{n-1}^2;$$

und hieraus mit Hülfe der Werthe von $v_1 \ldots\ldots v_{n-1}$ und $\Theta_1 \ldots\ldots \Theta_{n-1}$:

$$\frac{\partial y_{n-1} \sqrt{y_{n-1}}}{\sqrt{(X_{n-1} Y_{n-1})}} = \frac{\partial y_1 \sqrt{y_1}}{\sqrt{(X_1 Y_1)}} + \frac{\partial y_2 \sqrt{y_2}}{\sqrt{(X_2 Y_2)}} \ldots\ldots \frac{\partial y_{n-2} \sqrt{y_{n-2}}}{\sqrt{(X_{n-2} Y_{n-2})}},$$

$$\frac{y_{n-1} \partial y_{n-1} \sqrt{y_{n-1}}}{\sqrt{(X_{n-1} Y_{n-1})}} = \frac{y_1 \partial y_1 \sqrt{y_1}}{\sqrt{(X_1 Y_1)}} + \frac{y_2 \partial y_2 \sqrt{y_2}}{\sqrt{(X_2 Y_2)}} \ldots\ldots \frac{y_{n-2} \partial y_{n-2} \sqrt{y_{n-2}}}{\sqrt{(X_{n-2} Y_{n-2})}},$$

$$\frac{y_{n-1}^2 \partial y_{n-1} \sqrt{y_{n-1}}}{\sqrt{(X_{n-1} Y_{n-1})}} = \frac{y_1^2 \partial y_1 \sqrt{y_1}}{\sqrt{(X_1 Y_1)}} + \frac{y_2^2 \partial y_2 \sqrt{y_2}}{\sqrt{(X_2 Y_2)}} \ldots\ldots \frac{y_{n-2}^2 \partial y_{n-2} \sqrt{y_{n-2}}}{\sqrt{(X_{n-2} Y_{n-2})}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{y_{n-1}^{m-3} \partial y_{n-1} \sqrt{y_{n-1}}}{\sqrt{(X_{n-1} Y_{n-1})}} = \frac{y_1^{n-3} \partial y_1 \sqrt{y_1}}{\sqrt{(X_1 Y_1)}} + \frac{y_2^{n-3} \partial y_2 \sqrt{y_2}}{\sqrt{(X_2 Y_2)}} \ldots\ldots \frac{y_{n-2}^{n-3} \partial y_{n-2} \sqrt{y_{n-2}}}{\sqrt{(X_{n-2} Y_{n-2})}},$$

wo $X_1, X_2, \ldots\ldots X_{n-1}$ die obigen Bedeutungen haben.

Es seien $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\ldots \alpha_n$ Veränderliche, welche der Bedingung

$$10. \quad \frac{\alpha_1^2}{a_1 + \lambda} + \frac{\alpha_2^2}{a_2 + \lambda} + \frac{\alpha_3^2}{a_3 + \lambda} \ldots\ldots \frac{\alpha_n^2}{a_n + \lambda} = 1$$

genügen, für welche

$$\frac{\alpha_1^2}{a_1}+\frac{\alpha_2^2}{a_2}\dots\dots\frac{\alpha_n^2}{a_n}>1$$

vorausgesetzt wird. Von den n Wurzeln dieser Gleichung liegt eine, und zwar die einzige positive, zwischen 0 und ∞; die andere negative liegt zwischen den Intervallen der Reihe

$$-a_1,\ -a_2,\ -a_3,\ \dots\ a_n.$$

Bezeichnet man diese Wurzeln durch $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots \lambda_n$ und $a_m+\lambda_k=a_m^{(n)}$, so erhält man auch hier wieder, wie in (2.), n Gleichungen, aus welchen die Werthe für $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots \alpha_n$ hervorgehen, nemlich:

$$11.\quad\begin{cases}\dfrac{\alpha_1^2}{a_1^1}=\dfrac{a_1^{(2)}a_1^{(3)}a_1^{(4)}\dots a_1^{(n)}}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\dots(a_1-a_n)},\\ \dfrac{\alpha_2^2}{a_2^1}=\dfrac{a_2^{(2)}a_2^{(3)}a_2^{(4)}\dots a_2^{(n)}}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)\dots(a_2-a_n)},\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \dfrac{\alpha_n^2}{a_n^1}=\dfrac{a_n^{(2)}a_n^{(3)}a_n^{(4)}\dots a_n^{(n)}}{(a_n-a_1)(a_n-a_2)\dots(a_n-a_{n-1})}.\end{cases}$$

Es wird nun auch einen Werth der Veränderlichen $x_1, x_2, \dots x_n$ geben, welcher der Bedingung (1.):

$$\frac{x_1^2}{a_1}+\frac{x_2^2}{a_2}+\frac{x_3^2}{a_3}\dots\frac{x_n^2}{a_n}=1,$$

und zugleich von den Bedingungen (10.), denen

$$\frac{x_1^2}{a_1^{(2)}}+\frac{x_2^2}{a_2^{(2)}}+\frac{x_3^2}{a_3^{(2)}}\dots\frac{x_n^2}{a_n^{(2)}}=1,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{x_1^2}{a_1^{(n)}}+\frac{x_2^2}{a_2^{(n)}}+\frac{x_3^2}{a_3^{(n)}}\dots\frac{x_n^2}{a_n^{(n)}}=1$$

entspricht. Sucht man aus diesen n Gleichungen wiederum die Veränderlichen, die wir durch $x_1^1, x_2^1, x_3^1, \dots x_n^1$ bezeichnen, so findet man auch hier wieder:

$$12.\quad\begin{cases}\dfrac{x_1^1 x_1^1}{a_1}=\dfrac{a_1^{(2)}a_1^{(3)}a_1^{(4)}\dots a_1^{(n)}}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\dots(a_1-a_n)},\\ \dfrac{x_2^1 x_2^1}{a_2}=\dfrac{a_2^{(2)}a_2^{(3)}a_2^{(4)}\dots a_2^{(n)}}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)\dots(a_2-a_n)},\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \dfrac{x_n^1 x_n^1}{a_n}=\dfrac{a_n^{(2)}a_n^{(3)}a_n^{(4)}\dots a_n^{(n)}}{(a_n-a_1)(a_n-a_2)\dots(a_n-a_{n-1})}.\end{cases}$$

Vergleicht man diese Gleichungen mit den Gleichungen (11.), so erhält man

$$13.\quad \frac{x_1^1}{\sqrt{a_1}}=\frac{\alpha_1}{\sqrt{a_1^1}},\quad \frac{x_2^1}{\sqrt{a_2}}=\frac{\alpha_2}{\sqrt{a_2^1}},\quad \frac{x_3^1}{\sqrt{a_3}}=\frac{\alpha_3}{\sqrt{a_3^1}},\;\ldots\ldots\; \frac{x_n^1}{\sqrt{a_n}}=\frac{\alpha_n}{\sqrt{a_n^1}};$$

auch sieht man durch Vergleichung der Gleichungen (12.) und (3.), dafs

$$-\lambda_2=y_1,\quad -\lambda_3=y_2,\quad -\lambda_4=y_3,\;\ldots\ldots\; -\lambda_n=y_{n-1}.$$

Für $n=3$ bestimmen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die Axen der durch den Punct $(\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3)$ gehenden Oberflächen zweiter Ordnung, welche dem Ellipsoïd, dessen Gleichung

$$\frac{x_1^2}{a_1}+\frac{x_2^2}{a_2}+\frac{x_3^2}{a_3}=1$$

ist, convocal sind; und x_1^1, x_2^1, x_3^1 sind die Coordinaten des Durchschnittspunctes dieses Ellipsoïds mit den convocalen Hyperboloïden, welche durch $(\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3)$ gehen. Setzt man

$$14.\quad \eta_1=\frac{\alpha_1}{a_1+\lambda_1}\Theta,\quad \eta_2=\frac{\alpha_2}{a_2+\lambda_1}\Theta,\quad \eta_3=\frac{\alpha_3}{a_3+\lambda_1}\Theta,\;\ldots\ldots\; \eta_n=\frac{\alpha_n}{a_n+\lambda_1}\Theta,$$

wo

$$\frac{1}{\Theta}=\frac{\alpha_1^2}{(a_1+\lambda_1)^2}+\frac{\alpha_2^2}{(a_2+\lambda_1)^2}\;\ldots\ldots\;\frac{\alpha_n^2}{(a_n+\lambda_1)^2}$$

ist, so wird durch diese Bezeichnung

$$\begin{aligned}\Theta &= (a_1+\lambda_1)\eta_1^2+(a_2+\lambda_1)\eta_2^2+(a_3+\lambda_1)\eta_3^2\;\ldots\ldots\;(a_n+\lambda_1)\eta_n^2\\ &= a_1\eta_1^2+a_2\eta_2^2+a_3\eta_3^2\;\ldots\ldots\;a_3\eta_n^2+\lambda_1,\end{aligned}$$

und das Integral, welches die Form

$$\int\frac{\partial\alpha_1\,\partial\alpha_2\,\partial\alpha_3\ldots\ldots\partial\alpha_{n-1}}{\alpha_n\sqrt{(a_1^1\,a_2^1\,a_3^1\ldots\ldots a_{n-1}^1)}}\sqrt{a_\eta^1}$$

hat, geht in folgendes über:

$$\sqrt{(a_1^1\,a_2^1\,a_3^1\ldots\ldots a_n^1)}\int\frac{\partial\eta_1\,\partial\eta_2\,\partial\eta_3\ldots\ldots\partial\eta_{n-1}}{(a_1\eta_1^2+a_2\eta_2^2\ldots\ldots a_n\eta_n^2+\lambda_1)^{\frac{n}{2}}}.$$

Aus der obigen Transformation erhält man

$$\int\frac{\partial\alpha_1\,\partial\alpha_2\,\partial\alpha_3\ldots\ldots\partial\alpha_{n-1}\sqrt{a_n^1}}{\alpha_n\sqrt{(a_1^1\,a_2^1\,a_3^1\ldots\ldots a_{n-1}^1)}}=\int\frac{\partial x_1^1\,\partial x_2^1\,\partial x_3^1\ldots\ldots\partial x_{n-1}^1\sqrt{a_n}}{x_n^1\sqrt{(a_1\,a_2\,a_3\ldots\ldots a_{n-1})}}=S,$$

wenn die Integration auf alle positiven Werthe der Veränderlichen, welche den Bedingungen (1.) und (10.) genügen, ausgedehnt wird. Wir haben daher

$$\frac{S}{\sqrt{[(a_1+\lambda_1)(a_2+\lambda_1)(a_3+\lambda_1)\ldots(a_n+\lambda_1)]}}=\int\frac{\partial\eta_1\,\partial\eta_2\,\partial\eta_3\ldots\ldots\partial\eta_{n-1}}{\eta_n(a_1y_1^2+a_2y_2^2\ldots\ldots a_n\eta_n^2+\lambda_1)^{\frac{n}{2}}}.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $\partial\lambda_1$ und integrirt in den Grenzen 0 und α, in welchen λ_1 liegt, so erhält man

$$\frac{n-2}{2}S\int_0^\infty \frac{\partial\lambda_1}{\sqrt{[(a_1+\lambda_1)(a_2+\lambda_1)(a_3+\lambda_1)\dots(a_n+\lambda_1)]}} = \int \frac{\partial\eta_1\,\partial\eta_2\,\partial\eta_3\dots\partial\eta_{n-1}}{\eta_n(a_1\eta_1^2+a_2\eta_2^2+\dots a_n\eta_n^2)^{\frac{n}{2}-1}};$$

welches das von *Jacobi* gefundene und im 12ten Bande dieses Journals mitgetheilte merkwürdige vielfache Integral ist.

Nennt man die Combination der Wurzeln der Gleichung (2.) zu 1, C_1, die Combination zu 2, C_2, u. s. w., so erhält man aus den Gleichungen (5.) und (6.) durch Differentiation folgende Gleichungen:

$$(y_1-y_2)(y_1-y_3)\dots(y_1-y_{n-1})$$
$$=(n-1)y_1^{n-2}-(n-2)C_1y_1^{n-3}+(n-3)C_2y_1^{n-4}\dots\pm C_{n-2},$$
$$(y_2-y_1)(y_2-y_3)\dots(y_2-y_{n-1})$$
$$=(n-1)y_2^{n-2}-(n-2)C_1y_2^{n-3}+(n-3)C_2y_2^{n-4}\dots\pm C_{n-2},$$

. . . .

$$(y_{n-1}-y_1)(y_{n-1}-y_2)\dots(y_{n-1}-y_{n-2})$$
$$=(n-1)y_{n-1}^{n-2}-(n-2)C_1y_{n-1}^{n-3}+(n-3)C_2y_{n-1}^{n-4}\dots\pm C_{n-2}.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen mit einander, so ergiebt sich, unter Hinzuziehung bekannter Sätze über symmetrische Functionen, dafs das Product rechter Hand eine rationale Function von C_1, C_2, C_3, ... C_{n-1} ist; und da jede dieser Gröfsen in Rücksicht der Veränderlichen, wie aus der Gleichung (2.) hervorgeht, eine homogene Function von der Dimension 2 ist, so wird das Product

$$[(y_1-y_2)\dots(y_1-y_{n-1})(y_2-y_1)\dots(y_{n-1}-y_{n-2})]^2$$

zu einer homogenen rationalen Function der Gröfsen

$$\frac{x_1^2}{a_1},\quad \frac{x_2^2}{a_2},\quad \dots\dots \quad \frac{x_n^2}{a_n}$$

von der Dimension $2(n-2)$, welche wir mit $\varphi\left(\frac{x_1^2}{a_1},\ \frac{x_2^2}{a_2}\ \dots\ \frac{x_n^2}{a_n}\right)$ bezeichnen. Dividirt man nun die Differentialgleichung (9.) durch diese Function, so erhält man noch folgendes bemerkenswerthe Integral, als ein Product *Abel*scher Transcendenten dargestellt:

$$\int\frac{\partial x_1\,\partial x_2\dots\partial x_{n-1}\sqrt{(a_n)}}{x_n\sqrt{\left[\varphi\left(\frac{x_1^2}{a_1}\ \frac{x_2^2}{a_2}\dots\frac{x_n^2}{a_n}\right)\right]}} = \int\frac{\partial y_1\,\partial y_2\dots\partial y_{n-1}}{\sqrt{(X_1X_2X_3\dots X_{n-1})}}\cdot\sqrt{(a_1\,a_2\dots a_{n-1})},$$

welches auch, wenn

$$\xi_1 = \frac{x_1}{\sqrt{a_1}}, \quad \xi_2 = \frac{x_2}{\sqrt{a_2}}, \; \ldots\ldots \; \xi_n = \frac{x_n}{\sqrt{a_n}}$$

gesetzt wird, wie folgt geschrieben werden kann:

$$\int \frac{\partial \xi_1 \, \partial \xi_2 \, \ldots\ldots \, \partial \xi_{n-1}}{\xi_n \sqrt{(\varphi(\xi_1^2 \; \xi_2^2 \; \ldots\ldots \; \xi_n^2))}} = \int \frac{\partial y_1 \, \partial y_2 \, \ldots\ldots \, \partial y_{n-1}}{\sqrt{(X_1 X_2 \ldots\ldots X_{n-1})}}.$$

Was die in der Function $\Phi(\xi_1^2 \; \xi_2^2 \; \ldots\ldots \; \xi_n^2)$ enthaltenen Constanten betrifft, so bemerke ich noch, wie die Gleichungen (12.) und (13.) lehren, dafs nie die Differenzen je zweier derselben darin vorkommen können. Für $n = 3$ ist

$$\begin{aligned}
\Phi(\xi_1^2, \xi_2^2, \xi_3^2) = {} & \xi_1^4(a_1-a_2)^2 + \xi_2^4(a_1-a_3)^2 + \xi_3^4(a_1-a_2)^2 \\
& + 2\xi_1^2\xi_2^2(a_1-a_3)(a_2-a_3) + 2\xi_2^2\xi_3^2(a_1-a_3)(a_1-a_2) \\
& - 2\xi_1^2\xi_3^2(a_2-a_3)(a_1-a_2) \\
= {} & \left[1-\left(\xi_1\sqrt{\left(\frac{a_2-a_3}{a_1-a_3}\right)} + \xi_3\sqrt{\left(\frac{a_1-a_2}{a_1-a_3}\right)}\right)^2\right] \\
& \times \left[1-\left(\xi_1\sqrt{\left(\frac{a_2-a_3}{a_1-a_3}\right)} - \xi_3\sqrt{\left(\frac{a_1-a_2}{a_1-a_3}\right)}\right)^2\right](a_1-a_3)^2,
\end{aligned}$$

und das Integral

$$\int \frac{\partial y_1 \, \partial y_2}{\sqrt{(X_1 X_2)}}$$

ist ein Product zweier elliptischen Integrale mit complementären Moduln.

Hamm, im März 1841.

8.

Allgemeine Auflösung der numerischen Gleichungen.

(Von Herrn Dr. *Encke*, Professor, Director der Sternwarte, Secretair der Akademie der Wissenschaften etc. zu Berlin.)

[Diese vortreffliche Abhandlung, durch welche die Auflösung der Aufgabe, die algebraischen Gleichungen numerisch aufzulösen, gleichsam practisch abgeschlossen wird, befindet sich in dem astronomischen Jahrbuche des Herrn Verfassers für 1841 gedruckt. Da sie indessen gewifs auch für diejenigen Mathematiker wichtig sein wird, welche sich nicht insbesondere mit Astronomie beschäftigen, oder welchen das genannte astronomische Jahrbuch nicht zu Gesicht kommt, so ist sie, mit Genehmigung ihres Herrn Verfassers, auch in das gegenwärtige Journal aufgenommen worden. D. H.]

Der Lösung des Problems, welches Lagrange so ausdrückt:

Etant donnée une équation numérique sans aucune notion de la grandeur ni de la nature de ses racines, en trouver les valeurs numériques, exactes s'il est possible, ou aussi approchées qu'on voudra,

ist durch Hrn. Prof. Gräffe in Zürich eine neue Seite abgewonnen worden. In seiner Schrift: Die Auflösung der höheren numerischen Gleichungen, als Beantwortung einer von der Königl. Akad. d. Wiss. zu Berlin aufgestellten Preisfrage, Zürich 1837, zeigt er, dafs, wenn man aus einer gegebenen Gleichung eine andere ableitet, deren Wurzeln sehr hohe Potenzen der Wurzeln der gegebenen Gleichung sind, aus den Coefficienten der letzten Gleichung die reellen Wurzeln und die Moduln der imaginären sich sämtlich ergeben. Er zeigt auch den einfachsten Weg zu solchen sehr hohen Potenzen der Wurzeln zu gelangen. Diese Sätze sind in den folgenden Blättern zusammengestellt, und mit dem vervollständigt, was sie noch für die gänzliche Lösung des Problems vermissen liefsen. Nämlich mit der Ermittelung der imaginären Wurzeln selbst, auf einfachem und strengem Wege; mit einer Erleichterung des Verfahrens bei Wurzeln, die nahe zusammenliegen, und auch bei sehr hohen Potenzen sich nicht entscheidend genug trennen würden, und mit den Methoden, die Werthe so weit der Wahrheit näher zu bringen, als man immer wünschen mag.

Die so auf Hrn. Prof. Gräffe's neuem Wege sich ergebende Auflösung empfiehlt sich in sehr hohem Grade durch ihre Allgemeinheit, Strenge und Kürze. Sie ist in so fern direct, als sie keine Versuche irgend welcher Art nöthig macht. Sie ist auf alle noch so hohen Grade der Gleichungen anwendbar, führt nie auf Gleichungen höheren Grades als die gegebene ist, und verlangt bei ihrem stets unverändert bleibenden Verfahren nie unausführbare Rechnungen. Die Natur der Wurzeln, die Anzahl der imaginären, legt ihr durchaus kein Hindernifs in den Weg; sie giebt immer bestimmte Resultate, über deren Richtigkeit die einfachste Substitution entscheiden läfst. Sie setzt durchaus gar keine Kenntnifs von der Natur der Wurzeln voraus, so wie sie überhaupt aus den einfachsten Eigenschaften der Gleichungen sich herleiten läfst. Für die Kürze derselben spricht endlich der Umstand, dafs die Bestimmung der sämtlichen Wurzeln einer Gleichung vom 7ten Grade bei sechs imaginären Wurzeln, so weit der Wahrheit genähert als Logarithmen von 7 Decimalen es erlauben, in etwa zwei bis drei Stunden gänzlich vollendet sein wird.

* * *

Die Auflösung der Gleichungen kommt bekanntlich darauf hinaus: die linearen Factoren zu finden, aus deren Multiplication mit einander die Function einer Variabeln entstanden ist, welche für gewisse Werthe dieser Variabeln verschwinden soll. Etwas abweichend von dem gewöhnlichen Sprachgebrauch, werde ich die bekannte Gröfse in einem solchen linearen Factor, die Wurzel der Gleichung nennen, so dafs wenn ein Factor einer Function von x durch $x+a$ bezeichnet wird, a künftig die Wurzel der Gleichung heifst, welche entsteht, wenn man die Function gleich Null setzt. Man hat bei dieser Benennung den für die numerische Rechnung angenehmen Vortheil, dafs eine einfachere Betrachtung der Zeichen eintritt. Geht man nämlich von positiven Wurzeln aus, wie es am angemessensten ist, so hat man nach dem gewöhnlichen Sprachgebrauch in einer Gleichung, die lauter positive Wurzeln hat, abwechselnde Zeichen, während nach der hier angenommenen Benennung lauter positive Zeichen in diesem Falle vorkommen. Der an sich unerhebliche Unterschied wird nur bemerkt, um Mifsverständnisse zu verhüten.

Betrachtet man zuerst den Fall, wo alle Wurzeln reell und unter sich verschieden sind, so ist die Gleichung entstanden aus einem Product

von der Form

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)\ldots. = 0.$$

Nach bekannten Lehren werden bei der wirklich ausgeführten Multiplication die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von x gebildet aus den Combinationen (ohne Wiederholung) der Wurzeln zu 1, zu 2, zu 3, so dafs jeder Coefficient die Summe aller ähnlichen Combinationen ist. Bezeichnet man also die Summen solcher Combinationen, je nach dem Grade derselben, mit $[a]$, $[ab]$, $[abc]$ etc., so wird die entwickelte Gleichung

$$x^n + [a]x^{n-1} + [ab]x^{n-2} + [abc]x^{n-3} + [abcd]x^{n-4}\ldots. = 0.$$

Aus den Coefficienten einer solchen Gleichung kann man aber nach bekannten Lehren alle symmetrischen Functionen der Wurzeln finden und numerisch berechnen, ohne die Wurzeln selbst zu kennen. Man kann folglich auch vermittelst dieser Coefficienten die Combinationen beliebig hoher Potenzen der Wurzeln zu 1, zu 2, zu 3 bestimmen, oder die Summen $[a^m]$, $[a^m b^m]$, $[a^m b^m c^m]$ etc. Folglich kann man auch die sämtlichen Coefficienten einer Gleichung angeben, deren Wurzeln die m^{ten} Potenzen der Wurzeln der ursprünglich gegebenen Gleichung sind, nämlich

$$x^n + [a^m]x^{n-1} + [a^m b^m]x^{n-2} + [a^m b^m c^m]x^{n-3} + \ldots. = 0.$$

Die Gröfse von m kann ganz beliebig, so hoch man will, angenommen werden. Man nehme nun an, um den Gang der Entwickelung leichter zu übersehen, es sei unter den Wurzeln a die gröfste, b die nächst gröfste, c die folgende etc. oder es sei

$$a > b,\quad b > c,\quad c > d,\quad d > e \ldots. \text{ etc.},$$

ferner sei m eine sehr hohe Potenz, so wird in

$$[a^m] = a^m + b^m + c^m + d^m + e^m \ldots.$$

für einen gewissen Grad der Näherung, endlich einmal der Fall stattfinden, bei stets vergröfsertem m, dafs e^m verschwindet oder vernachlässigt werden kann gegen d^m, d^m gegen c^m, c^m gegen b^m, b^m gegen a^m, und also auch die Summe aller Potenzen der kleineren Wurzeln gegen die Potenz der gröfsten. In diesem Falle wird man setzen können

$$[a^m] = a^m.$$

Das ähnliche wird in der Summe $[a^m b^m]$ stattfinden in Bezug auf das Glied $a^m b^m$, welches zuletzt nothwendig gegen die Summe aller andern $a^m c^m$, $a^m d^m$, $b^m c^m$ etc. überwiegen mufs. Es wird folglich ebenfalls dann gesetzt werden können

$$[a^m b^m] = a^m b^m$$

und ganz analog bei allen folgenden Gliedern, oder die Endgleichung wird bei stets vergröſsertem m endlich einmal die Form annehmen

$$x^n + a^m x^{n-1} + a^m b^m x^{n-2} + a^m b^m c^m x^{n-3} + a^m b^m c^m d^m x^{n-4} + \ldots = 0.$$

Hat man die Coefficienten dieser Gleichung numerisch, so hat man unmittelbar a^m; durch Division von $\frac{a^m b^m}{a^m}$ dann auch b^m; nachher aus dem Bruche $\frac{a^m b^m c^m}{a^m b^m}$ ebenfalls c^m, und überhaupt die m^{ten} Potenzen aller Wurzeln zu gleicher Zeit, aus denen sich die Wurzeln selbst durch Ausziehung der m^{ten} Wurzel ergeben. Das Kennzeichen, ob für einen bestimmten Grad der Näherung die Grenze erreicht sei, wird man darin finden, daſs wenn man von der Potenz m, zu der Potenz m' übergeht, also aus der obigen Gleichung die folgende bildet

$$x^n + [a^{m'}] x^{n-1} + [a^{m'} b^{m'}] x^{n-2} + [a^{m'} b^{m'} c^{m'}] x^{n-3} + \ldots = 0,$$

die Coefficienten der gleichen Potenzen von x in beiden Gleichungen sich verhalten wie die m^e Potenz einer Gröſse zu der m'^{ten} derselben, oder wenn man die Logarithmen eines Coefficienten von x^{n-r} in beiden Gleichungen hat, die etwa durch $\lg \alpha_m$ in der ersten, $\lg \alpha_{m'}$ in der zweiten bezeichnet werden mögen, so muſs für den angenommenen Grad der Näherung

$$\frac{1}{m} \lg \alpha_m = \frac{1}{m'} \lg \alpha_{m'} \quad \text{oder} \quad \lg \alpha_{m'} = \frac{m'}{m} \lg \alpha_m$$

sein, und zwar bleibend, da in speciellen Fällen es wohl sein kann, daſs die Summe sämtlicher kleinerer Wurzeln und ihrer Combinationen doch noch erheblich genug ist, um ein ähnliches Verhältniſs hervorzurufen. Indessen wird die Möglichkeit dieser Ausnahme immer verringert werden, je mehr m wächst, und wird zuletzt ganz aufhören.

Wollte man die Erhebung zu solchen sehr hohen Potenzen auf die gewöhnliche Art durch Bildung der symmetrischen Functionen bewirken, so würde die Rechnung nicht ausführbar sein. Man erreicht aber dasselbe, wenn man stufenweise erst die Wurzeln zur Potenz p erhebt, und die Gleichung bildet, welche den a^p, b^p etc. entspricht. Leitet man aus den numerisch berechneten Coefficienten dieser Gleichung die andere ab, welche die p^{te} Potenz der Wurzeln derselben enthält, so hat man die Gleichung, deren Wurzeln die pp^{te} Potenz der Wurzeln der ursprünglich gegebenen Gleichung sind, und fährt man so fort, so erhält man nach und nach Gleichungen, deren Wurzeln

$$a^p \quad a^{p^2} \quad a^{p^3} \text{ etc.}$$

sind, wo folglich m gleich einer Potenz von p sehr schnell wächst. Schon die kleinsten Zahlen für p werden hier alle Bequemlichkeit gewähren.

Wäre zuerst $p = 2$ und die vorgegebene Gleichung:

$$x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \alpha_2 x^{n-2} + \alpha_3 x^{n-3} \ldots\ldots + \alpha_n = 0,$$

so schreibe man für $x \ldots\ldots x^{\frac{1}{2}}$. Die linearen Factoren dieser Gleichungen werden dann sein

$$(x^{\frac{1}{2}} + a)(x^{\frac{1}{2}} + b)(x^{\frac{1}{2}} + c) \ldots\ldots = 0.$$

Schafft man aus ihr alle Wurzelgröfsen weg, so werden die Factoren der neuen Gleichung

$$(x - a^2)(x - b^2)(x - c^2) \ldots\ldots = 0,$$

und um positive Wurzeln zu erhalten (in dem obigen Sinne), ändere man das Zeichen aller Glieder, die einer ungeraden Potenz angehören, oder überhaupt, der zweiten, vierten etc., d. h. einer geraden Ordnungszahl angehörigen, wenn man von der höchsten Potenz von x anfängt und keine übergeht.

Zur Wegschaffung der Wurzelgröfsen kann man davon ausgehen, dafs für $p + q = 0$ auch $p^2 - q^2 = 0$. Wenn man die Gleichung also in zwei solche Theile abtheilt, dafs jeder für sich, wenn man ihn in das Quadrat erhebt, von aller Irrationalität frei ist, so ist das Verlangte erreicht. Diese Theile können in jedem Falle sein

$$x^{\frac{n}{2}} + \alpha_2 x^{\frac{n-2}{2}} + \alpha_4 x^{\frac{n-4}{2}} + \alpha_6 x^{\frac{n-6}{2}}$$

und

$$\alpha_1 x^{\frac{n-1}{2}} + \alpha_3 x^{\frac{n-3}{2}} + \alpha_5 x^{\frac{n-5}{2}} + \alpha_7 x^{\frac{n-7}{2}}$$

Ihre Quadrate sind

$$x^n + 2\alpha_2 x^{n-1} + \left.\begin{matrix}\alpha_2^2\\ +2\alpha_4\end{matrix}\right\} x^{n-2} + \left.\begin{matrix}2\alpha_2\alpha_4\\ +2\alpha_6\end{matrix}\right\} x^{n-3} + \left.\begin{matrix}\alpha_4^2\\ +2\alpha_2\alpha_6\\ +2\alpha_8\end{matrix}\right\} x^{n-4} \ldots\ldots$$

und

$$\alpha_1^2 x^{n-1} + 2\alpha_1\alpha_3 x^{n-2} + \left.\begin{matrix}\alpha_3^2\\ +2\alpha_1\alpha_5\end{matrix}\right\} x^{n-3} + \left.\begin{matrix}2\alpha_3\alpha_5\\ +2\alpha_1\alpha_7\end{matrix}\right\} x^{n-4} + \left.\begin{matrix}\alpha_5^2\\ +2\alpha_3\alpha_7\\ +2\alpha_1\alpha_9\end{matrix}\right\} x^{n-5} \ldots\ldots$$

Nimmt man die Differenz dieser Quadrate und ändert die Zeichen wie eben bemerkt, so wird

$$x^n + \left.\begin{matrix}\alpha_1^2\\ -2\alpha_2\end{matrix}\right\} x^{n-1} + \left.\begin{matrix}\alpha_2^2\\ -2\alpha_1\alpha_3\\ +2\alpha_4\end{matrix}\right\} x^{n-2} + \left.\begin{matrix}\alpha_3^2\\ -2\alpha_2\alpha_4\\ +2\alpha_1\alpha_5\\ -2\alpha_6\end{matrix}\right\} x^{n-3} + \left.\begin{matrix}\alpha_4^2\\ -2\alpha_3\alpha_5\\ +2\alpha_2\alpha_6\\ -2\alpha_1\alpha_7\\ +2\alpha_8\end{matrix}\right\} x^{n-4} + \ldots\ldots = 0$$

die Gleichung sein, deren Wurzeln a^2, b^2, c^2 etc. sind. Diese Form giebt eine höchst einfache und übersichtliche Rechnung. Der Coefficient einer Potenz von x in der neuen Gleichung, wird gebildet durch die Verbindung des Quadrats des Coefficienten derselben Potenz in der schon berechneten Gleichung, mit den doppelten Producten je zweier gleich weit zu beiden Seiten von ihm abstehender Coefficienten, die letzteren regelmäfsig mit abwechselnden Zeichen genommen.

Eine ähnliche Ableitung kann man auch für $p = 3$ machen. Da jedesmal, was auch p, q und r sein mögen,

$$(p+q+r)^3 = p^3+q^3+r^3+3(p+q+r)(pq+qr+pr)-3pqr$$

ist, so wird auch immer, wenn $p+q+r=0$,

$$p^3+q^3+r^3-3pqr = 0.$$

Wenn man also in der gegebenen Gleichung statt $x \ldots . x^{\frac{1}{3}}$ schreibt, wodurch die linearen Factoren werden $x^{\frac{1}{3}}+a$, $x^{\frac{1}{3}}+b$ und hier die Wurzelgröfsen wegschafft, so erhält man die Factoren $x+a^3$, $x+b^3$, $x+c^3$, ohne dafs es nöthig wäre, die Zeichen nachher noch zu ändern. Zu dieser Wegschaffung ist es nach der eben angeführten Gleichung nur erforderlich, die Gleichung in drei solche Theile zu theilen, dafs der Cubus jedes einzelnen und das Product aller drei frei von einer Irrationalität ist. Solche Theile können immer sein:

$$x^{\frac{n}{3}} + \alpha_3 x^{\frac{n-3}{3}} + \alpha_6 x^{\frac{n-6}{3}} + \ldots . = A$$

$$\alpha_1 x^{\frac{n-1}{3}} + \alpha_4 x^{\frac{n-4}{3}} + \alpha_7 x^{\frac{n-7}{3}} \ldots\ldots = B$$

$$\alpha_2 x^{\frac{n-2}{3}} + \alpha_5 x^{\frac{n-5}{3}} + \alpha_8 x^{\frac{n-8}{3}} \ldots\ldots = C.$$

Denn sie werden

$$x^{\frac{n}{3}} \{1+\alpha_3 x^{-1}+\alpha_6 x^{-2} \ldots .\} = A$$

$$x^{\frac{n-1}{3}} \{\alpha_1+\alpha_4 x^{-1}+\alpha_7 x^{-2} \ldots .\} = B$$

$$x^{\frac{n-2}{3}} \{\alpha_2+\alpha_5 x^{-1}+\alpha_8 x^{-2} \ldots .\} = C,$$

die offenbar, jeder für sich zum Cubus erhoben, und mit einander multiplicirt, frei von einer Irrationalität sind. Bildet man also

$$A^3+B^3+C^3-3ABC,$$

so werden die ersten Glieder

$$x^n + (\alpha_1^3 - 3\alpha_1\alpha_2 + 3\alpha_3)x^{n-1}$$
$$+ (\alpha_2^3 + 3\alpha_1^2\alpha_4 - 3\alpha_1\alpha_5 - 3\alpha_1\alpha_2\alpha_3 - 3\alpha_2\alpha_4 + 3\alpha_3^2 + 3\alpha_6)x^{n-2}$$
$$+ \left\{\begin{matrix}\alpha_3^3 - 3\alpha_1\alpha_8 + 3\alpha_1^2\alpha_7 - 3\alpha_1\alpha_2\alpha_6 - 3\alpha_1\alpha_3\alpha_5 + 3\alpha_1\alpha_4^2 + 3\alpha_2^2\alpha_5 \\ - 3\alpha_2\alpha_3\alpha_4 - 3\alpha_2\alpha_7 - 3\alpha_4\alpha_5 + 6\alpha_3\alpha_6 + 3\alpha_9\end{matrix}\right\} x^{n-3}.$$

Der Vortheil der Kürze und Einfachheit ist so entschieden bei dem Falle $p = 2$, dafs weder das bedeutend langsamere Fortschreiten der Potenzen 2, 4, 8, 16 etc., verglichen mit 3, 9, 27 etc., ihm Eintrag thut, noch selbst der Umstand, dafs für p gleich einer geraden Zahl, der Unterschied zwischen einer positiven und einer negativen Wurzel gleich anfangs verschwindet, während eine ungerade Potenz ihn bestehen läfst. Wenn man die Wurzel ihrer absoluten Gröfse nach kennt, und nur das Zeichen ungewifs ist, so reicht eine einfache Substitution, wobei man die geraden und ungeraden Potenzen von x von einander trennt, sogleich hin, um darüber zu entscheiden. Sonst könnte man auch durch Substitution der nächsten positiven und negativen Grenzen in runden Zahlen um so unbedenklicher darüber sich versichern, als man alle andern Wurzeln gleichzeitig kennen lernt, und folglich die Grenzen stets so nehmen kann, dafs nur die eine Wurzel innerhalb derselben vorhanden ist.

Eine solche Substitution des zuerst gefundenen Werthes wird man doch nicht vermeiden können, abgesehen von der Prüfung der Richtigkeit, die sie gewährt, da es niemals rathsam sein wird, gleich anfangs die Grenze der Genauigkeit, bis zu welcher man gehen will, mit einemmale zu umfassen. Die Rechnung mufs mit Logarithmen ausgeführt werden. Aus einem später zu erwähnenden Grunde sind Logarithmen von fünf Decimalen, in jedem Falle, wo man eine grofse Genauigkeit haben will, vorzuziehen. Angenommen daher, was später immer vorausgesetzt werden soll, es werde die erste Rechnung mit Logarithmen von fünf Decimalen und so ausgeführt, dafs man nach Potenzen von 2 fortschreitet, so kann man sowohl im Voraus übersehen, wie weit man gehen, wie viele solcher Rechnungen man machen mufs, als auch das Verfahren, wie der gefundene Werth am bequemsten verbessert wird, angeben.

Die Grenze für alle Wurzeln wird erreicht sein, wenn das Quadrat jedes Coefficienten, so gegen das doppelte Product der ihm zur Seite stehenden überwiegt, dafs das letztere auf die fünfte Decimale keinen Einflufs mehr hat, oder bei Logarithmen von fünf Decimalen kleiner als der 100,000[te] Theil des ersteren ist. Das gröfste Product, wenn man sich der

Grenze einmal schon genähert hat, werden immer die beiden nächsten Coefficienten geben. Denn wenn die Reihefolge der Coefficienten

$$a^m b^m,\quad a^m b^m c^m,\quad a^m b^m c^m d^m,\quad a^m b^m c^m d^m e^m,\quad a^m b^m c^m d^m e^m f^m,$$

ist, so wird für den mittelsten der Werth in der neuen Gleichung werden:

$$a^{2m} b^{2m} c^{2m} d^{2m} - 2 a^{2m} b^{2m} c^{2m} d^m e^m + 2 a^{2m} b^{2m} c^m d^m e^m f^m,$$

wo das zweite Glied zum dritten sich verhält wie $c^m : f^m$, dagegen das erste zum zweiten wie $d^m : 2e^m$. Ueberhaupt kommt man sehr bald dahin, dafs die folgenden Glieder nach dem zweiten unbeträchtlich werden. Soll aber das zweite gegen das erste verschwinden, so dafs es nicht mehr in Rechnung gebracht werden kann, so mufs

$$100{,}000 . e^m < \tfrac{1}{2} d^m \quad \text{oder} \quad \left(\frac{d}{e}\right)^m > 200{,}000$$

d. h.

$$m > \frac{5{,}30103}{\lg \frac{d}{e}}.$$

Hieraus ergiebt sich für die Werthe

$$\frac{d}{e} = 1{,}1 \qquad m = \quad 128 = 2^7$$

$$\frac{d}{e} = 1{,}01 \qquad m = \; 1227 < 2^{11}$$

$$\frac{d}{e} = 1{,}001 \qquad m = 12215 < 2^{14}$$

und bei einem gröfseren $\frac{d}{e}$ natürlich eine um so viel geringere Anzahl von Operationen. Es folgt hieraus, dafs man in der Regel mit sieben Umformungen völlig ausreicht. In dem ungewöhnlichen Falle von so äufserst nahe liegenden Wurzeln, wie für $\frac{d}{c} = 1{,}01$ oder $1{,}001$, würde man doch nur elf und vierzehn Operationen gebrauchen. Allein es wird später gezeigt werden, dafs Fälle solcher sehr nahe liegenden Wurzeln, nach der Art der gleichen Wurzeln behandelt werden können, so dafs man die Operationen gar nicht nöthig hat so weit fortzusetzen, bis die Wurzeln selbst von einander getrennt sind, sondern nur so weit, bis ihr Product sich von den Producten der übrigen Wurzeln mit einander unterscheidet. Bei häufigen Anwendungen ist mir kein Beispiel vorgekommen, wo, auch im ungünstigsten Falle von sieben Wurzeln, die sämtlich zwischen 1,1 und 1,6 lagen, mehr als acht Operationen nöthig gewesen wären.

In der Regel wird man bei einer Rechnung mit fünf Decimalen, nach Ausziehung der m^{ten} Wurzel, den Werth der Wurzel sehr genau erhalten, so dafs die fünfte Decimale immer sicher, und meistentheils selbst die sechste es ist. Dieses scheint daher zu kommen, dafs im Anfange, bei den ersten Operationen, die Coefficienten sich aus mehreren Theilen zusammensetzen, so dafs die Ungewifsheit der letzten Stelle verringert wird, weil selten alle Fehler der letzten Decimale auf eine Seite fallen. Bei der Ausziehung der m^{ten} Wurzel dividirt man aber auf einmal mit einer grofsen Zahl, und vermindert so die Ungewifsheit der letzten Decimale.

Bei dieser sehr grofsen Annäherung an die Wahrheit, bis auf den 100,000^{sten} Theil des Ganzen, kann man unbedenklich den Taylorschen Lehrsatz oder die Newtonsche Approximationsmethode anwenden; denn die Unsicherheit derselben findet nur dann statt, wenn der Werth, von dem man ausgeht, nicht blofs einer, sondern mehreren Wurzeln sehr nahe ist. Nach dem Taylorschen Satze wird für

$$x = x_0 + \Delta x_0$$
$$fx = fx_0 + \frac{dfx_0}{dx_0}\Delta x_0 + \dots\dots$$

Hat fx die Form, in der die Gleichungen immer als gegeben angesehen werden

$$x_0^n + a_1 x_0^{n-1} + a_2 x_0^{n-2},$$

so wird $\frac{dfx_0}{dx_0} = nx_0^{n-1} + (n-1)a_1 x_0^{n-2} + (n-2)a_2 x_0^{n-3} + \dots\dots$

oder $x_0 \frac{dfx_0}{dx_0} = nx_0^n + (n-1)a_1 x_0^{n-1} + (n-2)a_2 x_0^{n-2} + \dots\dots$

Hat man also die Substitution von x_0, dem gefundenen genäherten Werthe, in die Gleichung gemacht, wovon das Resultat mit $[x_0^n]$ bezeichnet werden möge, so multiplicirt man jedes Glied mit den Exponenten der Potenz von x, die darin vorkommt; das Resultat dieser Operation möge mit $[nx_0^n]$ bezeichnet werden; dann wird

$$\frac{\Delta x_0}{x_0} = \Delta \lg x_0 = -\frac{[x_0^n]}{[nx_0^n]} M,$$

wo M der Modulus des briggischen Systems ist, dessen logar. $= 9.$

Auf diese Weise wird man ohne eine gröfsere Mühe, als die Substitution des Werthes von x_0 in die Gleichung, den Werth von $\lg x$ so genau erhalten, als Logarithmen von 7 Decimalen ihn zu geben vermögen, da die Multiplication mit den Exponenten kaum in Betracht kommt. Eine gröfsere

Genauigkeit wird kaum je verlangt werden, und kann, wenn sie gewünscht wird, auf dieselbe Weise erhalten werden.

Betrachtet man zweitens den Fall, in welchem alle Wurzeln imaginär sind, und unter diesen wiederum keine mit der andern zusammenfallend, so wird es, um mit imaginären Gröfsen nicht in der Rechnung zu thun zu haben, am gerathensten sein, von den trinomischen Factoren auszugehen, in welche sich jede solche Gleichung zerlegen lassen mufs. Sei die allgemeine Form eines solchen Factors

$$x^2+fx+g^2,$$

wo g bei imaginären Wurzeln stets reell ist, so sind die beiden linearen Factoren dieser Gröfse bekanntlich von der Form

$$x+\alpha+\beta\sqrt{-1} \quad \text{und} \quad x+\alpha-\beta\sqrt{-1}$$

oder auch, wenn

$$\frac{\alpha}{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}} = \cos\varphi, \qquad \frac{\beta}{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}} = \sin\varphi,$$

$$x+g(\cos\varphi+\sin\varphi\sqrt{-1}) \quad \text{und} \quad x+g(\cos\varphi-\sin\varphi\sqrt{-1})$$

so dafs $g = \sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}$ und $f = 2g\cos\varphi$, folglich für imaginäre Wurzeln oder bei reellem φ stets

$$f<2g.$$

Werden aus solchen Factoren die Factoren hergeleitet, welche die m^{ten} Potenzen der Wurzeln enthalten, so werden diese letzteren, wegen

$$(\cos\varphi\pm\sin\varphi\sqrt{-1})^m = \cos m\varphi\pm\sin m\varphi\sqrt{-1},$$

vollständig werden:

$$x+g^m(\cos m\varphi+\sin m\varphi\sqrt{-1}), \qquad x+g^m(\cos m\varphi-\sin m\varphi\sqrt{-1}),$$

woraus der trinomische Factor entsteht

$$x^2+2g^m\cos m\varphi\, x+g^{2m},$$

oder wenn man ihn bezeichnet durch

$$x^2+f_m x+g^{2m},$$

so wird wiederum bei imaginären Wurzeln

$$f_m = 2g^m\cos m\varphi \leqq 2g^m,$$

d. h. f_m kann nie gröfser als $2g^m$ werden, abgesehen vom Zeichen. Es kann nämlich $f_m = 2g^m$ werden, wenn $m\varphi$ ein Vielfaches von π ist, und wenn es dieses einmal geworden ist, so wird es bei der Erhebung in das Quadrat oder die höheren Potenzen stets diesen Werth behalten. Imaginäre Wurzeln geben in diesem speciellen Falle dasselbe Resultat, wie gleiche reelle. In allen andern Fällen aber wird f_m, je nach dem ver-

schiedenen Werthe von $\cos m\varphi$, bald ab-, bald zunehmen, im Zeichen wechseln, stets aber der absoluten Gröfse nach kleiner als $2g^m$ bleiben.

Hat nun eine Gleichung lauter imaginäre Wurzeln, so wird sie das Product lauter solcher trinomischer Factoren sein, in welchen $f < 2g$ ist. Die Form dieses Productes wird, wenn die einzelnen Factoren sind,

$$x^2 + fx + g^2, \quad x^2 + f'x + g'^2, \quad x^2 + f''x + g''^2 \quad \ldots\ldots \text{ etc.},$$

und, wenn die obige Summen-Bezeichnung beibehalten wird,

$$\begin{aligned} x^{2n} + [f]\,x^{2n-1} &+ ([g^2] + [ff'])\,x^{2n-2} \\ &+ ([g^2 f'] + [ff'f''])\,x^{2n-3} \\ &+ ([g^2 g'^2] + [g^2 f' f''] + [ff'f''f'''])\,x^{2n-4} \\ &\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ &+ ([g^2 g'^2 \ldots\ldots g^{(n-2)^2}] + [g^2 g'^2 \ldots\ldots g^{(n-3)^2} f^{(n-2)} f^{(n-1)}])\,x^2 \\ &+ \;[g^2 g'^2 \ldots\ldots g^{(n-2)^2} f^{(n-1)}]\,x \\ &+ \;\; g^2 g'^2 \ldots\ldots g^{(n-1)^2} \qquad\qquad = 0. \end{aligned}$$

Dafs diese Form die richtige ist, wird man aus den einfachen Gesetzen der Multiplication ableiten können, und dafs namentlich in den letzten Gliedern die f einzeln, oder zu zweien, oder zu dreien mit dem g combinirt vorkommen müssen, eben so wie in den ersten Gliedern, so dafs das zweite und vorletzte, das dritte und drittletzte etc. einander in Bezug auf den Grad der f, die mit einander und den g multiplicirt sind, entsprechen, wird man sogleich übersehen, wenn man die trinomischen Factoren so schreibt

$$g^2\left\{1 + \frac{f}{g^2}\,x + \frac{1}{g^2}\,x^2\right\}, \quad g'^2\left\{1 + \frac{f'}{g'^2}\,x + \frac{1}{g'^2}\,x^2\right\} \quad \text{etc.}$$

und sie dann mit einander multiplicirt.

Werden nun aus einer solchen Gleichung die Gleichungen hergeleitet, deren Wurzeln die m^{ten} Potenzen der ursprünglichen Wurzeln sind, so geht f über in f_m, f' in f'_m etc., g^2 in g^{2m}, g'^2 in g'^{2m} und die neue Gleichung wird folglich die Form haben:

$$\begin{aligned} x^{2n} + [f_m]\,x^{2n-1} &+ ([g^{2m}] + [f_m f'_m])\,x^{2n-2} \\ &+ ([g^{2m} f'_m] + [f_m f'_m f''_m])\,x^{2n-3} \\ &+ ([g^{2m} g'^{2m}] + [g^{2m} f'_m f''_m] + [f_m f'_r f''_m f'''_m])\,x^{2n-4} \\ &\quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ &+ ([g^{2m} g'^{2m} \ldots\ldots g^{(n-2)^{2m}}] + [g^{2m} g'^{2m} \ldots\ldots g^{(n-3)^{2m}} f_m^{n-2} f_m^{n-1}])\,x^2 \\ &+ \;[g^{2m} g'^{2m} \ldots\ldots g^{(n-2)^{2m}} f_m^{n-1}]\,x \\ &+ \;\; g^{2m} g'^{2m} \ldots\ldots g^{(n-1)^{2m}} \qquad\qquad = 0. \end{aligned}$$

Nimmt man hier wiederum zur leichtern Uebersicht des Ganges an, dafs g der gröfste Modul (nach der gewöhnlichen Benennung), g' der nächstgröfste, g'' der folgende u. s. w., oder dafs

$$g > g', \quad g' > g'', \quad g'' > g''' \; \ldots$$

und kein Modul dem andern gleich ist, und betrachtet man zuerst die Glieder, in welchen die Potenz eine gerade Zahl ist, so wird bei ihren Coefficienten das jedesmal vorkommende, von allen f_m ganz freie Glied .... $[g^{2m} g'^{2m} g''^{2m} \ldots]$, ganz ähnlich wie bei den reellen Wurzeln, bei vergröfsertem m zuletzt übergehen in

$$g^{2m} g'^{2m} g''^{2m} \ldots$$

so dafs für $[g^{2m}]$ geschrieben werden kann g^{2m}, für $[g^{2m} g'^{2m}] \ldots g^{2m} g'^{2m}$ u. s. w. Neben diesen Summen kommen aber noch theils solche Summen vor, in denen mehrere g mit mehreren f verbunden sind, oder auch solche, wo nur f darin enthalten sind. In allen diesen Summen müssen die f immer in gerader Zahl vorhanden sein. Substituirt man hier für jedes f_m seine äufserste Grenze $2g^m$, so wird das Resultat zuverlässig immer gröfser oder gleich grofs mit dem eigentlichen Werthe, und die Grenze, der sich mit vergröfsertem m diese Summen nähern, wenn man in ihnen jedes f_m mit $2g^m$ vertauscht hat, kann nie überschritten werden. Hiernach wird bei dem Coefficienten von x^{2n-2} die Summe $[f_m f'_m]$ niemals die Summe von $4[g_m g'^m]$ überschreiten können, folglich wird auch die Grenze dieser letzten Summe bei vergröfsertem m, nämlich die Gröfse $4g^m g'^m$ selbst der äufserste Grenzwerth für $[f_m f'_m]$ sein. Von den beiden Theilen aber, aus denen der Coefficient zuletzt allein besteht,

$$g^{2m} + 4g^m g'^m,$$

wird auch der zweite zuletzt verschwinden müssen gegen den ersten, sobald

$$g^m > 4g'^m,$$

d. h. sobald

$$g > g' \sqrt[m]{4},$$

denn in einem solchen Falle wird irgend einmal, wenn m erhöht worden ist zu m^p, g^{m^p} ganz und gar überwiegen. Die Zahl 4 unter dem Wurzelzeichen ist unabhängig von der Potenz m, und bleibt für alle Werthe derselben constant, folglich wird sich $\sqrt[m]{4}$ der Einheit immer mehr und mehr

nähern, und zuletzt so ganz damit zusammenfallen, dafs die Bedingung $g > g' \sqrt[m]{4}$ übergeht in $g > g'$. So z. B. ist für $m = 128$

$$\sqrt[m]{4} = 1{,}011.$$

Es geht demnach, sobald $g > g'$ der Coefficient von x^{2n-2},

$$[g^{2m}] + [f_m f'_m] \text{ über in } g^{2m}.$$

Ganz dieselben Schlüsse lassen sich bei allen Coefficienten machen, welche mit geraden Potenzen verbunden sind, und man braucht bei ihnen immer nur die Summen, welche lauter g enthalten, zu vergleichen mit den Summen, in welchen zwei f mit den g verbunden sind. Kommen nämlich mehr f als zwei in der Summe vor, so gehören sie nothwendig zu kleineren g als die sind, welche in den Summen vorkommen die nur g enthalten. Im Allgemeinen werden mit vergröfsertem m die Coefficienten der geraden Potenzen von x, ganz wie bei den reellen Wurzeln, übergehen in

$$g^{2m},\quad g^{2m}g'^{2m},\quad g^{2m}g'^{2m}g''^{2m},\quad \text{etc.}$$

Die Coefficienten der ungeraden Potenzen von x enthalten kein Glied, in welchem nicht wenigstens ein f_m vorkäme, und da jedes solche f_m schwankende Werthe hat, selbst Null werden kann, oder doch einen sehr kleinen Werth erhalten, so können diese Coefficienten auch bei noch so grofsem m nie einer bestimmten Grenze sich nähern, den Ausnahmefall ausgenommen, wenn $m\varphi$ ein Vielfaches von π ist, welcher, da er mit den gleichen reellen Wurzeln zusammenfällt, später betrachtet werden soll. Bei lauter imaginären Wurzeln und ungleichen Moduln wechselt ein unbestimmtes Glied stets ab mit einem solchen, welches den Werth eines neuen g^{2m} zu den vorigen hinzufügt. Wenn folglich die Grenze, in welcher die Endform stattfindet, erreicht ist, worüber man eben so wie bei den reellen Wurzeln durch den Gang der Rechnung unterrichtet wird, so hat die Gleichung die Form

$$x^{2n} + f_0 x^{2n-1} + g^{2m} x^{2n-2} + f'_0 x^{2n-3} + g^{2m} g'^{2m} x^{2n-4} + f''_0 x^{2n-5}$$
$$+ g^{2m} g'^{2m} g''^{2m} x^{2n-6} \ldots\ldots = 0,$$

wo durch f_0, f'_0, f''_0 der schwankende Werth der Coefficienten bezeichnet wird.

Man findet also ganz auf dieselbe Weise, wie bei den reellen Wurzeln, durch successive Divisionen erst g^{2m}, dann $\frac{g^{2m}g'^{2m}}{g^{2m}} = g'^{2m}$ u. s. w. So

dafs jetzt bei bekannten g die zu jedem Modul gehörigen f noch zu bestimmen sind.

Hiezu bietet die gegebene Gleichung selbst weit mehr Bedingungsgleichungen dar, als nöthig sind, so dafs sich a priori übersehen läfst, dafs die verschiedenen f jedesmal linear und ohne Zweideutigkeit sich bestimmen lassen müssen. Eine Gleichung vom $2n^{\text{ten}}$ Grade, in der alle g bekannt sind, enthält in ihren $2n+1$ Gliedern $2n$ Coefficienten, in denen die unbekannten Gröfsen f an der Zahl n enthalten sind, und aus welchen sie bestimmt werden können. Von diesen Coefficienten ist einer, der letzte, frei von allen f; von den noch übrigen $2n-1$ sind zwei, der zweite und vorletzte, vom ersten Grade in Bezug auf die f; zwei, der dritte und drittletzte, vom zweiten Grade und überhaupt sind immer zwei gleich weit vom Anfange und Ende abstehende Coefficienten von gleichem Grade in Bezug auf die f, durch alle Grade hindurch, bis zum $(n-1)^{\text{ten}}$ inclusive; der mittelste alleinstehende aber ist vom n^{ten} Grade. Man kann deswegen zur Bestimmung der f so verfahren, dafs man aus

$$\alpha_1 = [f] \quad \text{und} \quad \alpha_{2n-1} = [g^2 g'^2 \dots g^{(n-2)^2} f^{(n-1)}]$$

zwei f linear als Function der übrigen und bekannter Gröfsen bestimmt. Es mögen dieses etwa f und f' sein. Substituirt man diese Werthe in

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= [g^2] + [ff'], \\ \alpha_{2n-2} &= [g^2 g'^2 \dots g^{(n2)-^2}] + [g^2 g'^2 \dots g^{(n-3)^2} f^{(n-2)} f^{(n-1)}], \end{aligned}$$

so hat man zwei Gleichungen vom zweiten Grade, aus deren Verbindung sich ein drittes f, etwa f'', linear als Function der übrigen finden läfst. Dieses geschieht unmittelbar durch die Division beider Gleichungen in einander, bis ein Ausdruck übrig bleibt, der nur noch die erste Potenz von f'' enthält. Die Substitution dieses Werthes in eine der Gleichungen, aus der er hervorging, wird eine Gleichung vom 4ten Grade geben, aus welcher die drei $ff'f''$ verschwunden sind, und wenn man die Werthe dieser drei Gröfsen in die Coefficienten von x^{2n-3} und x^3 substituirt, so hat man zwei neue Gleichungen vom 6ten Grade, die in Verbindung mit der vom 4ten Grade wieder linear zwei neue f als Functionen der übrigen bestimmen lassen müssen. Allein auf diesem Wege wird man doch höchstens noch ein viertes f, etwa f''', bestimmen können, oder also nur in dem Falle von 8 imaginären Wurzeln Gebrauch davon machen können. Denn die Elimination von f''' aus einer Gleichung vom 4ten und vom 6ten

Grade wird mindestens zu einer Gleichung vom 24sten Grade führen, die sich nicht mehr behandeln läfst. In der Praxis wird der Grad noch höher steigen. Denn wenn man sich nicht die Mühe geben will, die symmetrischen Functionen der Wurzeln zu bilden, sondern den Weg der Division, der auch der einzige wirklich anwendbare sein möchte, wählt, so wird man bei der Verbindung einer Gleichung vom m^{ten} Grade mit einer vom n^{ten} in der Regel so viele überflüssige Factoren einführen müssen, dafs die Endgleichung, in welcher die zu eliminirende Gröfse nur noch auf der ersten Potenz sich befindet, in Bezug auf die übrigen darin enthaltenen Unbekannten, vom $(m+n-2)^{ten}$ Grade ist, also durch die Substitution des aus ihr erhaltenen Werthes nothwendig einen höhern Grad als den mn^{ten} erreichen läfst, wenn m und n die Potenz 2 übersteigen. Man wird deshalb höchstens bis zur Bestimmung von vier f diesen Weg einschlagen können.

In der That scheint es aber auch in der Natur der Aufgabe zu liegen, dafs eine gewisse Weitläufigkeit nicht zu vermeiden ist. Denn wenn auch nur n Gröfsen f gesucht werden, so würde doch eine Gleichung vom n^{ten} Grade allein nicht dem Probleme genügen, wenn man sie auch aufstellen könnte. Man verlangt nämlich nicht blofs die Werthe der verschiedenen f selbst, sondern man verlangt den Werth eines jeden bestimmten f, was einem bestimmten g angehört. Sonach möchte es wohl die einfachste Auflösung sein, die sich erwarten läfst, wenn man eine Gleichung angiebt, die, je nachdem man den Werth eines bestimmten g in sie hinein substituirt, auch jedesmal das zugehörige f giebt. Diese Gleichung mufs vom n^{ten} Grade sein, da in dem Falle, dafs sämtliche Modulu g einander gleich wären, während die Winkel φ und folglich die f verschieden sind, die n Werthe von f aus den Wurzeln der Gleichung sich ergeben müfsten. Kann man damit eine ähnliche Gleichung niederen Grades verbinden, die bei gleicher Substitution des bestimmten g jedesmal als gemeinschaftliche Wurzel mit der ersten Gleichung den verlangten Werth von f hat, so dafs man durch einfache Division den Werth von f linear findet, und läfst sich diese Division mit der gröfsten Bequemlichkeit in jedem Falle ausführen, so scheint die Aufgabe so einfach gelöst zu sein, als die Natur des Gegenstandes es erlaubt.

Solche zwei Gleichungen erlangt man auf die einfachste Weise, wenn man die allgemeine Form der imaginären Wurzeln in die gegebene

Gleichung hinein substituirt. Ein Werth

$$x = r(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1})$$

giebt, wenn man ihn in die Gleichung

$$x^{2n} + \alpha_1 x^{2n-1} + \alpha_2 x^{2n-2} \ldots + \alpha_{2n} = 0$$

setzt, durch Trennung des Imaginären vom Reellen, oder, indem man den zweiten Werth $x = r(\cos\varphi - \sin\varphi\sqrt{-1})$ ebenfalls einführt, und die Resultate beider Substitutionen verbindet, zwei Gleichungen:

$$0 = r^{2n}\cos 2n\varphi + \alpha_1 r^{2n-1}\cos(2n-1)\varphi + \alpha_2 r^{2n-2}\cos(2n-2)\varphi \ldots + \alpha_{2n-1} r\cos\varphi + \alpha_{2n}$$

$$0 = r^{2n}\sin 2n\varphi + \alpha_1 r^{2n-1}\sin(2n-1)\varphi + \alpha_2 r^{2n-2}\sin(2n-2)\varphi \ldots + \alpha_{2n-1} r\sin\varphi.$$

Multiplicirt man die erste mit $\cos n\varphi$ und die zweite mit $\sin n\varphi$ und addirt beide Producte, und multiplicirt man nachher auch die erste mit $\sin n\varphi$ und die zweite mit $\cos n\varphi$ und subtrahirt das erste Product vom zweiten, so erhält man die zwei Gleichungen:

$$0 = r^{2n}\cos n\varphi + \alpha_1 r^{2n-1}\cos(n-1)\varphi + \alpha_2 r^{2n-2}\cos(n-2)\varphi \ldots + \alpha_{2n-2} r^2\cos(n-2)\varphi + \alpha_{2n-1} r\cos(n-1)\varphi + \alpha_{2n}\cos n\varphi$$

$$0 = r^{2n}\sin n\varphi + \alpha_1 r^{2n-1}\sin(n-1)\varphi + \alpha_2 r_{2n-2}\sin(n-2)\varphi \ldots - \alpha_{2n-2} r^2\sin(n-2)\varphi - \alpha_{2n-1} r\sin(n-1)\varphi - \alpha_{2n}\sin n\varphi.$$

In diesen enthalten immer die gleich weit vom Ende und vom Anfange abstehenden Glieder einerlei Sinus und Cosinus. Vereinigt man diese und setzt man also

$$\begin{array}{llll}
1 + \alpha_{2n} r^{-2n} & = \beta & 1 - \alpha_{2n} r^{-2n} & = \gamma \\
\alpha_2 + \alpha_{2n-1} r^{-(2n-2)} & = \beta_1 & \alpha_1 - \alpha_{2n-1} r^{-(2n-2)} & = \gamma_1 \\
\alpha_2 + \alpha_{2n-2} r^{-(2n-4)} & = \beta_2 & \alpha_2 - \alpha_{2n-2} r^{-(2n-4)} & = \gamma_2 \\
\vdots & & \vdots & \\
\alpha_{n-1} + \alpha_{n+1} r^{-2} & = \beta_{n-1} & \alpha_{n-1} - \alpha_{n+1} r^{-2} & = \gamma_{n-1} \\
\alpha_n + \alpha_n & = \beta_n, & &
\end{array}$$

so werden die beiden Gleichungen, wenn man sie mit r^{2n} dividirt,

$$0 = \beta\cos \quad + \frac{\beta_1}{r}\cos(n-1)\varphi + \frac{\beta_2}{r^2}\cos(n-2)\varphi \ldots + \frac{\beta_{n-1}}{r^{n-1}}\cos\varphi + \frac{\beta_n}{2r^n}$$

$$0 = \gamma\sin n\varphi + \frac{\gamma_1}{r}\sin(n-1)\varphi + \frac{\gamma_2}{r^2}\sin(n-2)\varphi \ldots + \frac{\gamma_{n-1}}{r^{n-1}}\sin\varphi.$$

Es lassen sich aber durch die bekannten Reihen die Cosinus und Sinus des vielfachen Winkels als Functionen der Cosinus und Sinus des einfachen ausdrücken, und für n gleich einer ganzen positiven Zahl ist

allgemein, wenn man alle negativen Potenzen der Cosinus und Sinus des einfachen Winkels wegläfst:

$$\cos n\varphi = 2^{n-1}\cos\varphi^{n} - \frac{n}{1}2^{n-3}\cos\varphi^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1.2}2^{n-5}\cos\varphi^{n-4}$$

$$-\frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3}2^{n-7}\cos\varphi^{n-6} + \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{1.2.3.4}2^{n-9}\cos\varphi^{n-8} - \text{etc.}$$

$$\frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi} = 2^{n-1}\cos\varphi^{n-1} - \frac{n-2}{1}2^{n-3}\cos\varphi^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{1.2}2^{n-5}\cos\varphi^{n-5}$$

$$-\frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1.2.3}2^{n-7}\cos\varphi^{n-7} + \frac{(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{1.2.3.4}2^{n-9}\cos\varphi^{n-9} - \text{etc.}$$

Substituirt man diese Reihen in den beiden letzten Gleichungen, so erhält man:

$$0 = 2^{n-1}\beta\cos\varphi^{n} + \frac{\beta_1}{r}2^{n-2}\cos\varphi^{n-1} + \frac{\beta_2}{r^2}2^{n-3}\cos\varphi^{n-2}$$

$$-\frac{n}{1}2^{n-3}\beta\cos\varphi^{n-2}$$

$$+\frac{\beta_3}{r^3}2^{n-4}\cos\varphi^{n-3} + \frac{\beta_4}{r^4}2^{n-5}\cos\varphi^{n-4}$$

$$-\frac{n-1}{1}\,\frac{\beta_1}{r}2^{n-4}\cos\varphi^{n-3} - \frac{n-2}{1}\,\frac{\beta_2}{r^2}2^{n-5}\cos\varphi^{n-4}$$

$$+\frac{n.n-3}{1.2}\beta 2^{n-5}\cos\varphi^{n-4} + \dots \text{etc.}$$

$$0 = 2^{n-1}\gamma\cos\varphi^{n-1} + \frac{\gamma_1}{r}2^{n-2}\cos\varphi^{n-2} + \frac{\gamma_2}{r^2}2^{n-3}\cos\varphi^{n-3}$$

$$-\frac{n-2}{1}\gamma 2^{n-3}\cos\varphi^{n-3}$$

$$+\frac{\gamma_3}{r^3}2^{n-4}\cos\varphi^{n-4} + \frac{\gamma_4}{r^4}2^{n-5}\cos\varphi^{n-5}$$

$$-\frac{n-3}{1}\,\frac{\gamma_1}{r}2^{n-4}\cos\varphi^{n-4} - \frac{(n-4)}{1}\,\frac{\gamma_2}{r^2}2^{n-5}\cos\varphi^{n-5}$$

$$-\frac{(n-3)(n-4)}{1.2}\gamma 2^{n-5}\cos\varphi^{n-5} + \dots \text{etc.}$$

Man wünscht aber eigentlich nicht $\cos\varphi$ zu erhalten, sondern die Gröfse t des trinomischen Factors der beiden imaginären Wurzeln, also nach der angenommenen Form $x = r(\cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1})$ die Gröfse

$$-2r\cos\varphi = t.$$

Multiplicirt man deshalb, um t als Wurzel zu bekommen, die Glieder beider Gleichungen nacheinander mit

$$(-2r)^0,\quad (-2r)^1,\quad (-2r)^2,\quad (-2r)^3\quad \dots .$$

so werden sich beide Gleichungen durch 2^{n-1} dividiren lassen, und die

Endform wird mit Weglassung aller negativen Potenzen von t sein:

$$0 = \beta t^n - \beta_1 t^{n-1} + \beta_2 t^{n-2} - \beta_3 t^{n-3} \ldots \pm \beta_n$$
$$- r^2 \{n\beta t^{n-2} - (n-1)\beta_1 t^{n-3} + (n-2)\beta_2 t^{n-4} - \ldots\}$$
$$+ r^4 \left\{\frac{n(n-3)}{1.2}\beta t^{n-4} - \frac{(n-1)(n-4)}{1.2}\beta_1 t^{n-5} + \frac{(n-2)(n-5)}{1.2}\beta_2 t^{n-6} - \ldots\right\}$$
$$- r^6 \left\{\frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3}\beta t^{n-6} - \frac{(n-1)(n-5)(n-6)}{1.2.3}\beta_1 t^{n-7} \ldots\right\}$$
$$+ r^8 \left\{\frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{1.2.3.4}\beta t^{n-8} \ldots\right\} - \text{etc.}$$

$$0 = \gamma t^{n-1} - \gamma_1 t^{n-2} + \gamma_2 t^{n-3} - \gamma_3 t^{n-4} \ldots \pm \gamma_{n-1}$$
$$- r^2 \{(n-2)\gamma t^{n-3} - (n-3)\gamma_1 t^{n-4} + (n-4)\gamma_2 t^{n-5} \ldots\}$$
$$+ r^4 \left\{\frac{(n-3)(n-4)}{1.2}\gamma t^{n-5} - \frac{(n-4)(n-5)}{1.2}\gamma_1 t^{n-6} \ldots\right\}$$
$$- r^6 \left\{\frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1.2.3}\gamma t^{n-7} - \frac{(n-5)(n-6)(n-7)}{1.2.3}\gamma_1 t^{n-8} \ldots\right\}$$
$$+ r^8 \left\{\frac{(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{1.2.3.4}\gamma t^{n-9} \ldots\right\} - \text{etc.}$$

Wenn in die Werthe der β und γ, und in diese beiden Gleichungen für r ein bestimmtes g substituirt ist, so werden beide Gleichungen eine gemeinschaftliche Wurzel für t geben müssen, welche nichts anders als der Werth des f ist, was zu dem substituirten g gehört. Die sämtlichen Ausdrücke sind höchst einfach. Der Grad der Gleichungen ist nicht höher als unumgänglich nöthig, und die Division läfst sich, wie sogleich gezeigt werden wird, mit der gröfsten Leichtigkeit vermittelst der Logarithmen ausführen, so dafs man ohne Mühe aus dem gemeinschaftlichen linearen Divisor beider Gleichungen den Werth von f ohne Zweideutigkeit erhält. Gehören mehrere f zu demselben Werthe von g, wenn nämlich mehrere Paare imaginärer Wurzeln gleiche Moduln haben, so wird der gemeinschaftliche Divisor ein quadratischer, oder cubischer. Die Wurzeln müssen in diesem Falle stets reell sein und die verschiedenen Werthe für die einzelnen f geben.

Für die einfacheren gewöhnlichen Fälle sind die Formeln folgende:

Vier imaginäre Wurzeln.

$$1 + \alpha_4 r^{-4} = \beta \qquad 1 - \alpha_4 r^{-4} = \gamma$$
$$\alpha_1 + \alpha_3 r^{-2} = \beta_1 \qquad \alpha_1 - \alpha_3 r^{-2} = \gamma_1$$
$$2\alpha_2 = \beta_2$$
$$0 = \beta t^2 - \beta_1 t + \beta_2 - 2\beta r^2$$
$$0 = \gamma t - \gamma_1.$$

Hier reicht die letzte Gleichung schon allein aus. Die erste kann als Prüfung der Rechnung gebraucht werden.

Sechs imaginäre Wurzeln.

$$1 + \alpha_6 r^{-6} = \beta \qquad 1 - \alpha_6 r^{-6} = \gamma$$
$$\alpha_1 + \alpha_5 r^{-4} = \beta_1 \qquad \alpha_1 - \alpha_5 r^{-4} = \gamma_1$$
$$\alpha_2 + \alpha_4 r^{-2} = \beta_2 \qquad \alpha_2 - \alpha_4 r^{-2} = \gamma_2$$
$$2\alpha_3 = \beta_3$$
$$0 = \beta t^3 - \beta_1 t^2 + (\beta_2 - 3\beta r^2)t - (\beta_3 - 2\beta_1 r^2)$$
$$0 = \gamma t^2 - \gamma_1 t + \gamma_2 - \gamma r^2.$$

Acht imaginäre Wurzeln.

$$1 + \alpha_8 r^{-8} = \beta \qquad 1 - \alpha_8 r^{-8} = \gamma$$
$$\alpha_1 + \alpha_7 r^{-6} = \beta_1 \qquad \alpha_1 - \alpha_7 r^{-6} = \gamma_1$$
$$\alpha_2 + \alpha_6 r^{-4} = \beta_2 \qquad \alpha_2 - \alpha_6 r^{-4} = \gamma_2$$
$$\alpha_3 + \alpha_5 r^{-2} = \beta_3 \qquad \alpha_3 - \alpha_5 r^{-2} = \gamma_3$$
$$2\alpha_4 = \beta_4$$
$$0 = \beta t^4 - \beta_1 t^3 + (\beta_2 - 4\beta r^2)t^2 - (\beta_3 - 3\beta_1 r^2)t + \beta_4 - 2\beta_2 r^2 + 2\beta r^4$$
$$0 = \gamma t^3 - \gamma_1 t^2 - (\gamma_2 - 2\gamma r^2)t - (\gamma_3 - \gamma_1 r^2).$$

Es würde keine Mühe machen, die Division in Zeichen wirklich auszuführen und den Ausdruck von t als Function von r^2 und den β und γ hinzusetzen. Allein es ist weit bequemer, die Division numerisch zu machen. Denn vermittelst der Gaufsischen Tafeln, welche aus den Logarithmen zweier Zahlen sogleich durch einmaliges Eingehen den Logarithmen der Summe und Differenz ganz strenge finden lassen, und die besonders für Logarithmen von 5 Decimalen höchst bequem sind (für 7 Decimalen ist mir der Gebrauch dieser Tafeln nicht so bequem vorgekommen, doch kann es Mangel an Uebung sein), dividirt man solche Gleichungen mit einer Leichtigkeit in einander, die nichts zu wünschen übrig läfst.

Bei den Gaufsischen Tafeln wird der Logarithme von $a \pm b$ gefunden dadurch, dafs man zu dem Logarithmen der gröfsten Zahl eine aus den Tafeln genommene hinzulegt oder abzieht. Die Form ist also allgemein

$$\lg(a \pm b) = \lg a \pm B,$$

wo B mit $\lg a - \lg b$ gefunden wird. Man bestimme nun die Logarithmen sämtlicher Coefficienten beider Gleichungen, und bringe sie durch Abziehen von $\lg\beta$ in der ersten, und $\lg\gamma$ in der zweiten Gleichung auf

die Form

$$0 = t^n \quad - \delta t^{n-1} + \delta' t^{n-2} - \delta'' t^{n-3} \ldots.$$
$$0 = t^{n-1} - \varepsilon t^{n-2} + \varepsilon' t^{n-3} - \varepsilon'' t^{n-4} \ldots.$$

Hier bedeuten die δ und ε die Logarithmen der Coefficienten, denen die Zeichen ebenso wie den Zahlen vorgesetzt werden. Geht man nun mit $\delta - \varepsilon$ oder $\varepsilon - \delta$ in die Gaufsischen Tafeln ein, und ebenso mit $\delta' - \varepsilon'$ oder $\varepsilon' - \delta'$ etc., so erhält man die verschiedenen B, die gehörig unter $\varepsilon\ \varepsilon'\ \varepsilon''$ gesetzt werden, und nach den Zeichen mit dem gröfseren Logarithmen verbunden geben

$$0 = \zeta t^{n-1} + \zeta' t^{n-2} + \zeta'' t^{n-3} \ldots.$$

Diese Gleichung bringt man wieder durch Abziehen von ζ auf die Form

$$0 = t^{n-1} + \theta t^{n-2} + \theta' t^{n-3} \ldots. \text{ etc.}$$

und verbindet sie auf dieselbe Weise mit der Gleichung vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade. Auf dieselbe Weise fährt man fort, bis man zu dem linearen gemeinschaftlichen Factor kommt, der gleich Null gesetzt, den Werth von f giebt. Das Schema ist also folgendes:

$$0 = \beta t^n \quad - \beta_1 t^{n-1} + (\beta_2 - n\beta r^2) t^{n-2} \ldots\ldots\ldots. \text{ etc.}$$
$$0 = \gamma t^{n-1} - \gamma_1 t^{n-2} + (\gamma_2 - (n-2)\gamma r^2) t^{n-3} \ldots. \text{ etc.}$$

Hieraus werden zuerst die Logarithmen statt der Zahlen gesetzt, die Zeichen der Zahlen aber beibehalten, und dann wird nach und nach gebildet

$$\begin{array}{rl}
0 = & t^n \quad + \delta t^{n-1} + \delta' t^{n-2} + \delta'' t^{n-3} \ldots. \\
0 = & t^{n-1} + \varepsilon t^{n-2} + \varepsilon' t^{n-3} + \varepsilon'' t^{n-4} \ldots. \\
 & \qquad B \qquad B' \qquad B'' \ldots. \\
\hline
 & \qquad \theta t^{n-1} + \theta' t^{n-2} + \theta'' t^{n-3} \ldots. \\
0 = & t^{n-1} + \zeta t^{n-2} + \zeta' t^{n-3} + \zeta'' t^{n-4} \ldots. \\
 & \qquad B_1 \qquad B_1' \qquad B_1'' \ldots. \\
\hline
 & \qquad \eta t^{n-2} + \eta' t^{n-3} + \eta'' t^{n-4} \ldots. \\
0 = & t^{n-2} + \iota t^{n-3} + \iota' t^{n-4} + \iota'' t^{n-5} \ldots. \\
 & \qquad B_2 \qquad B_2' \qquad B_2'' ,\ldots \\
\hline
 & \qquad \varkappa t^{n-2} + \varkappa' t^{n-3} + \varkappa'' t^{n-4} \ldots. \\
0 = & t^{n-2} + \lambda t^{n-3} + \lambda' t^{n-4} + \lambda'' t^{n-5} \ldots.
\end{array}$$

Die einzige Tafel, die man gebraucht bei dieser Division, ist die Gaufsische für Differenz und Summe der Logarithmen, und die Haupt-Aufmerksamkeit wird auf die Zeichen gerichtet werden müssen, um gehörig

zu addiren oder zu subtrahiren, und dem Resultate sein ihm zukommendes Zeichen zu geben.

Die beiden Gleichungen zwischen t und r haben aber noch eine weitere Bedeutung, die für die Auflösung der Gleichungen im allgemeinen von Wichtigkeit ist. Denn wenn gleich sie aus der Form der imaginären Wurzeln abgeleitet sind, so gelten sie doch für alle trinomische Factoren, auch für die, deren Wurzeln reell sind. Wenn für irgend welchen trinomischen Factor

$$x^2 + tx + v$$

der Werth von v bekannt geworden ist, und man substituirt ihn an die Stelle der r^2 in β, γ und in die beiden Gleichungen, so giebt die Division beider in einander den Werth von t, der zu v gehört. Man kann nämlich die beiden linearen Factoren von $x^2 + tx + v$ jedesmal darstellen unter der Form

$$(x + y\sqrt{v})\left(x + \frac{1}{y}\sqrt{v}\right).$$

Denn für ein positives v, oder $\sqrt{v}$ = einer reellen Gröfse g, wird

$$t = g\left(y + \frac{1}{y}\right)$$

und da t in diesem Falle die Summe beider Wurzeln ist, so werden die Wurzeln selbst gy und $g\frac{1}{y}$, oder wenn man sie mit a und b bezeichnet, so wird $$y = \sqrt{\frac{a}{b}}, \quad \frac{1}{y} = \sqrt{\frac{b}{a}}, \quad g = \sqrt{ab}.$$

Diese Form gilt für reelle Wurzeln, welche, wegen v positiv, gleiches Zeichen haben müssen, so wie für imaginäre, bei welchen let .en:

$$y = \sqrt{\frac{\alpha+\beta\sqrt{-1}}{\alpha-\beta\sqrt{-1}}} = \frac{\alpha+\beta\sqrt{-1}}{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}}, \quad \frac{1}{y} = \frac{\alpha-\beta\sqrt{-1}}{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}}, \quad g = \sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}.$$

Wenn aber v negativ, der Fall, wo die Wurzeln stets reell sein müssen, aber verschiedenes Zeichen haben, so wird

$$y = -\sqrt{-1}\sqrt{\frac{a}{b}}, \quad \frac{1}{y} = \sqrt{-1}\sqrt{\frac{b}{a}}, \quad g = \sqrt{-1}\sqrt{ab},$$

und folglich

$$t = a - b,$$

wie es hier sein mufs. Substituirt man nun in die Gleichung

$$x^{2n} + \alpha_1 x^{2n-1} + \alpha_2 x^{2n-2} \ldots\ldots + \alpha^{2n} = 0$$

die beiden Werthe von x

$$x = -gy \quad \text{und} \quad x = -\frac{g}{y},$$

so erhält man zwei Gleichungen

$$g^{2n}y^{2n} - \alpha_1 g^{2n-1}y^{2n-1} + \alpha_2 g^{2n-2}y^{2n-2} - \ldots$$
$$+ \alpha_{2n-2} g^2 y^2 - \alpha_{2n-1} g y + \alpha_{2n} = 0$$
$$g^{2n}y^{-2n} - \alpha_1 g^{2n-1}y^{-(2n-1)} + \alpha_2 g^{2n-2}y^{-(2n-2)} - \ldots$$
$$+ \alpha_{2n-2} g^2 y^{-2} - \alpha_{2n-1} g y^{-1} + \alpha_{2n} = 0.$$

Man multiplicire die erste mit $g^{-2n}y^{-n}$, die zweite mit $g^{-2n}y^{n}$, so werden sie

$$y^n - \alpha_1 g^{-1}y^{n-1} + \alpha_2 g^{-2}y^{n-2} - \ldots$$
$$- \alpha_{2n-2} g^{-(2n-2)}y^{-(n-2)} - \alpha_{2n-1} g^{-(2n-1)}y^{-(n-1)} + \alpha_{2n} g^{-2n}y^{-n} = 0$$
$$y^{-n} - \alpha_1 g^{-1}y^{-(n-1)} + \alpha_2 g^{-2}y^{-(n-2)} - \ldots$$
$$+ \alpha_{2n-2} g^{-(2n-2)}y^{n-2} - \alpha_{2n-1} g^{-(2n-1)}y^{n-1} + \alpha_{2n} g^{-2n}y^{n} = 0.$$

Legt man diese beiden letzten zusammen, und subtrahirt sie von einander, so erhält man die zwei folgenden Gleichungen:

$$(y^n + y^{-n}) - \alpha_1 g^{-1}(y^{n-1} + y^{-(n-1)}) + \alpha_2 g^{-2}(y^{n-2} + y^{-(n-2)}) - \ldots$$
$$+ \alpha_{2n-2} g^{-(2n-2)}(y^{n-2} + y^{-(n-2)}) - \alpha_{2n-1} g^{-(2n-1)}(y^{n-1} + y^{-(n-1)})$$
$$+ \alpha_{2n} g^{-2n}(y^n + y^{-n}) = 0$$

und

$$(y^n - y^{-n}) - \alpha_1 g^{-1}(y^{n-1} - y^{-(n-1)}) + \alpha_2 g^{-2}(y^{n-2} - y^{-(n-2)}) - \ldots$$
$$- \alpha_{2n-2} g^{-(2n-2)}(y^{n-2} - y^{-(n-2)}) + \alpha_{2n-1} g^{-(2n-1)}(y^{n-1} - y^{-(n-1)})$$
$$- \alpha_{2n} g^{-2n}(y^n - y^{-n}) = 0.$$

Um hier die Glieder, welche gleich weit ab vom Anfang und Ende stehen, und die einerlei Potenz von y angehören, zu vereinigen, setze man wie oben:

$$\begin{array}{lll} 1 + \alpha_{2n}\, g^{-2n} = \beta & \qquad & 1 - \alpha_{2n}\, g^{-2n} = \gamma \\ \alpha_1 + \alpha_{2n-1}\, g^{-(2n-2)} = \beta_1 & & \alpha_1 - \alpha_{2n-1}\, g^{-(2n-2)} = \gamma_1 \\ \alpha_2 + \alpha_{2n-2}\, g^{-(2n-4)} = \beta_2 & & \alpha_2 - \alpha_{2n-2}\, g^{-(2n-4)} = \gamma_2 \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n-1} + \alpha_{n+1}\, g^{-2} = \beta_{n-1} & & \alpha_{n-1} - \alpha_{n+1}\, g^{-2} = \gamma_{n-1} \\ 2\alpha_n = \beta_n, & & \end{array}$$

so erhält man die Form

$$\beta(y^n + y^{-n}) - \frac{\beta_1}{g}(y^{n-1} + y^{-(n-1)}) + \frac{\beta_2}{g^2}(y^{n-2} + y^{-(n-2)}) - \ldots$$
$$\pm \frac{\beta_{n-1}}{g^{n-1}}(y + y^{-1}) \mp \beta_n = 0$$

$$\gamma(y^n - y^{-n}) - \frac{\gamma_1}{g}(y^{n-1} - y^{-(n-1)}) + \frac{\gamma_2}{g^2}(y^{n-2} - y^{-(n-2)}) - \ldots$$
$$\pm \frac{\gamma_{n-1}}{g^{n-1}}(y - y^{-1}) = 0.$$

Es haben nun aber die hier vorkommenden Functionen die Eigenschaft, wovon man sich durch unmittelbare Rechnung überzeugen kann, dafs:

$$y^n+y^{-n} = (y+y^{-1})(y^{n-1}+y^{-(n-1)})-(y^{n-2}+y^{-(n-2)})$$
$$y^n-y^{-n} = (y+y^{-1})(y^{n-1}-y^{-(n-1)})-(y^{n-2}-y^{-(n-2)}),$$

für welche letztere Gleichung man auch schreiben kann

$$\frac{y^n-y^{-n}}{y-y^{-1}} = (y+y^{-1})\left(\frac{y^{n-1}-y^{-(n-1)}}{y-y^{-1}}\right)-\left(\frac{y^{n-2}-y^{-(n-2)}}{y-y^{-1}}\right);$$

fängt man also von den einfachsten Functionen dieser Art an, so ist

$$y^0+y^{-0} = 2$$
$$y+y^{-1} = \frac{t}{g} \text{ nach dem Obigen}$$
$$y^2+y^{-2} = \frac{t^2}{g^2}-2$$
$$y^3+y^{-3} = \frac{t^3}{g^3}-3\frac{t}{g}$$
$$y^4+y^{-4} = \frac{t^4}{g^4}-4\frac{t^2}{g^2}+2$$

und allgemein, was sich ebenfalls durch Prüfung bei dem Uebergange von n auf $n+1$ zeigen läfst, mit Weglassung aller negativen Potenzen von t:

$$y^n+y^{-n} = \frac{t^n}{g^n}-n\frac{t^{n-2}}{g^{n-2}}+\frac{n(n-3)}{1.2}\frac{t^{n-4}}{g^{n-4}}-\frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3}\frac{t^{n-6}}{g^{n-6}}\dots$$

eine Reihe, die ganz der obigen Cosinus-Reihe entspricht, da ihre Ableitung auch völlig identisch mit der von der Reihe für $\cos n\varphi$ ist.

Eben so ist

$$\frac{y^0-y^{-0}}{y-y^{-1}} = 0$$
$$\frac{y-y^{-1}}{y-y^{-1}} = 1$$
$$\frac{y^2-y^{-2}}{y-y^{-1}} = \frac{t}{g}$$
$$\frac{y^3-y^{-3}}{y-y^{-1}} = \frac{t^2}{g^2}-1$$
$$\frac{y^4-y^{-4}}{y-y^{-1}} = \frac{t^3}{g^3}-2\frac{t}{g}$$
$$\frac{y^5-y^{-5}}{y-y^{-1}} = \frac{t^4}{g^4}-3\frac{t^2}{g^2}+1$$

und allgemein mit Weglassung aller negativen Potenzen von t:

$$\frac{\gamma^n-\gamma^{-n}}{\gamma-\gamma^{-1}} = \frac{t^{n-1}}{g^{n-1}} - (n-2)\frac{t^{n-3}}{g^{n-3}} + \frac{(n-3)(n-4)}{1.2}\frac{t^{n-5}}{g^{n-5}} - \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1.2.3}\frac{t^{n-7}}{g^{n-7}}.$$

Eine Reihe, die wiederum mit der obigen Reihe für $\frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi}$ der Form und Ableitung nach identisch ist.

Substituirt man nun diese Werthe in die obigen Gleichungen, und multiplicirt sie nachher mit g^n, so erhält man

$$\begin{aligned} &\beta t^n - \beta_1 t^{n-1} + \beta_2 t^{n-2} - \beta_3 t^{n-3} \ldots\ldots \pm \beta_n \\ &\quad - g^2\{\beta n t^{n-2} - \beta_1(n-1)t^{n-3} + \beta_2(n-2)t^{n-4} \ldots\ldots\} \\ &\quad + g^4\left\{\beta\frac{n.(n-3)}{1.2}t^{n-4} - \beta_1\frac{(n-1)(n-4)}{1.2}t^{n-5} + \ldots\ldots\right\} \text{ etc.} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\gamma t^{n-1} - \gamma_1 t^{n-2} + \gamma_2 t^{n-3} - \gamma_3 t^{n-4} \ldots\ldots \pm \gamma_{n-1} \\ &\quad - g^2\{\gamma(n-2)t^{n-3} - \gamma_1(n-3)t^{n-4} + \gamma_2(n-4)t^{n-5} \ldots\ldots\} \\ &\quad + g^4\left\{\gamma\frac{(n-3)(n-4)}{1.2}t^{n-5} - \gamma_1\frac{(n-4)(n-5)}{1.2}t^{n-6} \ldots\ldots\right\} \text{ etc.} = 0, \end{aligned}$$

das heifst ganz die obigen Gleichungen. Es ist klar, dafs hier g^2 nur statt v eingeführt ist, um $\sqrt{v} = g$ bequemer zu schreiben. Auch kommen in den sämtlichen Formeln nur Potenzen von g^2 vor. Hiernach läfst sich ganz allgemein folgender Satz aussprechen:

Wenn in einem trinomischen Factor einer Gleichung

$$x^{2n} + \alpha_1 x^{2n-1} + \alpha_2 x^{2n-2} \ldots\ldots + \alpha_{2n} = 0,$$

der von der Form ist $x^2 + tx + v$, die Gröfse v auf irgend welche Art bekannt geworden ist, so findet man das zugehörige t, wenn man setzt:

$$\begin{array}{llll} 1 + \frac{\alpha_{2n}}{v^n} = \beta & & 1 - \frac{\alpha_{2n}}{v^n} = \gamma \\ \alpha_1 + \frac{\alpha_{2n-1}}{v^{n-1}} = \beta_1 & & \alpha_1 - \frac{\alpha_{2n-1}}{v^{n-1}} = \gamma_1 \\ \alpha_2 + \frac{\alpha_{2n-2}}{v^{n-2}} = \beta_2 & & \alpha_2 - \frac{\alpha_{2n-2}}{v^{n-2}} = \gamma_2 \\ \quad\vdots & & \quad\vdots \\ \alpha_{n-1} + \frac{\alpha_{n+1}}{v} = \beta_{n-1} & & \alpha_{n-1} - \frac{\alpha_{n+1}}{v} = \gamma_{n-1} \\ 2\alpha_n = \beta_n & & \end{array}$$

und dann die gemeinschaftliche Wurzel der folgenden beiden Gleichungen, in welchen alle negativen Potenzen von t weggelassen werden müssen, auf bekannte Weise bestimmt:

$$\begin{aligned}
\beta t^n & -\beta_1 t^{n-1}+\beta_2 t^{n-2}-\beta_3 t^{n-3}\ldots\pm\beta_n \\
& -v\,\{\beta n t^{n-2}-\beta_1(n-1)t^{n-3}+\beta_2(n-2)t^{n-4}-\ldots\} \\
& +v^2\left\{\beta\,\frac{n(n-3)}{1.2}\,t^{n-4}-\beta_1\,\frac{(n-1)(n-4)}{1.2}\,t^{n-5}-\ldots\right\} \\
& -v^3\left\{\beta\,\frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3}\,t^{n-6}-\ldots\right\}\ \text{etc.}\ =0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma t^{n-1} & -\gamma_1 t^{n-2}+\gamma_2 t^{n-3}-\gamma_3 t^{n-4}\ldots\pm\gamma_n \\
& -v\,\{\gamma(n-2)t^{n-3}-\gamma_1(n-3)t^{n-4}+\gamma_2(n-4)t^{n-5}\ldots\} \\
& +v^2\left\{\gamma\,\frac{(n-3)(n-4)}{1.2}\,t^{n-5}-\gamma_1\,\frac{(n-4)(n-5)}{1.2}\,t^{n-6}+\ldots\right\} \\
& -v^3\left\{\gamma\,\frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1.2.3}\,t^{n-7}-\ldots\right\}\ \text{etc.}\ =0.
\end{aligned}$$

Aus diesem Satze folgt, um solches beiläufig zu erwähnen, eine Auflösung der Gleichungen des vierten Grades, deren Ableitung von den andern Auflösungen etwas verschieden ist. Wenn die Gleichung des vierten Grades heifst:

$$x^4+\alpha_1 x^3+\alpha_2 x^2+\alpha_3 x+\alpha_4=0,$$

so werden die Hülfsgröfsen β und γ gefunden durch:

$$1+\frac{\alpha_4}{v^2}=\beta \qquad 1-\frac{\alpha_4}{v^2}=\gamma$$

$$\alpha_1+\frac{\alpha_3}{v}=\beta_1 \qquad \alpha_1-\frac{\alpha_3}{v}=\gamma_1$$

$$2\alpha_4=\beta_2$$

und die Bedingungsgleichungen zwischen jedem v und dem zugehörigen t sind:

$$\beta t^2-\beta_1 t+\beta_2-2\beta v=0$$

$$\gamma t-\gamma_1=0.$$

Die letztere lineare Gleichung giebt, wenn man die Werthe von γ und γ_1 substituirt,

$$t=\frac{\gamma_1}{\gamma}=\frac{\alpha_1 v^2-\alpha_3 v}{v^2-\alpha_4}.$$

Es ist folglich die Gleichung entstanden aus dem Producte der beiden Factoren:

$$\left(x^2+\frac{\alpha_1 v^2-\alpha_3 v}{v^2-\alpha_4}\,x+v\right)\left(x^2+\frac{\alpha_1 v'^2-\alpha_3 v'}{v'^2-\alpha_4}\,x+v'\right)=0.$$

Da hieraus folgt $vv'=\alpha_4$, so lassen sich, wenn man diesen Werth substituirt, die Factoren auch schreiben:

$$\left(x^2+\frac{\alpha_1 v-\alpha_3}{v-v'}\,x+v\right)\left(x^2+\frac{\alpha_1 v'-\alpha_3}{v'-v}\,x+v'\right)=0,$$

deren wirkliche Multiplication giebt:

$$x^4+\alpha_1 x^3+\left\{v+v'+\left(\frac{\alpha_1 v-\alpha_3}{v-v'}\right)\left(\frac{\alpha_1 v'-\alpha_3}{v'-v}\right)\right\}x^2+\alpha_3 x+vv' = 0.$$

Man hat also zur Bestimmung von v und v' die beiden Gleichungen:

$$vv' = \alpha_4$$

$$v+v'+\left(\frac{\alpha_1 v-\alpha_3}{v-v'}\right)\left(\frac{\alpha_1 v'-\alpha_3}{v'-v}\right) = \alpha_2.$$

Führt man die Multiplication wirklich aus in der letzten Gleichung, so läfst sich Alles durch $v+v'$ und vv' ausdrücken, denn es wird

$$v+v'+\frac{\alpha_1^2 vv'-\alpha_1\alpha_3(v+v')+\alpha_3^2}{4vv'-(v+v')^2} = \alpha_2.$$

Setzt man also für vv' seinen Werth α_4 und bezeichnet

$$v+v' = y,$$

so hat man die cubische Gleichung

$$y^3-\alpha_2 y^2+(\alpha_1\alpha_3-4\alpha_4)y-(\alpha_3^2-4\alpha_2\alpha_4+\alpha_1^2\alpha_4) = 0,$$

aus deren Auflösung man y findet. Ist dieses gefunden, so wird:

$$v = \tfrac{1}{2}\{y+\sqrt{(y^2-4\alpha_4)}$$
$$v' = \tfrac{1}{2}\{y-\sqrt{(y^2-4\alpha_4)}$$

und dann t und t':

$$t = \tfrac{1}{2}\left\{\alpha_1+\frac{\alpha_1 y-2\alpha_3}{\sqrt{(y^2-4\alpha_4)}}\right\}$$

$$t' = \tfrac{1}{2}\left\{\alpha_1-\frac{\alpha_1 y-2\alpha_3}{\sqrt{(y^2-4\alpha_4)}}\right\}.$$

Die cubische Gleichung giebt für y mindestens einen reellen Werth. Hat sie nur eine reelle Wurzel, so wird für diese jedesmal $y^2-4\alpha_4$ eine positive Gröfse sein müssen, weil v und v' jedesmal reell gewählt werden können. Dieses wird der Fall sein, wenn die ursprüngliche Gleichung 2 reelle und 2 imaginäre Wurzeln hat. Man nimmt den reellen Werth von y und hat alles übrige ohne imaginäre Gröfsen bestimmt. Hat die cubische Gleichung drei reelle Wurzeln, so ist entweder für alle drei $y^2-4\alpha_4$ eine positive Gröfse, der Fall, wenn alle Wurzeln der ursprünglichen Gleichung reell sind, wo es Sache der freien Wahl bleibt, welche Wurzel man nehmen will. Oder es ist nur eine der drei reellen Wurzeln, so grofs, dafs $y^2-4\alpha_4$ positiv wird, der Fall, wo alle Wurzeln der ursprünglichen Gleichungen imaginär sind. *Eine* solche mufs es jedesmal geben, weil v und v' immer auf eine Weise reell gemacht werden können, und wenn man sie wählt, so ist die Rechnung wieder frei von imaginären Gröfsen.

Sobald v und t gefunden sind, so werden die einfachen Factoren des trinomischen Factors am leichtesten auf folgende Art bestimmt, wobei drei Fälle zu unterscheiden sind:

1) v positiv $t < 2\sqrt{v}$

$$\frac{t}{2\sqrt{v}} = \cos\varphi; \quad x^2 + tx + v = (x + \{\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1}\}\sqrt{v})$$
$$(x + \{\cos\varphi - \sin\varphi\sqrt{-1}\}\sqrt{v}),$$

2) v positiv $t > 2\sqrt{v}$

$$\frac{2\sqrt{v}}{t} = \sin\varphi; \quad x^2 + tx + v = (x + \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\varphi\sqrt{v})(x + \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi\sqrt{v}),$$

3) v negativ

$$\frac{2\sqrt{v}}{t} = \operatorname{tg}\varphi; \quad x^2 + tx - v = (x + \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\varphi\sqrt{v})(x - \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi\sqrt{v}).$$

Es wird hier bei $\sqrt{v}$ überall abgesehen von dem Zeichen, was v vor sich hat, und nur seine absolute Gröfse in Betracht gezogen.

Bei der Anwendung dieses allgemeinen Satzes macht man den Grad der Gleichung immer zu einer geraden Zahl; wenn es nöthig sein sollte, durch Hinzufügung eines Factors $(x+0)$ oder durch Multiplication der Gleichung mit x, wobei a_{2n} dann $=$ Null wird.

Aufserdem kann bei der Benutzung der oben entwickelten Art, die v durch lauter gerade Potenzen der Wurzeln zu bestimmen, der Zweifel entstehen, ob in den trinomischen Factoren v positiv oder negativ zu nehmen ist. Will man diesem Zweifel ganz ausweichen, so bestimme man nicht die trinomischen Factoren der gegebenen Gleichung selbst, sondern die trinomischen Factoren der Gleichung, deren Wurzeln die Quadrate der ursprünglichen Wurzeln sind, oder der ersten unter den abgeleiteten. Diese Gleichung wird nämlich zu Wurzeln haben 1) die Quadrate der reellen Wurzeln der gegebenen Gleichung, die als Quadrate ihrer Natur nach positiv sind, und stets ein positives v geben müssen; 2) die Quadrate der vollständigen imaginären Wurzeln der gegebenen Gleichung, die den trinomischen Factor $x^2 + 2g^2\cos 2\varphi x + g^4$ geben, und also ebenfalls ein positives v; 3) die Quadrate der unvollständigen imaginären Wurzeln unter den gegebenen, $x + g\sqrt{-1}$, $x - g\sqrt{-1}$, wenn solche vorhanden sind, in denen $\varphi = 90^0$ oder überhaupt von der Form $(n + \frac{1}{2})\pi$, diese werden den trinomischen Factor $x^2 - 2g^2x + g^4$, also ebenfalls ein positives v geben; auch kann nie der Fall eintreten, dafs die beiden einzelnen Factoren $(x - g^2)(x - g^2)$ getrennt würden, und sich so

mit anderen zu einem negativen v verbänden, da die v stets ihrer Gröfse nach geordnet erscheinen, und folglich zwei gleich grofse lineare Factoren sich nothwendig zu einem trinomischen Factor vereinigen müssen. Wenn man auf diese Weise die trinomischen Factoren der ersten abgeleiteten Gleichung, welche etwa durch

$$x^2 + t_2 x + v_2$$

bezeichnet werden mögen, gefunden hat, wo v_2 nothwendig stets positiv sein mufs, so hat man für die Factoren der gegebenen Gleichung

$$v = \pm\sqrt{v_2}, \qquad t = \sqrt{(t_2 \pm 2\sqrt{v_2})},$$

wo die Vorzeichen zusammengehören, und wobei man auch noch den Fall, dafs t positiv oder negativ sein kann, in Betracht ziehen mufs. Bei reellen Wurzeln wird sich dieses leicht entscheiden, und bei imaginären kann man auch immer direct die Factoren der gegebenen Gleichung selbst bestimmen, da v bei diesen immer positiv ist.

Ueberhaupt ist diese Ungewifsheit über das Zeichen von v von keinem practischen Nachtheil. Denn der Fall, wo man bei reellen Wurzeln es vorziehen mufs, die trinomischen Factoren statt der einzelnen Wurzeln selbst zu bestimmen, tritt nur ein, wenn zwei Wurzeln gleich, oder so nahe einander gleich sind, dafs sie erst sehr spät sich von einander trennen lassen würden. Unter gleichen Wurzeln werden alle die verstanden, welche der absoluten Gröfse nach ohne Rücksicht auf das Zeichen einander gleich sind oder nahe kommen. Ein solcher Fall ist an sich schon sehr selten; wenn er aber eintritt, so giebt es ein fast immer unfehlbares Kennzeichen, das oder die v, die zu reellen Wurzeln gehören, von denen zu unterscheiden, die von imaginären gebildet werden. Denn da alle reellen Wurzeln gleich in der ersten abgeleiteten Gleichung nur positive Wurzeln geben, so kann irgend ein negatives Zeichen überhaupt nur dann in irgend einer der abgeleiteten Gleichungen vorkommen, wenn die erste Gleichung imaginäre Wurzeln hat; und bei den verschiedenen Stufen, die m und mit ihm $\cos m\varphi$ durchgeht, wird auch fast immer in einer der abgeleiteten Gleichungen in diesem Falle einmal ein Minuszeichen erscheinen. Dieser Zeichenwechsel wird einem oder mehreren Coefficienten, in denen er zuerst sich gezeigt hat, wiederum in den meisten Fällen eigen bleiben, und kann besonders bei den höheren Potenzen der Wurzeln als ein sicheres Kennzeichen angesehen werden, dafs der Coefficient, welcher zuerst nach einem solchen Minuszeichen eine bestimmte Grenze erreicht,

den Modul einer imaginären Wurzel enthält. Man kann daher mit völliger Sicherheit schliefsen, dafs wenn vor einem Gliede, wodurch ein v bestimmt wird, ein anderes vorhergeht, welches bei den höheren Potenzen irgend einmal einen Zeichenwechsel dargeboten hat, das aus diesem Gliede erhaltene v nothwendig positiv ist, und wird nur bei den v, denen nie ein Zeichenwechsel vorangegangen ist, über das Zeichen ungewifs sein können, und also auch nur in diesem seltenen Falle zu dem vorgeschlagenen Mittel zu greifen brauchen.

Endlich wird es in jedem Falle zweckmäfsig sein, die beiden linearen Gleichungen in Bezug auf f, die aus dem Coefficienten α_1 und α_{2n-1} hervorgehen, mit zu benutzen, so dafs man, vermittelst der zuletzt abgeleiteten Gleichungen, immer zwei f weniger als überhaupt erforderlich sind, bestimmt.

Hat man auf diese Weise die erste Näherung für die Werthe von t und v, ebenfalls vermittelst der Logarithmen von 5 Decimalen erhalten, so ist es eben so leicht wie bei den reellen Wurzeln, die genaueren Werthe zu finden. Die Gleichung

$$fx = fx_0 + \frac{dfx_0}{dx_0}\Delta x_0 = [x_0^n] + [nx_0^n]\frac{\Delta x_0}{x_0}$$

findet auch hier statt. Hat der trinomische Factor imaginäre Wurzeln, wo folglich

$$x_0 = -g_0(\cos\varphi_0 + \sin\varphi_0\sqrt{-1}), \qquad x_0' = -g_0(\cos\varphi_0 - \sin\varphi_0\sqrt{-1}),$$

so erhält man durch Substitution von $(-g_0)^n\cos n\varphi_0$ für jedes x_0^n, und $(-g_0)^n\sin n\varphi_0$ für jedes x_0^n, den Werth von

$$fx_0 = [(-g_0)^n\cos n\varphi_0] + [(-g_0)^n\sin n\varphi_0]\sqrt{-1}$$

und

$$fx_0' = [(-g_0)^n\cos n\varphi_0] - [(-g_0)^n\sin n\varphi_0]\sqrt{-1}.$$

Auf gleiche Weise wird

$$[nx_0^n] = [n(-g_0)^n\cos n\varphi_0] + [n(-g_0)^n\sin n\varphi_0]\sqrt{-1}$$

und $$[nx_0'^n] = [n(-g_0)^n\cos n\varphi_0] - [v(-g_0)^n\sin n\varphi_0]\sqrt{-1}.$$

Endlich wird wegen

$$\begin{aligned}\lg x_0 &= \lg(-g_0) + \lg(\cos\varphi_0 + \sin\varphi_0\sqrt{-1})\\ &= \lg(-g_0) + \varphi_0\sqrt{-1}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\lg x &= \lg(-g) + \varphi\sqrt{-1}\\ \Delta\lg x_0 &= \Delta\lg g_0 + \Delta\varphi_0\sqrt{-1}\end{aligned}$$

und eben so $$\Delta\lg x_0' = \Delta\lg g_0 - \Delta\varphi_0\sqrt{-1}.$$

Setzt man also, was immer erlaubt ist,

$$[(-g_0)^n \cos n\Phi_0] = P\cos Q \qquad [n(-g_0)^n \cos n\Phi_0] = \varrho\cos\psi$$
$$[(-g_0)^n \sin n\Phi_0] = P\sin Q \qquad [n(-g_0)^n \sin n\Phi_0] = \varrho\sin\psi,$$

so hat man die zwei Gleichungen

$$0 = P\cos Q + P\sin Q\sqrt{-1} + \{\varrho\cos\psi + \varrho\sin\psi\sqrt{-1}\}\{\Delta\lg g_0 + \Delta\Phi_0\sqrt{-1}\}$$
$$0 = P\cos Q - P\sin Q\sqrt{-1} + \{\varrho\cos\psi - \varrho\sin\psi\sqrt{-1}\}\{\Delta\lg g_0 - \Delta\Phi_0\sqrt{-1}\},$$

aus welchen man durch Verbindung vermittelst Addition und Substraction erhält

$$0 = P\cos Q + \varrho\cos\psi\,\Delta\lg g_0 - \varrho\sin\psi\,\Delta\Phi_0$$
$$0 = P\sin Q + \varrho\sin\psi\,\Delta\lg g_0 + \varrho\cos\psi\,\Delta\Phi_0$$

oder nach gehöriger Elimination

$$\Delta\log g_0 = -\frac{P\cos(Q-\psi)}{\varrho}M, \qquad \Delta\Phi_0 = -\frac{P\sin(Q-\psi)}{\varrho},$$

wo der Factor M wie oben den Modulus des briggischen Systems bezeichnet. Aus beiden kann man, wenn man es vorzieht, ableiten

$$\Delta f_0 = -\frac{2Pg_0\cos(Q-\psi+\varphi_0)}{\varrho}$$

oder

$$\Delta\lg f_0 = -\frac{P\cos(Q-\psi+\varphi_0)}{\varrho\cos\varphi_0}M.$$

Die Rechnung kommt sonach im Wesentlichen auf die Substitution von den beiden Werthen von $x^n = (-g)^n\cos n\Phi$ und $x^n = (-g)^n\sin n\Phi$ hinaus, da die Ermittelung von $n(-g)^n\cos n\Phi$ und $n(-g)^n\sin n\Phi$, oder die Multiplication jedes Gliedes mit dem Exponenten der Potenz von x, welche in ihm vorkommt, kaum in Anschlag zu bringen ist.

Sind beide Wurzeln reell, so substituirt man jede einzelne in die Gleichung, und bestimmt ihre Correction, wie oben gezeigt ward, oder wenn man es vorzieht, so kann man die Correction von v und t suchen. Die Substitution der Wurzeln giebt, wenn $\sqrt{v} = g$,

$$[(-g_0 y_0)^n] = A, \qquad [(-g_0 y_0^{-1})^n] = B,$$

weil die beiden Werthe von x sind $-g_0 y_0$ und $-\frac{g_0}{y}$, und daraus folgen die Differentialquotienten in Bezug auf den Logarithmen der Wurzeln

$$[n(-g_0 y_0)^n] = p, \qquad [n(-g_0 y_0^{-1})^n] = q.$$

Man hat folglich

$$0 = A + p\{\Delta\lg g_0 + \Delta\lg y_0\}$$
$$0 = B + q\{\Delta\lg g_0 - \Delta\lg y_0\},$$

woraus

$$\frac{1}{M}\Delta \lg g_0 = -\tfrac{1}{2}\left\{\frac{A}{p}+\frac{B}{q}\right\}$$
$$\frac{1}{M}\Delta \lg y_0 = -\tfrac{1}{2}\left\{\frac{A}{p}-\frac{B}{q}\right\}$$

und dann wegen $\Delta \lg t_0 = \Delta \lg g_0 + \Delta \lg\left(y_0+\frac{1}{y_0}\right)$ für Wurzeln, die gleiche Zeichen haben, folgen wird:

$$\frac{1}{M}\Delta \lg v_0 = -\left\{\frac{A}{p}+\frac{B}{q}\right\}$$
$$\frac{1}{M}\Delta \lg t_0 = -\tfrac{1}{2}\left(\frac{A}{p}+\frac{B}{q}\right)-\tfrac{1}{2}\cos\varphi\left\{\frac{A}{p}-\frac{B}{q}\right\}$$
$$= -\left\{\frac{A}{p}\cos\tfrac{1}{2}\varphi^2+\frac{B}{q}\sin\tfrac{1}{2}\varphi^2\right\}$$

und für $\Delta \lg t_0 = \Delta \lg g_0 + \Delta \log\left(y_0-\frac{1}{y_0}\right)$, für Wurzeln, die ungleiche Zeichen haben,

$$\frac{1}{M}\Delta \lg v_0 = -\left\{\frac{A}{p}+\frac{B}{q}\right\}$$
$$\frac{1}{M}\Delta \lg t_0 = -\tfrac{1}{2}\left\{\frac{A}{p}+\frac{B}{q}\right\}-\tfrac{1}{2}\sec\varphi\left\{\frac{A}{p}-\frac{B}{q}\right\}$$
$$= -\frac{1}{\cos\varphi}\left\{\frac{A}{p}\cos\tfrac{1}{2}\varphi^2-\frac{B}{q}\sin\tfrac{1}{2}\varphi^2\right\}.$$

In diesem letzten Satze ist durch die Ermittelung der trinomischen Factoren die Auflösung der Aufgabe vollständig enthalten, und es wird nun keine Schwierigkeit haben, in dem allgemeinen Falle, wo imaginäre und reelle Wurzeln zugleich vorkommen, den Gang der Operationen und die Form des Endresultats zu übersehen. Man kann dazu entweder die beiden oben gegebenen Formen für reelle Wurzeln und für imaginäre mit einander multipliciren, wodurch man erhalten wird

$$x^{2n}+\{[a^m]+[f_m]\}x^{2n-1}+\{[a^m b^m]+[a^m f_m]+[g^{2m}]\}x^{2n-2}$$
$$+\{[a^m b^m c^m]+[a^m b^m f_m]+[a^m g^{2m}]+[g^{2m} f'_m]\}x^{2n-3}$$
$$+\{[a^m b^m c^m d^m]+[a^m b^m c^m f_m]+[a^m b^m g^{2m}]+[a^m g^{2m} f'_m]$$
$$+[g^{2m} g'^{2m}]\}x^{2n-4}\ldots\text{ etc.} = 0.$$

Noch einfacher betrachtet man aber jede Gleichung, nachdem man nöthigenfalls ihren Grad durch Multiplication mit x zu einer geraden Zahl gemacht hat, als ein Product der trinomischen Factoren

$$(x^2+tx+v)(x^2+t'x+v')(x^2+t''x+v'')\ldots = 0.$$

Wenn dann durch Erhebung der Wurzeln zur m^{ten} Potenz die Form erhalten ist:

$$x^{2n} + C_1 x^{2n-1} + C_2 x^{2n-2} + C_3 x^{2n-3} + C_4 x^{2n-4} \ldots . + C_{2n} = 0,$$

so findet im Allgemeinen, unter der Annahme, dafs $v > v'$, $v' > v''$, $v'' > v'''$, ... $v^{(n-1)} > v^{(n)}$, und jede reelle Wurzel, welche zu einem v gehört, gröfser ist als jede zu einem kleineren v gehörige Wurzel, oder die Quadratwurzel aus einem kleineren v, das Verhalten statt, dafs nach der Gröfse der v geordnet:

$$\begin{aligned} C_2 &= v^m \\ C_4 &= v^m v'^m \\ C_6 &= v^m v'^m v''^m \\ &\vdots \\ C_{2r+2} &= v^m v'^m v''^m \ldots . v^{(r)m}. \end{aligned}$$

Die Coefficienten C_1, C_3, C_5, überhaupt die von der Form C_{2r+1} sind dagegen Functionen der verschiedenen t; wenn irgend ein $v^{(r)}$ zu einem trinomischen Factor gehört, dessen Wurzeln reell sind, so wird C_{2r+1} die Form haben

$$C_{2r+1} = v^m v'^m \ldots . v^{(r-1)m} a_r^m,$$

wo a_r die gröfste reelle Wurzel ist, die zu v_r gehört; das letztere hat dann den Werth $a_r b_r$ und man findet durch Division

$$\frac{C_{2r+1}}{C_{2r}} = a_r^m, \qquad \frac{C_{2r+2}}{C_{2r+1}} = b_r^m.$$

Wenn dagegen $v^{(r)}$ zu einem trinomischen Factor gehört, dessen Wurzeln imaginär sind, so nähert sich C_{2r+1} nicht continuirlich einer bestimmten Grenze, sondern hat stets Werthe, die niemals den Werth von

$$2 v^m v'^m v''^m \ldots . v^{(r-1)m} v^{(r)\frac{1}{2}m}$$

überschreiten können. Der Coefficient C_{2r+1} behält folglich immer schwankende, häufig mit dem Minuszeichen behaftete Werthe, welches letztere, wenn es sich in irgend einer der abgeleiteten Gleichungen zeigt, ein unfehlbares Kennzeichen ist, dafs die gegebene Gleichung imaginäre Wurzeln hat. Hat man durch Division von

$$\frac{C_{2r+2}}{C_{2r}} = v^r$$

die v^r gefunden, sie mögen zu imaginären Wurzeln gehören oder zu reellen. so benutzt man zur Bestimmung der t, wenn nicht mehr als 4 imaginäre Wurzeln vorhanden sind oder zwei t gesucht werden, die linearen Gleichungen, die sich für die t aus den Coefficienten α_1 und α_{2n-1} der gegebenen Gleichung finden. Werden mehrere t verlangt, so substituirt man

die Werthe der verschiedenen v in die oben entwickelten Gleichungen vom n^{ten} und $(n-1)^{ten}$ Grade, und erhält durch die Aufsuchung ihres gemeinschaftlichen Divisors den Werth des zu jedem v gehörigen t.

Im Falle endlich, dafs ein $v^{(r)}$ zu völlig gleichen Wurzeln gehört, so hat der Coefficient C_{2r+1} den Werth

$$C_{2r+1} = 2v^m v'^m \ldots\ldots v^{(r-1)^m} v^{(r)^{\frac{1}{2}m}},$$

denselben, welcher bei imaginären Wurzeln die äufserste Grenze bildet.

Ausnahmen von dieser allgemeinen Regel treten nur ein, wenn die obigen Bedingungen nicht alle erfüllt sind, wenn also z. B. gleiche reelle Wurzeln oder der Modul eines imaginären Wurzelpaares zwischen zwei oder mehreren reellen Wurzeln liegt, die der Gröfse der v nach zu einem und demselben v gehören. In diesem Falle ordnen sich die Glieder, die zu solchen Ausnahmen gehören, immer so, wie die Reihefolge der Coefficienten in den einfachen Factoren, welche diese Ausnahme bilden, sich darstellt. Wenn also 3 gleiche reelle Wurzeln vorhanden wären, die mit der nächststehenden ungleichen reellen Wurzel ein Product zweier trinomischer Factoren bilden werden, so ist wegen

$$(x+a)^3(x+b) = x^4+(3a+b)x^3+(3a^2+3ab)x^2+(3a^2b+a^3)x+a^3b,$$

für $b<a$ die Aufeinanderfolge der C

$$\begin{aligned}
C_{2r} &= v^m v'^m \ldots\ldots v^{(r-1)^m} \\
C_{2r+1} &= 3v^m v'^m \ldots\ldots v^{(r-1)^m} a^m \\
C_{2r+2} &= 3v^m v'^m \ldots\ldots v^{(r-1)^m} a^{2m} \\
C_{2r+3} &= v^m v'^m \ldots\ldots v^{(r-1)^m} a^{3m} \\
C_{2r+4} &= v^m v'^m \ldots\ldots v^{(r-1)^m} a^{3m} b^m = v^m v'^m \ldots\ldots v^{(r-1)^m} v^{(r)^m} v^{(r+1)^m}
\end{aligned}$$

Und ganz ähnlich werden die übrigen Coefficienten der verschiedenen Potenzen eines Binoms sich in Fällen von mehreren gleichen Wurzeln zeigen. Ebenso übersieht man leicht die Reihenfolge, wenn $b>a$ wäre.

Wenn eine reelle Wurzel gleich dem Modul einer imaginären wäre, und also wiederum mit der nächstangrenzenden reellen Wurzel verbunden, ein doppelter trinomischer Factor sich bildete, so geht die Form

$$(x^2+fx+g^2)(x+g)(x+a)$$

$$= x^4+(a+f+g)x^3+(ag+af+fg+g^2)x^2+(afg+ag^2+g^3)x+ag^3,$$

im Falle $a<g$ wäre, weil f_m sich dem $2g^m$ möglicherweise nähern, und auf keinen Fall für immer dagegen als verschwindend betrachtet werden kann, über in:

$$x^4 + * x^3 + * x^2 + g'^m x + a^m g^{3m}$$

und folglich wird die Reihefolge der Coefficienten werden

$C_{2r} = v^m v'^m \ldots v^{(r-1)^m}$

$C_{2r+1} =$ unbestimmt und schwankend

$C_{2r+2} =$ unbestimmt und schwankend

$C_{2r+3} = v^m v'^m \ldots v^{(r-1)^m} g^{(r)^{3m}}$

$C_{2r+4} = v^m v'^m \ldots v^{(r-1)^m} g^{(r)^{3m}} a^m = v^m v'^m \ldots v^{(r-1)^m} v^{(r)^m} v^{(r+1)^m}$

und ganz ähnlich in allen andern Fällen. Gleiche Moduln bei mehreren Paaren imaginärer Wurzeln werden drei aufeinander folgende unbestimmte Glieder geben, wenn zwei Moduln einander gleich sind, 5 aufeinander folgende unbestimmte Glieder, wenn drei Moduln gleich sind u. s. w. Es wird hiernach keine Schwierigkeit haben, sich in allen Fällen den Gang erklären zu können, und die Resultate daraus herzuleiten.

Es mufs hiebei beachtet werden, dafs wenn man immer zu geraden Potenzen erhebt, die Gleichheit der Wurzeln von der absoluten Gröfse ohne Rücksicht auf das Zeichen zu verstehen ist, und dafs eben deswegen das Zeichen der v, welche nicht zu imaginären Wurzeln gehören, zweideutig ist, wenn man auf die ursprüngliche Gleichung zurückgeht. Die Zweideutigkeit hört auf, wenn man die Gleichung auflöst, welche den Quadraten der Wurzeln entspricht. In ihr sind alle v positiv. Dasselbe gilt von den Zeichen der einfachen reellen Wurzeln, über welche durch unmittelbare Substitution oder auf anderm Wege stets zu entscheiden ist.

Diese Ausnahmefälle von gleichen Wurzeln und Moduln erfordern aber aufserdem noch, bei der Verbesserung der zuerstgefundenen Näherungswerthe, eine besondere Berücksichtigung. Denn wenn man nicht aus der Natur der Aufgabe, welche durch eine Gleichung ausgedrückt wird, weifs, dafs in aller Strenge gleiche Wurzel vorhanden sein müssen, so giebt die erste Näherung, wenn sie auf gleiche Wurzeln und Moduln führt, doch nichts anderes zu erkennen, als dafs diese Gleichung innerhalb der Grenzen dieser ersten Näherung stattfindet. Sie kann aber nicht berechtigten, bei der Verbesserung der gefundenen Werthe diese Gleichheit beizubehalten und vorauszusetzen. Es müssen daher die verbesserten Werthe durch eine Methode gefunden werden, welche über diesen Punct entscheidet, abgesehen davon, dafs die oben angeführten Formeln für die Verbesserung der ersten Werthe, die Ungleichheit sämtlicher Wurzeln

und selbst eine merkliche Ungleichheit voraussetzen, welche mindestens das Doppelte der etwanigen Verbesserung beträgt, und für die practische Brauchbarkeit noch stärker sein mufs.

Zur Erhaltung einer solchen Verbesserungsmethode setze man wie oben

$$fx = (x+a)(x+b)(x+c)(x+d) \ldots.$$

und bezeichne aufserdem das Product

$$\left(1+\frac{1}{x+a}y\right)\left(1+\frac{1}{x+b}y\right)\left(1+\frac{1}{x+c}y\right)\left(1+\frac{1}{x+d}y\right)\ldots.$$

durch die Form

$$1+\varepsilon_1 y+\varepsilon_2 y^2+\varepsilon_3 y^3+\varepsilon_4 y^4+\ldots.$$

so dafs

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{x+a}+\frac{1}{x+b}+\frac{1}{x+c}+\frac{1}{x+d}\ldots\ldots. = \left[\frac{1}{x+a}\right]$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{(x+a)(x+b)}+\frac{1}{(x+a)(x+c)}+\frac{1}{(x+b)(x+c)} = \left[\frac{1}{(x+a)(x+b)}\right]$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{(x+a)(x+b)(x+c)}+\frac{1}{(x+a)(x+b)(x+d)}\ldots. = \left[\frac{1}{(x+a)(x+b)(x+c)}\right] \text{ u. s. w.}$$

oder ε_m die Summe der Combinationen der m^{ten} Ordnung ohne Wiederholung von den n Elementen $\frac{1}{x+a}$, $\frac{1}{x+b}$, etc. bezeichnet. Man wird nun ohne Mühe finden, dafs jedesmal

$$\frac{dfx}{dx} = \varepsilon_1 fx$$

$$\frac{1}{1.2}\frac{d^2fx}{dx^2} = \varepsilon_2 fx$$

$$\frac{1}{1.2.3}\frac{d^3fx}{dx^3} = \varepsilon_3 fx$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{1.2.3\ldots m}\frac{d^mfx}{dx^m} = \varepsilon_m fx$$

sein wird. Es enthält nämlich $\varepsilon_m fx$ die Combinationen der $(n-m)^{\text{ten}}$ Ordnung von n Elementen $(x+a)$, $(x+b)$, deren es

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots..(n-m+1)}{1.2.3\ldots..m}$$

verschiedene giebt. Jedes einzelne dieser Glieder differentiirt, giebt $(n-m)$ Werthe, in welchen immer $(n-m-1)$ solcher Elemente verbunden sind, zusammen sind also in $\frac{d(\varepsilon_m fx)}{dx}$

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-m)}{1.2.3\ldots\ldots m}$$

Glieder, deren jedes $(n-m-1)$ Factoren enthält, und da in dieser Summe nur Combinationen von der $(n-m-1)^{\text{ten}}$ Ordnung enthalten sein können, und auch alle symmetrisch darin enthalten sein müssen, solcher Combinationen aber nur

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-m)}{1.2.3\ldots\ldots(m+1)}$$

möglich sind, so mufs sich jede Combination $(m+1)$mal wiederholen. Oder es ist

$$\frac{d(\varepsilon_m fx)}{dx} = (m+1)\,\varepsilon_{m+1} fx,$$

woraus der allgemeine Ausdruck folgt. Wendet man nun auf fx den Taylorschen Lehrsatz an und setzt man

$$x = x^0 + \Delta x^0,$$

so wird

$$fx = fx^0 + \frac{dfx^0}{dx^0}\Delta x^0 + \frac{1}{1.2}\,\frac{d^2fx^0}{dx^{0^2}}\Delta x^{0^2} + \ldots.$$

Bezeichnet man also durch ε_m^0 die ε_m, welche den Factoren (x^0+a), (x^0+b), (x^0+c) etc. entsprechen, und substituirt, so wird

$$fx = fx^0\,\{1 + \varepsilon_1^0\,\Delta x^0 + \varepsilon_2^0\,\Delta x^{0^2} + \varepsilon_3^0\,\Delta x^{0^3}\ldots.\},$$

welche Reihe Glied für Glied der Taylorschen Reihe entspricht, so dafs das Resultat aus den m ersten Gliedern dieser Reihe vollkommen identisch ist mit dem Resultat aus den m ersten Gliedern der Taylorschen Reihe. Es soll nun fx Null werden für gewisse Werthe von x, also mufs, was auch x^0 für ein Werth sein mag, da nach der Form von fx die Taylorsche Reihe, wenn sie ganz zu Ende geführt wird, stets den strengen Werth giebt, ein Werth von Δx^0 gefunden werden, der der Gleichung

$$0 = 1 + \varepsilon_1^0\,\Delta x^0 + \varepsilon_2^0\,\Delta x^{0^2} + \varepsilon_3^0\,\Delta x^{0^3}\ldots.$$

entspricht, und jedes Resultat, was aus dieser Form bei einer gewissen Anzahl Glieder gefunden wird, mufs eben so aus der gleichen Anzahl Glieder der Taylorschen Reihe hervorgehen.

Sei jetzt x^0 ein Werth, der einer negativen Wurzel sehr nahe kommt, etwa $x^0 = -a^0$, so wird $\Delta x^0 = a^0 - a$ eine kleine Gröfse der ersten Ordnung, deren verschiedene Potenzen nur dann in der Gleichung

$$0 = 1 + \varepsilon_1^0\,\Delta x^0 + \varepsilon_2^0\,\Delta x^{0^2} + \varepsilon_3^0\,\Delta x^{0^3}\ldots.$$

das erste Glied ... 1 ... aufheben können, wenn sie mit Factoren multipli-

cirt werden, deren Nenner ebenfalls kleine Gröfsen der ersten Ordnung zu den verschiedenen Potenzen von Δx^0 erhoben enthalten, während die Zähler Gröfsen der 0ten Ordnung sind. Ein solcher Factor wird in

$$\varepsilon_1^0 = \frac{1}{x^0+a} + \frac{1}{x^0+b} + \ldots\ldots = \frac{1}{a-a^0} + \frac{1}{b-a^0} + \ldots\ldots$$

nur das erste Glied sein, wenn die übrigen Wurzeln so unterschieden von a sind, dafs $b-a^0$, $c-a^0$ nicht als kleine Gröfsen der ersten Ordnung betrachtet werden können. In diesem Falle werden auch die folgenden ε_2^0, ε_3^0 .... keine Nenner enthalten, welche als Gröfsen der zweiten und dritten etc. Ordnung die Kleinheit von Δx^{0^2}, Δx^{0^3}.... etc. aufheben, und eine merkliche Gröfse hervorbringen könnten, weil die stattfindenden Combinationen ohne Wiederholung sind. Man findet folglich ohne merklichen Fehler Δx^0 aus

$$0 = 1 + \varepsilon_1^0 \Delta x^0 = 1 + \frac{1}{a-a^0} \Delta x^0$$

oder

$$\Delta x^0 = a^0 - a.$$

Vermittelst des ersten Differentials von fx wird man daher bei lauter ungleichen Wurzeln und hinlänglicher Näherung an eine derselben, einen genaueren Werth finden, worin die Anwendbarkeit und Beschränkung der Newtonschen Approximationsmethode ausgesprochen ist.

Wenn aber aufser a noch eine zweite Wurzel b dem a^0 so nahe liegt, dafs $b-a^0$ ebenfalls eine kleine Gröfse erster Ordnung ist, so wird nicht allein

$$\varepsilon_1^0 = \frac{1}{a-a^0} + \frac{1}{b-a^0},$$

sondern es kommt nun auch in ε_2^0 ein Glied vor, welches mit Δx^{0^2} verbunden ebenfalls eine Gröfse 0ter Ordnung giebt, und nicht übergangen werden darf. Nämlich ohne merklichen Fehler wird

$$\varepsilon_2^0 = \frac{1}{(a-a^0)(b-a^0)}$$

Die Gleichung

$$0 = 1 + \varepsilon_1^0 \Delta x^0 + \varepsilon_2^0 \Delta x^{0^2}$$

zerlegt sich dann in die Factoren $0 = \left(1 + \frac{\Delta x^0}{a-a^0}\right)\left(1 + \frac{\Delta x^0}{b-a^0}\right)$.

Oder: Wenn zwei Wurzeln vorhanden sind, die einander sehr nahe sind, so berechnet man $\frac{dfx^0}{dx^0}$ und $\frac{1}{1.2}\frac{d^2fx^0}{dx^{0^2}}$, und findet aus der Auflösung der quadratischen Gleichung zwei Wurzeln, welche zu dem Nähe-

rungswerthe $-a^0$ hinzugefügt, die wahren Werthe geben, die man sucht. Die folgenden ε_3^0, ε_4^0 etc. haben hier weiter keinen Einflufs. In der Regel werden, wenn a^0 und b^0 reell sind, beide Wurzeln dieser quadratischen Gleichung reell sein; sind sie gleich, so sind die Hauptwurzeln innerhalb der Grenzen der neuen Näherung wiederum als gleich anzunehmen. Sind sie aber imaginär, so hatte die Hauptgleichung zwei imaginäre Wurzeln von der Form $a+\beta\sqrt{-1}$ und $a-\beta\sqrt{-1}$. Indessen mufs in diesem Falle β eine kleine Gröfse der ersten Ordnung sein, weil in ε_1 die beiden Glieder für imaginäre Wurzeln

$$\frac{1}{x+a+\beta\sqrt{-1}}+\frac{1}{x+a-\beta\sqrt{-1}}$$

sich vereinigen in

$$\frac{2(x+a)}{(x+a)^2+\beta^2}=\frac{1}{x+a+\frac{\beta^2}{x+a}}$$

und also nur dann eine kleine Gröfse der ersten Ordnung im Nenner geben können, wenn β von derselben Ordnung wie $a-a^0$ ist. Auf die absolute Gröfse von $\frac{dfx^0}{dx^0}$ und $\frac{d^2fx^0}{dx^{02}}$ kommt es dabei nicht an. Es kann der Fall eintreten, dafs $\frac{dfx^0}{dx^0}=$ Null wird, sowohl bei reellen als imaginären Wurzeln. Es ist aber unmöglich, dafs alle Differentialquotienten, welche nöthig sind, zugleich Null werden, weil in diesem Falle die Aufgabe eine unbestimmte würde.

Hiemit ist der Weg für alle ferneren Fälle angezeigt. Wenn bei der ersten Näherung m nahe gleiche Wurzeln gefunden sind, so geht man bis zu ε_m^0 fort oder bis zu $\frac{d^mfx^0}{dx^{0m}}$, und löst die Gleichung vom m^{ten} Grade auf. Diese Auflösung, die niemals in solchen Ausnahmefällen zu vermeiden sein wird, mufs immer zum Ziele führen, und wird es um so leichter, als durch den eingeführten Näherungswerth x^0 die Δx^0, wenn sie verschieden sind, ein sehr merkliches Verhältnifs zu einander haben müssen, und die Schnelligkeit der Auflösung von diesem Verhältnifs der Wurzeln zu einander abhängt, wie schon oben bemerkt ward. Auch ist es ein Vorzug dieser Auflösungsmethode, dafs man von allen Wurzeln sehr genäherte Werthe findet, und folglich über die mögliche Anzahl einander sehr nahe liegender gar nicht in Zweifel sein kann.

Für die numerische Rechnung ist es bequemer, zu setzen

$$x = x^0 + x^0 \frac{\Delta x^0}{x^0}$$

und die Taylorsche Reihe zu schreiben:

$$fx = fx + x^0 \frac{dfx^0}{dx^0} \cdot \frac{\Delta x^0}{x^0} + \tfrac{1}{2} x^{0^2} \frac{d^2 fx^0}{dx^{0^2}} \left(\frac{\Delta x^0}{x^0}\right)^2 + \ldots.$$

Es werden nämlich die Werthe

$$fx = [x^{0^n}], \quad x^0 \frac{dfx^0}{dx^0} = [n x^{0^n}], \quad x^{0^2} \frac{d^2 fx^0}{dx^{0^2}} = [n(n-1) x^{0^n}], \text{ etc.}$$

aus dem ersten fx^0 durch einfache Multiplication jedes Gledes mit n (der Potenz von x^0, die darin vorkommt), mit $(n-1)$ u. s. w. gefunden. Der Werth $\frac{\Delta x^0}{x^0}$, den man findet, wird dann fast immer gleich $\Delta \log x^0$ gesetzt werden können, mit Rücksicht auf den Modulus des briggischen Systems.

Dieses Verfahren gilt allgemein für reelle und imaginäre Wurzeln. Indessen ist es vielleicht nicht überflüssig, in Bezug auf die letzteren eine nähere Entwickelung hinzuzufügen. Wenn zwei Paare imaginärer Wurzeln von der Form $\alpha \pm \beta \sqrt{-1}$ und $\alpha' \pm \beta' \sqrt{-1}$ einander so nahe liegen, daſs die erste Näherung gleiche imaginäre Wurzeln von der Form $\alpha^0 \pm \beta^0 \sqrt{-1}$ gegeben hat, so braucht hier nur der Fall betrachtet zu werden, wo β^0 eine merkliche Gröſse hat, weil der andere, wenn β^0 sehr klein ist, sich aus der Substitution der reellen Wurzel $x^0 = -\alpha^0$ ergeben würde, wie oben bei zwei gleichen reellen Wurzeln angeführt ist. In diesem Falle wird ε_1^0 den Werth haben, wenn $x^0 = -\alpha^0 - \beta^0 \sqrt{-1}$ substituirt ist:

$$\frac{1}{\alpha - \alpha^0 + (\beta - \beta^0)\sqrt{-1}} + \frac{1}{\alpha' - \alpha^0 + (\beta' - \beta^0)\sqrt{-1}},$$

denn die Verbindung von $-\alpha^0 - \beta^0 \sqrt{-1}$ mit $\alpha - \beta \sqrt{-1}$ und $\alpha' - \beta' \sqrt{-1}$ wird in dem Nenner die sehr merklichen Gröſsen $-(\beta + \beta^0)\sqrt{-1}$ und $-(\beta' + \beta^0)\sqrt{-1}$ einführen, die sich nicht gegenseitig vernichten. Dasselbe wird in ε_2^0 stattfinden, welches den Werth erhält:

$$\frac{1}{(\alpha - \alpha^0 + (\beta - \beta^0)\sqrt{-1})(\alpha' - \alpha^0 + (\beta' - \beta^0)\sqrt{-1})}.$$

Die spätern Werthe von ε_3^0, ε_4^0 haben keinen Einfluſs. Man wird also aus der Gleichung

$$0 = fx^0 + x^0 \frac{dfx^0}{dx^0} \cdot \frac{\Delta x^0}{x^0} + \frac{x^{0^2}}{1.2} \cdot \frac{d^2 fx^0}{dx^{0^2}} \left(\frac{\Delta x^0}{x^0}\right)^2,$$

wenn für x^0 der Werth $-\alpha^0 - \beta^0 \sqrt{-1}$ gesetzt ist, die beiden Wurzeln

für Δx^0 erhalten

$$\{\Delta x^0 + \alpha - \alpha^0 + (\beta - \beta^0)\sqrt{-1}\}\,\{\Delta x^0 + \alpha' - \alpha^0 + (\beta' - \beta^0)\sqrt{-1}\}$$

und auf dieselbe Weise, wenn $-\alpha^0 + \beta^0\sqrt{-1}$ substituirt ist, die Wurzeln

$$\{\Delta x^0 + \alpha - \alpha^0 - (\beta - \beta^0)\sqrt{-1}\}\,\{\Delta x^0 + \alpha' - \alpha^0 - (\beta' - \beta^0)\sqrt{-1}\}$$

und die Verbindung beider Gleichungen vom zweiten Grade in Bezug auf Δx^0, die aus beiden Substitutionen hervorgehen, wird eine Gleichung vom vierten Grade geben, deren vier Wurzeln sein werden

$$\{\Delta x^0 + \alpha - \alpha^0 \pm (\beta - \beta^0)\sqrt{-1}\}\,\{\Delta x^0 + \alpha' - \alpha^0 \pm (\beta' - \beta^0)\sqrt{-1}\}.$$

Sind deshalb die Wurzeln wirklich ungleich, so mufs man durch unmittelbare Substitution entscheiden, welches Wurzel-Paar zu $\alpha^0 + \beta^0\sqrt{-1}$, und welches zu $\alpha^0 - \beta^0\sqrt{-1}$ gehört. Ebenso wird man bei drei nahe gleichen Paaren imaginärer Wurzeln auf eine Gleichung vom 6ten Grade geführt, bei vieren auf eine vom achten u. s. w.

Die Form dieser Gleichungen wird sich am leichtesten übersehen lassen, wenn man setzt

$$\alpha^0 = r^0 \cos\varphi^0 \qquad \beta^0 = r^0 \sin\varphi^0$$

und damit

$$[(-r^0)^n \cos n\varphi^0] = P\cos Q \qquad [(-r^0)^n \sin n\varphi^0] = P\sin Q$$
$$[n(-r^0)^n \cos n\varphi^0] = \varrho\cos\psi \qquad [(n(-r^0)^n \sin n\varphi^0] = \varrho\sin\psi$$
$$[n(n-1)(-r^0)^n \cos n\varphi^0] = \varrho'\cos\psi' \qquad [n(n-1)(-r^0)^n \sin n\varphi^0] = \varrho'\sin\psi'$$
$$[n(n-1)(n-2)(-r^0)^n \cos n\varphi^0] = \varrho''\cos\psi''$$
$$[n(n-1)(n-2)(-r^0)^n \sin n\varphi^0] = \varrho''\sin\psi'' \text{ etc.}$$

Es wird dann die Gleichung aus der Substitution von $x^0 = -\alpha^0 - \beta^0\sqrt{-1}$:

$$0 = P\cos Q + \varrho\cos\psi\frac{\Delta x^0}{x^0} + \tfrac{1}{2}\varrho'\cos\psi'\left(\frac{\Delta x^0}{x^0}\right)^2 + \tfrac{1}{6}\varrho''\cos\psi''\left(\frac{\Delta x^0}{x^0}\right)^3 \ldots$$
$$+\left\{P\sin Q + \varrho\sin\psi\frac{\Delta x^0}{x^0} + \tfrac{1}{2}\varrho'\sin\psi'\left(\frac{\Delta x^0}{x^0}\right)^2 + \tfrac{1}{6}\varrho''\sin\psi''\left(\frac{\Delta x^0}{x^0}\right)^3\ldots\right\}\sqrt{-1}$$

oder, wenn man die $\sqrt{-1}$ wegschafft,

$$0 = \left\{P\cos Q + \varrho\cos\psi\frac{\Delta x^0}{x^0} + \tfrac{1}{2}\varrho'\cos\psi'\left(\frac{\Delta x^0}{x^0}\right)^2 + \tfrac{1}{6}\varrho''\cos\psi''\left(\frac{\Delta x^0}{x^0}\right)^3\ldots\right\}^2$$
$$+\left\{P\sin Q + \varrho\sin\psi\frac{\Delta x^0}{x^0} + \tfrac{1}{2}\varrho'\sin\psi'\left(\frac{\Delta x^0}{x^0}\right)^2 + \tfrac{1}{6}\varrho''\sin\psi''\left(\frac{\Delta x^0}{x^0}\right)^3\ldots\right\}^2,$$

welche letztere Gleichung ebenfalls für die Substitution von $x^0 = -\alpha^0 + \beta^0\sqrt{-1}$ gilt, so dafs man immer nur auf eine Gleichung von demselben Grade mit der Anzahl der imaginären Wurzeln geführt wird.

In den einfacheren Fällen, wo zwei Paare oder drei Paare imaginärer Wurzeln gleich sind, kommt man indessen noch einfacher zum Ziel,

und ohne alle Zweideutigkeit, wenn man bei der ersten aus der Substitution von $x^0 = -\alpha^0 - \beta^0\sqrt{-1}$ allein hervorgehenden Gleichung stehen bleibt, und diese Gleichung auflöst. Man bekommt dann unmittelbar die Werthe von $\alpha - \alpha^0 + (\beta - \beta^0)\sqrt{-1}$ und von $\alpha' - \alpha^0 + (\beta' - \beta^0)\sqrt{-1}$. Diese Gleichungen unterscheiden sich freilich von den gewöhnlichen dadurch, dafs ihre Coefficienten imaginäre Gröfsen sind, aber für die Fälle, für welche man Gleichungen direct auflösen kann, also bis zum 4ten Grade, oder bis zu vier Paaren nahe gleicher imaginärer Wurzeln, wird man diese Auflösung fast mit derselben Leichtigkeit wie bei reellen Coefficienten machen. Es mögen hier noch die einfachen Formeln für die Auflösung einer solchen quadratischen Gleichungen mit imaginären Coefficienten folgen.

Die imaginären Coefficienten lassen sich leicht dividiren und multipliciren, wenn sie auf die Form $\lambda\cos\mu + \lambda\sin\mu\sqrt{-1}$ gebracht sind, weil

$$\frac{\lambda\cos\mu \pm \lambda\sin\mu\sqrt{-1}}{\lambda'\cos\mu' \pm \lambda'\sin\mu'\sqrt{-1}} = \frac{\lambda}{\lambda'}\{\cos(\mu-\mu') \pm \sin(\mu-\mu')\sqrt{-1}\}.$$

Man bringt also die gegebene Gleichung

$$0 = P(\cos Q + \sin Q\sqrt{-1}) + \varrho(\cos\psi + \sin\psi\sqrt{-1})\frac{\Delta x^0}{x^0} + \tfrac{1}{2}\varrho'(\cos\psi' + \sin\psi'\sqrt{-1})\left(\frac{\Delta x^0}{x^0}\right)^2$$

zuerst auf die Form

$$\left(\frac{\Delta x^0}{x^0}\right)^2 + \frac{2\varrho}{\varrho'}(\cos(\psi-\psi') + \sin(\psi-\psi')\sqrt{-1})\frac{\Delta x^0}{x^0} + \frac{2P}{\varrho'}(\cos(Q-\psi') + \sin(Q-\psi')\sqrt{-1}) = 0,$$

woraus

$$\frac{\Delta x^0}{x^0} = -\frac{\varrho(\cos(\psi-\psi') + \sin(\psi-\psi')\sqrt{-1})}{\varrho'} \pm \sqrt{\frac{\varrho^2(\cos 2(\psi-\psi') + \sin 2(\psi-\psi')\sqrt{-1}) - 2P\varrho'(\cos(Q-\psi') + \sin(Q-\psi')\sqrt{-1})}{\varrho'^2}}.$$

Setzt man jetzt, was immer erlaubt ist,

$$\delta^2\cos 2\gamma = \varrho^2\cos 2(\psi-\psi') - 2P\varrho'\cos(Q-\psi')$$
$$\delta^2\sin 2\gamma = \varrho^2\sin 2(\psi-\psi') - 2P\varrho'\sin(Q-\psi'),$$

so wird

$$\frac{\Delta x^0}{x^0} = -\frac{\varrho(\cos(\psi-\psi') + \sin(\psi-\psi')\sqrt{-1})}{\varrho} \pm \frac{\delta(\cos\gamma + \sin\gamma\sqrt{-1})}{\varrho'}.$$

Nun ist

$$\frac{\Delta x^0}{x^0} = \frac{\alpha - \alpha^0 + (\beta - \beta^0)\sqrt{-1}}{\alpha^0 + \beta^0\sqrt{-1}}.$$

Setzt man also

$$\alpha-\alpha^0 = l\cos L \qquad \beta-\beta^0 = l\sin L$$
$$\alpha^0 = r^0\cos\Phi \qquad \beta^0 = r^0\sin\Phi^0,$$

so wird

$$\frac{\Delta x^0}{x^0} = \frac{l}{r^0}\cos(L-\Phi^0)+\frac{l}{r^0}\sin(L-\Phi^0)\sqrt{-1},$$

folglich wird man erhalten

$$\frac{l}{r^0}\cos(L-\Phi^0) = -\frac{\varrho}{\varrho'}\cos(\psi-\psi')\pm\frac{\delta}{\varrho'}\cos\gamma$$
$$\frac{l}{r^0}\sin(L-\Phi^0) = -\frac{\varrho}{\varrho'}\sin(\psi-\psi')\pm\frac{\delta}{\varrho'}\sin\gamma.$$

Wenn man den wahren Werth von x durch

$$-r\cos\Phi-r\sin\Phi\sqrt{-1}$$

ausdrückt, so wird

$$r^0\cos\Phi^0+l\cos L = r\cos\Phi$$
$$r^0\sin\Phi^0+l\sin L = r\sin\Phi$$

oder

$$r^0+l\cos(L-\Phi^0) = r\cos(\Phi-\Phi^0)$$
$$l\sin(L-\Phi^0) = r\sin(\Phi-\Phi^0),$$

so dafs

$$\frac{r}{r^0}\cos(\Phi-\Phi^0) = 1-\frac{\varrho}{\varrho'}\cos(\psi-\psi')\pm\frac{\delta}{\varrho'}\cos\gamma$$
$$\frac{r}{r^0}\sin(\Phi-\Phi^0) = -\frac{\varrho}{\varrho'}\sin(\psi-\psi')\pm\frac{\delta}{\varrho'}\sin\gamma,$$

wobei die doppelten Vorzeichen so zu nehmen sind, dafs die obern zusammengehören und auch die untern.

Die sämtlichen Formeln für zwei Paare gleicher imaginärer Wurzeln sind also folgende:

Man bestimmt aus den Substitutionen von $(-r^0)^n\cos n\Phi$ für x^{0^n} und $(-r^0)^n\sin n\Phi$ für x^{0^n} die Werthe P, Q, ϱ, ψ, ϱ', ψ'. Dann setzt man

$$\delta^2\cos2\gamma = \varrho^2\cos2(\psi-\psi')-2P\varrho'\cos(Q-\psi')$$
$$\delta^2\sin2\gamma = \varrho^2\sin2(\psi-\psi')-2P\varrho'\sin(Q-\psi')$$

und hat sofort:

$$\frac{r}{r^0}\cos(\Phi-\Phi^0) = 1-\frac{\varrho}{\varrho'}\cos(\psi-\psi')\pm\frac{\delta}{\varrho'}\cos\gamma$$
$$\frac{r}{r^0}\sin(\Phi-\Phi^0) = -\frac{\varrho}{\varrho'}\sin(\psi-\psi')\pm\frac{\delta}{\varrho'}\sin\gamma.$$

Für den ersten Werth kann man bei der Kleinheit von $\Phi-\Phi^0$ meistentheils $\frac{r}{r^0}$ setzen, für den zweiten, weil $\frac{r}{r^0}$ nahe eins, den Werth $\Phi-\Phi^0$.

Man wird dann in den meisten Fällen schreiben können:

$$\frac{1}{M}\Delta\,\lg r^0 = -\frac{\varrho}{\varrho'}\cos(\psi-\psi') \pm \frac{\delta}{\varrho'}\cos\gamma$$

$$\Delta\varphi^0 \quad = -\frac{\varrho}{\varrho'}\sin(\psi-\psi') \pm \frac{\delta}{\varrho'}\sin\gamma.$$

In diesen Ausdrücken sind sowohl die für gleiche Wurzeln enthalten, für welche $Q = \psi = \psi' = 0$, als auch läfst sich aus ihnen die oben gegebene Bestimmung der verbesserten Werthe bei ungleichen Wurzeln herleiten. Es ist wegen des doppelten Vorzeichens $\pm$ gleichgültig, welchen Werth von γ man aus 2γ wählt, da es freisteht, sowohl γ als $180+\gamma$ zu nehmen. Für drei Paare gleicher imaginärer Wurzeln wird die Cardanische Formel sich ebenfalls ganz bequem gebrauchen lassen.

In dem hier Gegebenen ist die Auflösung der Aufgabe vollständig enthalten. Es kann kein Fall vorkommen, der sich nicht in aller Strenge durch die angegebenen Ausdrücke lösen liefse. Ungleiche Wurzeln, reell oder imaginär, trennen sich von selbst, und bei gleichen oder nahe gleichen Wurzeln sind leichte und strenge Mittel gegeben, von einem gemeinschaftlichen Näherungswerthe aus, entweder der völligen Gleichheit der Wurzeln sich zu versichern, oder die einzelnen Wurzeln selbst zu berechnen. Bei einem practischen Gegenstande wird es jetzt noch ein Interesse haben, an einigen Beispielen den Gang der Rechnung kennen zu lernen.

Als erstes Beispiel möge die Gleichung siebenten Grades dienen, wodurch nach Gaufs die Puncte auf einer gegebenen Abscissenlinie bestimmt werden, welche für die mechanische Quadratur das möglichst vortheilhafte Resultat geben, wenn man überhaupt nicht mehr als sieben Ordinaten anwenden will. Diese Gleichung heifst

$$x^7 - \frac{7}{2}x^6 + \frac{63}{13}x^5 - \frac{175}{52}x^4 + \frac{175}{143}x^3 - \frac{63}{286}x^2 + \frac{7}{429}x - \frac{1}{3432} = 0.$$

Sucht man hier zuerst die Logarithmen der Coefficienten auf, welchen die Zeichen ebenso wie den Zahlen vorgesetzt werden, so wird die Gleichung:

$$x^7 - 0{,}5440680x^6 + 0{,}6853971x^5 - 0{,}5270347x^4 + 0{,}0877020x^3 - 9{,}3429745x^2$$
$$+ 8{,}2126407x - 6{,}4644527 = 0.$$

Es ist für die Rechnung angenehmer, keine Logarithmen von Brüchen zu haben, weil man bei der Erhebung zu sehr hohen Potenzen immer dann beachten mufs, ob -10 oder -20, oder ein anderes Vielfaches von 10 von der Characteristik abgezogen werden mufs. Man lege deshalb zu

dem Logarithmen aller Coefficienten ein Vielfaches einer solchen Zahl hinzu, welche die Brüche wegschafft, und zwar zu dem Coefficienten von x^{n-r} das $r$fache dieser Zahl, so wird man alle Wurzeln mit einem bestimmten Factor multiplicirt erhalten. Kann man dabei bewirken, daſs $\alpha_n = 1$ wird' so wird die Rechnung etwas bequemer. Hier wird der Zweck erreicht, wenn man die Vielfachen von $\frac{10-6{,}4644527}{7} = 0{,}5050782$ hinzulegt. Die Gleichung wird dann

$$x^7 - 1{,}0491462x^6 + 1{,}6955535x^5 - 2{,}0422693x^4 + 2{,}1080148x^3 - 1{,}8683655x^2 + 1{,}2431099x - 0{,}0000001 = 0.$$

Bei dem Anfange der Rechnung zeigt sich hier sogleich, daſs man mehr als fünf Decimalen bei den ersten Erhebungen zu höhern Potenzen anwenden muſs. Denn es wird z. B.

$$\begin{aligned} \lg \alpha_3^2 &= +3{,}39111 \\ \lg -2\alpha_1\alpha_5 &= -3{,}39245 \\ \lg +2\alpha_6 &= +2{,}40904. \end{aligned}$$

Wenn aber die Differenz zweier Logarithmen so klein wie hier ist, nur 0,00134, so bewirkt nach den Gaufsischen Tafeln die Unsicherheit einer einzigen Einheit in der letzten, fünften Stelle schon einen Fehler von 330 Einheiten in dem Logarithmen der Differenz, so daſs sich das Resultat gar nicht verbürgen läſst. Man wird also die beiden ersten Erhebungen hier mit 7 Decimalstellen ausführen müssen, so wie es überhaupt vortheilhaft ist, die ersten Erhebungen möglichst genau zu machen. Die Fehler in denselben pflanzen sich zu beiden Seiten in vergröſsertem Maaſsstabe fort, besonders bei Gleichungen, wie diese, mit lauter reellen Wurzeln, in denen immer Subtractionen vorkommen. Man findet so:

Potenz der Wurzeln $= 2^1$

$$x^7 + 1{,}4180048x^6 + 2{,}3959870x^5 + 3{,}0189949x^4 + 3{,}2738401x^3 + 3{,}0739348x^2 + 2{,}2004297x + 0{,}0000002 = 0.$$

Potenz der Wurzeln $= 2^2$

$$x^7 + 2{,}2735725x^6 + 4{,}0410890x^5 + 5{,}3386202x^4 + 6{,}0534451x^3 + 5{,}9093643x^2 + 4{,}3578860x + 0{,}0000004 = 0.$$

Von hier an kann man mit fünf Decimalen rechnen, weil sich doch, des eben bemerkten Umstandes wegen, auch bei sieben Decimalen die letzten Stellen nicht verbürgen lassen werden. Die kleinen nöthigen Hülfs-

mittel, bei den grofsen Characteristiken eine Anzahl Einheiten erst wegzunehmen, und nach gemachter Addition und Subtraction wieder zuzulegen, wird jeder Rechner sich selbst machen. Schon von jetzt an sind die Producte der entfernter stehenden Coefficienten wenig merklich.

Potenz der Wurzeln $= 2^3$

$$x^7 + 4{,}12268x^6 + 7{,}61495x^5 + 10{,}36176x^4 + 11{,}96640x^3 + 11{,}78333x^2 + 8{,}71441x + 0{,}00000 = 0.$$

Potenz der Wurzeln $= 2^4$

$$x^7 + 7{,}97094x^6 + 15{,}03723x^5 + 20{,}65592x^4 + 23{,}91840x^3 + 23{,}56553x^2 + 17{,}42882x + 0{,}00000 = 0.$$

Potenz der Wurzeln $= 2^5$

$$x^7 + 15{,}81746x^6 + 30{,}04231x^5 + 41{,}30800x^4 + 47{,}83679x^3 + 47{,}13106x^2 + 34{,}85764x + 0{,}00000 = 0.$$

Potenz der Wurzeln $= 2^6$

$$x^7 + 31{,}61214x^6 + 60{,}08366x^5 + 82{,}61598x^4 + 95{,}67358x^3 + 94{,}26212x^2 + 69{,}71528x + 0{,}00000 = 0.$$

Potenz der Wurzeln $= 2^7$

$$x^7 + 63{,}22365x^6 + 120{,}16732x^5 + 165{,}23196x^4 + 191{,}34716x^3 + 188{,}52424x^2 + 139{,}43056x + 0{,}00000 = 0.$$

Hier wird die Rechnung geschlossen. Bei allen andern Coefficienten sind schon die neuen Werthe die reinen Quadrate der früheren, und auch bei α_1 wird $\alpha_1^2 - 2\alpha_2$ nicht mehr von α_1^2 sich unterscheiden. Es sind folglich alle Wurzeln reell, und wenn man die Logarithmen nach einander subtrahirt, so hat man

$\lg a^{128} = 63{,}22365$	$\lg a = 0{,}493935$
$\lg b^{128} = 56{,}94367$	$\lg b = 0{,}444872$
$\lg c^{128} = 45{,}06464$	$\lg c = 0{,}352067$
$\lg d^{128} = 26{,}11520$	$\lg d = 0{,}204025$
$\lg e^{128} = 125{,}17708 - 128{,}0$	$\lg e = 9{,}977946$
$\lg f^{128} = 78{,}90632 - 128{,}0$	$\lg f = 9{,}616456$
$\lg g^{128} = 116{,}56944 - 256{,}0$	$\lg g = 8{,}910699$

Zieht man von diesen Wurzeln den oben hinzugefügten Logarithmen 0,5050782 ab, so hat man die wahren Wurzeln der gegebenen Gleichung

$$\lg a = 9{,}98886$$
$$\lg b = 9{,}93979$$
$$\lg c = 9{,}84699$$
$$\lg d = 9{,}69895$$
$$\lg e = 9{,}47287$$
$$\lg f = 9{,}11138$$
$$\lg g = 8{,}40562$$

Werden die negativen Werthe dieser Wurzeln, um ihre Zeichen kennen zu lernen und sie zu verbessern, in die Gleichung substituirt, so zeigt sich, dafs sie keinen Fehler geben, der auch noch bei einer Rechnung mit sieben Decimalen bemerkt werden könnte. So z. B. findet man für $\lg b = 9{,}9397900$

$x^7 = +0{,}3789047$	$7x^7 = +\ 2{,}6523329$
$\alpha_1 x^6 = -1{,}5233790$	$6\alpha_1 x^6 = -\ 9{,}1402740$
$\alpha_2 x^5 = +2{,}4229648$	$5\alpha_2 x^5 = +12{,}1148240$
$\alpha_3 x^4 = -1{,}9328347$	$4\alpha_3 x^4 = -\ 7{,}7313388$
$\alpha_4 x^3 = +0{,}8073689$	$3\alpha_4 x^3 = +\ 2{,}4221067$
$\alpha_5 x^2 = -0{,}1669377$	$2\alpha_5 x^2 = -\ 0{,}3338754$
$\alpha_6 x = +0{,}0142047$	$\alpha_6 x = +\ 0{,}0142047$
$\alpha_7 = -0{,}0002914$	$x^0 \frac{dfx^0}{dx^0} = -\ 0{,}0020199$
$fx^0 = +0{,}0000003$	

Es würde folglich

$$\frac{1}{M} \Delta \lg x^0 = \frac{-0{,}0000003}{-0{,}0020199},$$

wenn überhaupt der Werth von fx^0 verbürgt werden könnte, was hier keinesweges der Fall ist, da 3 die achte bedeutende Ziffer ist in den Zahlen, aus denen fx^0 gebildet wird, während schon die siebente ungewifs sein mufs. Will man also hier die Logarithmen der Wurzeln verbessern, so mufs man bei der Substitution Logarithmen von 10 Decimalen anwenden oder unmittelbar substituiren, eine Mühe, die hier unnöthig scheint, da Gaufs die Wurzeln bis auf 16 Decimalen gegeben hat, so dafs man den strengen Werth mit dem gefundenen genäherten vergleichen kann. Die Logarithmen der wahren Wurzeln und die Unterschiede von der eben gefundenen ersten Näherung sind:

lg a = 9,98881	Unterschied	0,00005
b = 9,93990	„	0,00011
c = 9,84691	„	0,00008
d = 9,69897	„	0,00002
e = 9,47287	„	0,00000
f = 9,11138	„	0,00000
g = 8,40562	„	0,00000

Die Wurzeln (nach meiner Benennung) sind alle negativ. Obgleich diese Unterschiede für die erste Näherung sämtlich höchst unbedeutend sind, der gröfste $= \frac{1}{4000}$ des Ganzen, so sieht man doch, dafs sie im Grunde blofs von dem bemerkten Umstande bei α_2 in der ersten Potenzirung herrühren. Ich habe dieses Beispiel als das ungünstigste unter den mir bekannten bei der ersten Näherung gewählt, wie überhaupt die Lage von sieben reellen Wurzeln, sämtlich zwischen 9 und 1, bei jeder Methode, wegen der Nothwendigkeit, mit gröfserer Genauigkeit, als man sonst bei den ersten Versuchen zu thun pflegt, zu substituiren, die Lösung erschwert haben würde. Die Vergröfserung der Wurzeln allein würde bei keiner Methode wesentlich zur Erleichterung beigetragen haben. Hätte man übrigens, wozu aber kein Grund vorhanden war, dem oben gefundenen Werthe von fx^0 trauen wollen, so würde man erhalten haben

$$\Delta \lg \text{brigg.}\, x^0 = +0{,}000065,$$

wodurch man der Wahrheit näher gekommen wäre. Ein Zeichen, dafs die Uebereinstimmung der ersten Näherung nicht blofs zufällig war.

Als zweites Beispiel kann die höchste Gleichung dienen, welche **Fourier** in seinem vortrefflichen Werke pag. 111 unter den Beispielen aufführt:

$$x^7 - 2x^5 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6 = 0.$$

Potenz der Wurzeln $= 2^1$

$$x^7 + 4x^6 - 2x^5 - 2x^4 + 29x^3 - 14x^2 - 23x + 36 = 0.$$

Potenz der Wurzeln $= 2^2$

$$x^7 + 20x^6 + 78x^5 + 54x^4 + 589x^3 + 1386x^2 + 1537x + 1296 = 0;$$

oder, um von jetzt an Logarithmen zu gebrauchen:

$$x^7 + 1{,}30103x^6 + 1{,}89209x^5 + 1{,}73239x^4 + 2{,}77012x^3 + 3{,}14176x^2$$
$$+ 3{,}18667x + 3{,}11261 = 0.$$

Potenz der Wurzeln $= 2^3$

$$x^7 + 2{,}38739x^6 + 3{,}70774x^5 - 4{,}56350x^4 + 5{,}58565x^3 + 5{,}39859x^2 - 6{,}08996x + 6{,}22522 = 0.$$

Die Minuszeichen in der zweiten Gleichung zeigten schon an, dafs imaginäre Wurzeln vorhanden seien. In der letzten Gleichung kann man aus dem Orte der Minuszeichen mit Sicherheit schliefsen, dafs der Coefficient von x^3 einen Modul, und das bekannte Glied einen zweiten Modul geben wird.

Potenz der Wurzeln $= 2^4$

$$x^7 + 4{,}69313x^6 + 7{,}64995x^5 - 9{,}39198x^4 + 11{,}18557x^3 + 11{,}94810x^2 + 11{,}82750x + 12{,}45044 = 0.$$

Potenz der Wurzeln $= 2^5$

$$x^7 + 9{,}37002x^6 + 15{,}34998x^5 - 18{,}87658x^4 + 22{,}44623x^3 + 23{,}75387x^2 - 24{,}65849x + 24{,}90088 = 0.$$

Potenz der Wurzeln $= 2^6$

$$x^7 + 18{,}73971x^6 + 30{,}70300x^5 - 37{,}83535x^4 + 44{,}89718x^3 + 47{,}76037x^2 + 49{,}06887x + 49{,}80176 = 0.$$

Potenz der Wurzeln $= 2^7$

$$x^7 + 37{,}47942x^6 + 61{,}40601x^5 - 75{,}51594x^4 + 89{,}79441x^3 + 95{,}49582x^2 + 97{,}80854x + 99{,}60352 = 0.$$

Potenz der Wurzeln $= 2^8$

$$x^7 + 74{,}95884x^6 + 122{,}81202x^5 - 151{,}32153x^4 + 179{,}58882x^3 + 190{,}99129x^2 + 195{,}21132x + 199{,}20704 = 0.$$

Hier schliefst die Rechnung, da alle Coefficienten, mit Ausnahme zweier, zu imaginären Wurzeln gehöriger, welche durch die Minuszeichen angedeutet waren, reine Quadrate sind und im Fortgange der Rechnung keine Veränderung würden erleiden können. Zieht man jeden vorhergehenden Coefficienten von dem folgenden ab, so geben die Verbindungen der Coefficienten von

x^7 und x^6	$\lg a^{256} = 74{,}95884$	$\lg a = 0{,}292808$
x^6 und x^5	$\lg b^{256} = 47{,}85318$	$\lg b = 0{,}186927$
x^5 und x^4	unbestimmt	
x^5 und x^3	$\lg g^{512} = 56{,}77680$	$\lg g^2 = 0{,}221785$
x^3 und x^2	$\lg c^{256} = 11{,}40247$	$\lg c = 0{,}044541$
x^2 und x	unbestimmt	
x^2 und x^0	$\lg g'^{512} = 8{,}21575$	$\lg g'^2 = 0{,}032093.$

Da hier nur zwei Paare imaginärer Wurzeln sind, so kann man die beiden in Bezug auf f linearen Gleichungen, die sich aus α_1 und α_6 ergeben, anwenden. Hiezu ist es aber erforderlich, erst des Zeichens von a, b, c sich zu versichern. Eine beiläufige Substitution zeigt, dafs a positiv ist, b negativ und c negativ. Denn es geben z. B. bei c, wenn man $\lg x = -0{,}044541$ (oder negativ) substituirt, die ungeraden Potenzen x^7, x^5, x^3, x den Werth der aus ihnen erhaltenen Summe

$$= +10{,}9106$$

und die geraden Potenzen x^4, x^2 und x^0 den Werth der aus ihnen erhaltenen Summe $= +10{,}9106$.

Es mufs folglich ein positiver Werth von x substituirt werden, oder c negativ genommen. Die beiden linearen Gleichungen sind

$$a+b+c+f+f' = \alpha_1 = 0$$

$$g^2g'^2(ab+ac+bc)+abcg^2f'+abcg'^2f = \alpha_6 = -5,$$

welche in Zahlen ausgedrückt werden

$$f+f' = +0{,}68341$$

$$3{,}60055f+5{,}57264f' = +1{,}25927,$$

woraus man erhält

$$f = +1{,}29258 \qquad f' = -0{,}60917.$$

Die erste Näherung giebt daher die Gleichung als das Product der Factoren

$$(x+1{,}96249)(x-1{,}53790)(x-1{,}10800)(x^2+1{,}29258x+1{,}66642)\times$$
$$(x^2-0{,}60917x+1{,}07669).$$

Will man diese Werthe verbessern, z. B. den ersten der beiden trinomischen Factoren, so findet sich für ihn

$$\lg r_1^0 = 0{,}11089 \qquad \varphi^0 = 59^\circ\,57'\,25{,}''3.$$

Der leichteren Rechnung wegen nehme man aber φ^0 in runden Zehnern von Secunden, etwa

$$\varphi^0 = 59^\circ\,57'\,20''.$$

Man erhält damit

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl}
-r^{0^7}\cos 7\varphi^0 &=& -3{,}0148035 & -7r^{0^7}\cos 7\varphi^0 &=& -21{,}1036245\\
-\alpha_2 r^{0^5}\cos 5\varphi^0 &=& +3{,}5605688 & -5\alpha_2 r^{0^5}\cos 5\varphi^0 &=& +17{,}8028440\\
-\alpha_4 r^{0^3}\cos 3\varphi^0 &=& -6{,}4534218 & -3\alpha_4 r^{0^3}\cos 3\varphi^0 &=& -19{,}3602654\\
+\alpha_5 r^{0^2}\cos 2\varphi^0 &=& -3{,}3238460 & +2\alpha_5 r^{0^2}\cos 2\varphi^0 &=& -\ \ 6{,}6476920\\
-\alpha_6 r^0\cos\varphi^0 &=& +3{,}2310655 & -\ \ \alpha_6 r^0\cos\varphi^0 &=& +\ \ 3{,}2315655\\
\text{bek. Glied} \ldots &=& +6{,}0 & [n(-r^0)^n\cos n\varphi^0] &=& -26{,}0771724\\
[(-r^0)^n\cos n\varphi^0] &=& +0{,}0000630 & & &
\end{array}$$

ferner

$$-r^{0^7}\sin 7\Phi^0 = -5{,}1569226 \qquad -7r^{0^7}\sin 7\Phi^0 = -36{,}0984582$$
$$-\alpha_2 r^{0^5}\sin 5\Phi^0 = -6{,}2226992 \qquad -5\alpha_2 r^{0^5}\sin 5\Phi^0 = -31{,}1134960$$
$$-\alpha_4 r^{0^3}\sin 3\Phi^0 = +0{,}0150177 \qquad -3\alpha_4 r^{0^3}\sin 3\Phi^0 = +\ 0{,}0450531$$
$$+\alpha_5 r^{0^2}\sin 2\Phi^0 = +5{,}7777520 \qquad +2\alpha_5 r^{0^2}\sin 2\Phi^0 = +11{,}5555040$$
$$-\alpha_6 r^0\ \sin\ \Phi^0 = +5{,}5872230 \qquad -\ \alpha_6 r^0\ \sin\ \Phi^0 = +\ 5{,}5872230$$
$$[(-r^0)^n \sin n\Phi^0] = +0{,}0003709 \qquad [n(-r^0)^n \sin n\Phi^0] = -50{,}0241741.$$

Hieraus folgt dann weiter:

$$\lg P = 6{,}575433 \qquad \lg \varrho = 1{,}751380$$
$$Q = 80^\circ\, 21'\, 35{,}''7 \qquad \psi = 242^\circ\, 28'\, 2{,}''5$$

und damit

$$\Delta \log r^0 = +0{,}0000027._{56} \qquad \Delta\Phi^0 = +0{,}''42$$

so dafs $\log g = 0{,}1108927._{56}$ $\qquad \Phi = 59^\circ\, 57'\, 20{,}''42.$

Auf ähnliche Art wird g' und Φ' genauer gefunden und für die reellen Wurzeln hat man z. B. für a

$$\lg a^0 = 0{,}292808$$

$$-a^{0^7} = -112{,}112997 \qquad -7a^{0^7} = -784{,}790979$$
$$-\alpha_2 a^{0^5} = +\ 58{,}219704 \qquad -5\alpha_2 a^{0^5} = +291{,}098520$$
$$-\alpha_4 a^{0^3} = +\ 22{,}674894 \qquad -3\alpha_4 a^{0^3} = +\ 68{,}024682$$
$$-\alpha_5 a^{0^2} = +\ 15{,}405508 \qquad +2\alpha_5 a^{0^2} = +\ 30{,}811016$$
$$-\alpha_6 a^0 = +\ 9{,}812460 \qquad -\ \alpha_6 a^0 = +\ 9{,}812460$$
$$\text{bek. Glied} = +\ 6{,}0 \qquad [n(-^0)a^n] = -385{,}044301$$
$$[(-a^0)^n] = -\ 0{,}000431,$$

woraus $\Delta \lg a^0 = -0{,}0000005$ $\qquad \lg a = 0{,}2928075.$

Die Verbesserung jedes einzelnen Werthes, isolirt für sich, giebt zuletzt die Factoren der Gleichung:

$$\{x^2 - 0{,}6092132x + 1{,}0766801\}\ \{x^2 + 1{,}2926302x + 1{,}6664238\} \times$$
$$\{x + 1{,}9624901\}\ \{x - 1{,}5378905\}\ \{x - 1{,}1080166\},$$

welche, da jeder für sich gefunden ist, die Prüfung der Rechnung gewähren, dafs sein mufs:

$$a + b + c + f + f' = \alpha_1 = 0.$$

Die Werthe der ersten Näherung sind in diesem Beispiel so nahe der Wahrheit, wie man es für fünfstellige Logarithmen kaum erwarten durfte.

Als drittes Beispiel einer Gleichung mit mehr als vier imaginären Wurzeln kann die Gleichung dienen

$$x^7 + 3x^4 + 6 = 0$$

Potenz der Wurzeln $= 2^1$

$$x^7 + 9x^4 + 36x^2 + 36 = 0.$$

Potenz der Wurzeln $= 2^2$

$$x^7 + 81x^4 - 648x^3 + 1944x^2 - 2592x + 1296 = 0.$$

Potenz der Wurzeln $= 2^3$

$$x^7 - 1296x^5 + 11745x^4 + 104976x^3 + 629856x^2 + 1679616x + 1679616 = 0.$$

Von hier an Logarithmen:

Potenz der Wurzeln $= 2^4$

$$x^7 + 3{,}41364x^6 + 6{,}27636x^5 + 8{,}60926x^4 - 9{,}91005x^3 + 10{,}92186x^2 + 11{,}84836x + 12{,}45042 = 0.$$

Potenz der Wurzeln $= 2^5$

$$x^7 + 6{,}46828x^6 + 12{,}16012x^5 + 17{,}29346x^4 + 17{,}89851x^3 + 22{,}31679x^2 + 22{,}41671x + 24{,}90084 = 0.$$

Potenz der Wurzeln $= 2^6$

$$x^7 + 12{,}75961x^6 + 23{,}97079x^5 + 34{,}58689x^4 - 39{,}91125x^3 + 44{,}63668x^2 - 47{,}51776x + 49{,}80168 = 0.$$

Potenz der Wurzeln $= 2^7$

$$x^7 + 25{,}49393x^6 + 47{,}63345x^5 + 69{,}17378x^4 + 79{,}51832x^3 + 89{,}26074x^2 + 94{,}72953x + 99{,}60336 = 0.$$

Potenz der Wurzeln $= 2^8$

$$x^7 + 50{,}98747x^6 + 94{,}96298x^5 + 138{,}34756x^4 + 158{,}73567x^3 + 178{,}52144x^2 + 189{,}15081x + 199{,}20672 = 0.$$

Hier wird die Rechnung geschlossen, weil die Coefficienten von x^6, x^4, x^2 und das bekannte Glied reine Quadrate bleiben. Die negativen Coefficienten von x^3 und x in der 6ten abgeleiteten Gleichung, zeigen, dafs die Coefficienten, die auf sie folgen, zwei Moduln bestimmen werden. Auch der Coefficient von x^5 ist in der dritten abgeleiteten Gleichung negativ. Es ist deshalb sehr wahrscheinlich, dafs auch der Coefficient von x^4 einen

Modul bestimmt. Die erste Wurzel ist reell. Aus der successiven Division erhält man

$$\begin{array}{llll} \lg a^{256} & = 50{,}98747 & \lg a & = 0{,}199170 \\ \lg g^{512} & = 87{,}36009 & \lg g^{2} & = 0{,}341250 \\ \lg g'^{512} & = 40{,}17388 & \lg g'^{2} & = 0{,}156929 \\ \lg g''^{512} & = 20{,}68528 & \lg g''^{2} & = 0{,}080802. \end{array}$$

Um die zu den verschiedenen g gehörigen f zu finden, wird die Gleichung zu einer vom achten Grade gemacht. Es ist dann

$$\alpha_1 = 0,\quad \alpha_2 = 0,\quad \alpha_3 = 3,\quad \alpha_4 = 0,\quad \alpha_5 = 0,\quad \alpha_6 = 0,\quad \alpha_7 = 6,\quad \alpha_8 = 0,$$

womit die β und γ werden

$$\beta = 1,\quad \beta_1 = \quad 6r^{-6},\quad \beta_2 = 0,\quad \beta_3 = 3,\quad \beta_4 = 0,$$
$$\gamma = 1,\quad \gamma_1 = -6r^{-6},\quad \gamma_2 = 0,\quad \gamma_3 = 3.$$

Die beiden Gleichungen für t werden also

$$0 = t^4 - 6r^{-6}t^3 - 4r^2t^2 + (18r^{-4} - 3)t + 2r^4$$
$$0 = t^3 + 6r^{-6}t^2 - 2r^2t - (6r^{-4} + 3).$$

Wird hier zuerst $\lg r^2 = 0{,}34125$ substituirt, und die Coefficienten logarithmisch mit vorgesetztem Zeichen geschrieben, so stellt sich die Division beider Gleichungen in einander so:

$$\begin{array}{l} 0 = t^4 - 9{,}75440\,t^3 - 0{,}94331\,t^2 + 9{,}86872\,t + 0{,}98353 \\ 0 = t^3 + 9{,}75440\,t^2 - 0{,}64228\,t - 0{,}62802 \\ \lg B \ldots\ldots\; 0{,}30103 \qquad 0{,}30103 \qquad 0{,}06969 \\ \hline \quad - 0{,}05543\,t^3 - 0{,}64228\,t^2 + 0{,}69771\,t + 0{,}98353 \\ 0 = t^3 + 0{,}58685\,t^2 - 0{,}64288\,t - 0{,}92810 \\ \lg B' \ldots\ldots\; 0{,}06909 \qquad \infty \qquad 0{,}30198 \\ \hline \quad - 0{,}51776\,t^2 \ldots\ldots\ldots\, t + 0{,}62612 \\ 0 = t^2 \ldots\ldots\ldots\, t - 0{,}10836 \\ \lg B'' \ldots\ldots\; 0{,}00000 \qquad 0{,}15026 \\ \hline \quad + 0{,}58685\,t^2 - 0{,}49202\,t - 0{,}92810 \\ 0 = t^2 - 9{,}90517\,t - 0{,}34125 \\ \lg B''' \ldots\ldots\; 0{,}00000 \qquad 0{,}38189 \\ \hline \quad + 9{,}90517\,t + 9{,}95936 \\ 0 = t + 0{,}05419. \end{array}$$

Die Uebereinstimmung dieses letzten Werthes von t mit einer Wurzel der Gleichung $0 = t^2 - 0{,}10836$ zeigt, dass die Annahme eines posi-

tiven r^2 richtig ist. Bei der Einfachheit der Coefficienten in den beiden Gleichungen, welche durch $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 = \alpha_8 = 0$ herbeigeführt ist, kann man auch die Gleichungen unmittelbar in einander dividiren, wodurch man erhält:

$$0 = t + \frac{3r^{12}}{r^{14} + 18r^4 - 36}.$$

Substituirt man hier $\lg g'^2 = 0{,}15693$ und $\lg g''^2 = 0{,}08080$, so erhält man die logarithmischen Werthe:

$$0 = f' + 0{,}28435 \qquad 0 = f'' - 0{,}16895.$$

Es sind folglich die Factoren aus der ersten Näherung:

$$0 = (x + 1{,}58186)(x^2 - 1{,}13289x + 2{,}19405)$$
$$(x^2 - 1{,}92464\,dx + 1{,}43527)\ (x^2 + 1{,}47553x + 1{,}20447).$$

Die durch eine Rechnung mit 7 Decimalen gefundenen verbesserten Werthe sind:

$$0 = (x + 1{,}5818592)\ (x^2 - 1{,}1328854x + 2{,}1940798)$$
$$(x^2 - 1{,}9246556x + 1{,}4352554)\ (x^2 + 1{,}4756817x + 1{,}2044862).$$

Als letztes Beispiel endlich einer Trennung gleicher, oder nahe gleicher, reeller oder imaginärer Wurzeln möge die Gleichung dienen:

$$0 = x^4 + 4{,}002x^3 + 14{,}01801x^2 + 20{,}03802x + 25{,}07005.$$

Bei jeder ersten Näherung wird man geneigt sein, die rechte Seite der Gleichung für ein vollständiges Quadrat zu halten. Denn es ist

$$\{x^2 + 2{,}001x + 5{,}007\}^2 = x^4 + 4{,}002x^3 + 14{,}018001x^2 + 20{,}038014x$$
$$+ 25{,}070049,$$

welcher Werth sich von der rechten Seite der Gleichung nur in der fünften Decimalstelle erst unterscheidet. Es würde sonach eine sehr weitläufige Rechnung werden, wenn man durch Potenzirung der Wurzeln die einzelnen Wurzeln oder Moduln trennen wollte. Angenommen daher, man habe nach 6 oder 7 Operationen die Ueberzeugung gewonnen, dafs hier zwei einander sehr nahe stehende trinomische Factoren stattfinden, so würde man als erste Näherung annehmen

$$g^2 = g'^2 = 5{,}007 \qquad f = f' = 2{,}001$$

und daraus

$$\lg r^0 = 0{,}3497888 \qquad \varphi^0 = 63^\circ\, 26'\, 26{,}''4.$$

Der leichteren Rechnung wegen nehme man

$$\lg r^0 = 0{,}3498000 \qquad \varphi^0 = 63^\circ\, 26'\, 20'',$$

so giebt die Substitution bei Logarithmen von 10 Decimalen, die hier nöthig sind:

$+r^{0\,4}\cos 4\Phi^0 = -\ 7{,}0137170573$	$4r^{0\,4}\cos 4\Phi^0 = -\ 28{,}0548682292$
$-\alpha_1 r^{0\,3}\cos 3\Phi^0 = +44{,}1162372122$	$-3\alpha_1 r^{0\,3}\cos 3\Phi^0 = +132{,}3487116366$
$+\alpha_2 r^{0\,2}\cos 2\Phi^0 = -42{,}1228012449$	$+2\alpha_2 r^{0\,2}\cos 2\Phi^0 = -\ 84{,}2456024898$
$-\alpha_3 r^{0}\cos \Phi^0 = -20{,}0498010266$	$-\ \alpha_3 r^{0}\cos \Phi^0 = -\ 20{,}0498010266$
$+25{,}07005$	$[n(-r^0)^n \cos n\Phi^0] = -\ 0{,}0015601090$
$[(-r^0)^n \cos n\Phi^0] = -\ 0{,}0000321166$	
$+r^{0\,4}\sin 4\Phi^0 = -24{,}0716609670$	$4r^{0\,4}\sin 4\Phi^0 = -\ 96{,}2866438680$
$-\alpha_1 r^{0\,3}\sin 3\Phi^0 = +\ 8{,}0305364993$	$-3\alpha_1 r^{0\,3}\sin 3\Phi^0 = +\ 24{,}0916094979$
$+\alpha_2 r^{0\,2}\sin 2\Phi^0 = +56{,}1476453709$	$+2\alpha_2 r^{0\,2}\sin 2\Phi^0 = +112{,}2952907418$
$-\alpha_3 r^{0}\sin \Phi^0 = -40{,}1064968325$	$-\ \alpha_3 r^{0}\sin \Phi^0 = -\ 40{,}1064968325$
$[(-r^0)^n \sin n\Phi^0] = +\ 0{,}0000240707$	$[n(-r^0)^n \sin n\Phi^0] = -\ 0{,}0062404608$

Wegen der Gleichheit der Wurzeln mufs hier noch hinzugefügt werden

$$
\begin{aligned}
3.4\,r^{0\,4}\cos 4\Phi^0 &= -\ 84{,}1646047\\
-2.3\,\alpha_1 r^{0\,3}\cos 3\Phi^0 &= +264{,}6974233\\
+1.2\,\alpha_2 r^{0\,2}\cos 2\Phi^0 &= -\ 84{,}2456025\\
[n(n-1)(-r^0)^n]\cos n\Phi^0] &= +\ 96{,}2872161\\
3.4\,r^0\sin 4\Phi^0 &= -288{,}8599316\\
-2.3\,\alpha_1 r^{0\,3}\sin 3\Phi^0 &= +\ 48{,}1832190\\
+1.2\,\alpha_2 r^{0\,2}\sin 2\Phi^0 &= +122{,}2952907\\
[n(n-1)(-r^0)^n]\sin n\Phi^0] &= -128{,}3814219.
\end{aligned}
$$

Aus diesen Werthen ergiebt sich

$$
\begin{aligned}
\lg P &= 5{,}603531 & \Omega &= 143^0\ 8'\ 57{,}''0\\
\lg \varrho &= 7{,}808380 & \psi &= 255\ 57\ 49{,}7\\
\lg \varrho' &= 2{,}205414 & \psi' &= 306\ 52\ 13{,}0,
\end{aligned}
$$

woraus weiter folgt

$$\lg \delta = 9{,}054660 \qquad \gamma = 8^0\, 3'\, 29{,}''35$$

und dann

$$\frac{r}{r^0} = 1 - 0{,}000025276 \pm 0{,}000699739$$

$$\Phi - \Phi^0 = +6{,}''417 \qquad \pm 20{,}''434.$$

Man hat folglich folgende zusammengehörige Werthe

$$
\begin{aligned}
\lg g &= 0{,}3500928 & \Phi &= 63^0\, 26'\, 46{,}''85\\
\lg g' &= 0{,}3494850 & \Phi' &= 63^0\, 26'\, 5{,}''98
\end{aligned}
$$

und wenn man hieraus die Factoren der Gleichung bildet, so erhält man:

$$(x+1,0010021+2,0030005\sqrt{-1})(x+1,0010021-2,0030005\sqrt{-1})$$
$$(x+0,9999979+2,0000009\sqrt{-1})(x+0,9999979-2,0000009\sqrt{-1}).$$

Die Factoren, aus denen sie wirklich gebildet ist, sind

$$(x+1,1001\pm 2,003\sqrt{-1})(x+1,000\pm 2,000\sqrt{-1})$$

und die kleinen Unterschiede der berechneten Werthe rühren nur davon her, wie die obigen Zahlen ausweisen, dafs auch mit Logarithmen von 10 Decimalen die letzten 3 Decimalstellen in fx^0 sich nicht mehr verbürgen lassen. Es sind nämlich die wahren Werthe

$$\lg g = 0,3500926 \qquad \Phi = 63^0\,26'\,47'',01$$
$$\lg g' = 0,3494850 \qquad \Phi' = 63^0\,26'\;\;5'',82$$

von welchen die Winkel um 0'',16, die Logarithmen der Moduln um 2 Einheiten der letzten Decimale bei dem ersten abweichend, bei dem zweiten völlig übereinstimmend gefunden sind.

Wollte man die früher erwähnte Auflösung der biquadratischen Gleichung hier anwenden, so wird die cubische Gleichung zur Bestimmung von y

$$y^3-14,01801\,y^2-20,08804396\,y+602,6845798014 = 0,$$

deren drei reelle Wurzeln sind:

$$(y-10,01401)(y-10,014)(y+6,01) = 0,$$

denn es ist, wenn man sie der Reihe nach mit a, b, c bezeichnet,

$$\begin{aligned} a+b+c &= -\;14,01801 \\ ab &= +100,28029614 \\ ac &= -\;60,18420010 \\ bc &= -\;60,18414000 \\ ab+ac+bc &= -\;20,088043960 \\ abc &= +602,6845798014. \end{aligned}$$

Der einzige Werth von $y = +10,01401$ macht $\sqrt{(y^2-4\alpha_4)}$ zu einer reellen Gröfse nämlich $= 0,01401$. Es wird folglich

$$v = \tfrac{1}{2}\{+10,01401+0,01401\} = +5,01401$$
$$v' = \tfrac{1}{2}\{+10,01401-0,01401\} = +5,00000$$

und wegen

$$\alpha_1 y-2\alpha_3 = +0,00002802$$
$$t = \tfrac{1}{2}\{4,002+0,002\} = +2,002$$
$$t' = \tfrac{1}{2}\{4,002-0,002\} = +2,000,$$

so dafs die trinomischen Factoren werden

$$\{x^2 + 2{,}002\,x + 5{,}01401\}\{x^2 + 2\,x + 5\} = 0,$$

wie sie ursprünglich vorausgesetzt waren. Der Werth $y = +10{,}014$ würde gegeben haben

$$v = 5{,}007 + 0{,}001\sqrt{-1}$$
$$v' = 5{,}007 - 0{,}001\sqrt{-1}$$
$$t = 2{,}001 + 0{,}003\sqrt{-1}$$
$$t' = 2{,}001 - 0{,}003\sqrt{-1}$$

und der Werth $y = -6{,}01$

$$v = -3{,}005 + 4{,}005\sqrt{-1}$$
$$v' = -3{,}005 - 4{,}005\sqrt{-1}$$
$$t = +2{,}001 + 4{,}003\sqrt{-1}$$
$$t' = +2{,}001 - 4{,}003\sqrt{-1}.$$

1.

Um die Aufgabe übersichtlich vor Augen zu haben, wird erst in wenigen Worten die Entwicklung der allgemeinen Reihe selbst hergesetzt werden müssen.

Es sei Fx eine beliebige Function der veränderlichen Gröfse x und $x+k=a$ eine constante Gröfse, so, dafs also, wenn z. B. x um α zunimmt, k um α abnimmt.

Nun ist, identisch,

$$1.\quad F(x+k) = Fx + k\,\frac{F(x+k)-Fx}{k},$$

oder, wenn man der Kürze wegen

$$2.\quad \frac{F(x+k)-Fx}{k} = fx$$

setzt, was geschehen kann, da k mit x zugleich veränderlich und also $\frac{F(x+k)-Fx}{k}$ eigentlich nur eine Function von x, nemlich $\frac{Fa-Fx}{a-x}$ ist:

$$3.\quad F(x+k) = Fx + kfx.$$

Verändert sich nun x um $+\alpha$ und folglich k um $-\alpha$, so erhält man, wenn man in (3.) $x+\alpha$ statt x und $k-\alpha$ statt k setzt und von dem Resultate die unveränderte Gröfse wieder abzieht,

$$0 = F(x+\alpha) - Fx + (k-\alpha)\,f(x+\alpha) - kfx, \text{ oder auch}$$

$$4.\quad 0 = F(x+\alpha) - Fx + (k-\alpha)(f(x+\alpha) - fx) - \alpha fx.$$

Bezeichnet man die erste Differenz einer Gröfse, nach α genommen, durch ein davorgesetztes Δ, so läfst sich (4.) wie folgt schreiben:

$$5.\quad 0 = \Delta Fx + (k-\alpha)\Delta fx - \alpha fx.$$

Setzt man hierin von Neuem $x+\alpha$ statt x, also $k-\alpha$ statt k und zieht von dem Resultate die vorige Gröfse ab, so ergiebt sich

$$0 = \Delta F(x+\alpha) - \Delta Fx + (k-2\alpha)\Delta f(x+\alpha) - \alpha f(x+\alpha) - (k-\alpha)\Delta fx + \alpha fx$$

oder

$$6.\quad 0 = \Delta^2 Fx + (k-2\alpha)\Delta^2 fx - 2\alpha\Delta fx.$$

Die abermalige Wiederholung des Verfahrens giebt:

$$0 = \Delta^2 F(x+\alpha) - \Delta^2 Fx + (k-3\alpha)\Delta^2 f(x+\alpha) - 2\alpha\Delta f(x+\alpha)$$
$$-(k-2\alpha)\Delta^2 fx + 2\alpha\Delta fx$$

oder

$$7.\quad 0 = \Delta^3 Fx + (k-3\alpha)\Delta^3 fx - 3\alpha\Delta^2 fx;$$

und so weiter.

Zusammengenommen erhält man also folgende Ausdrücke:

$$8.\quad\begin{cases} F(x+k) = Fx + kfx, \quad (3.)\\ fx = \frac{\Delta Fx}{a} + (k-a)\frac{\Delta fx}{a}, \quad (5.)\\ \Delta fx = \frac{\Delta^2 Fx}{2a} + (k-2a)\frac{\Delta^2 fx}{2a}, \quad (6.)\\ \Delta^2 fx = \frac{\Delta^3 Fx}{3a} + (k-3a)\frac{\Delta^3 fx}{3a}, \quad (7.)\\ \Delta^3 fx = \frac{\Delta^4 Fx}{4a} + (k-4a)\frac{\Delta^4 fx}{4a},\\ \dots\dots\dots\dots\dots\\ \Delta^{n-2} fx = \frac{\Delta^{n-1} Fx}{(n-1)a} + (k-(n-1)a)\frac{\Delta^{n-1} fx}{(n-1)a},\\ \Delta^{n-1} fx = \frac{\Delta^n Fx}{na} + (k-na)\frac{\Delta^n fx}{na}. \end{cases}$$

Substituirt man diese Ausdrücke in einander, so erhält man:

$$9.\quad F(x+k) = Fx + k\frac{\Delta Fx}{a} + \frac{k.k-a}{2}.\frac{\Delta^2 Fx}{a^2} + \frac{k.k-a.k-2a}{2.3}.\frac{\Delta^3 Fx}{a^3}\dots\dots$$
$$+\frac{k.k-a.k-2a\dots\dots k-(n-1)a}{2.3\dots\dots n}.\frac{\Delta^n Fx}{a^n}$$
$$+\frac{k.k-a.k-2a\dots\dots k-na}{2.3\dots\dots n}.\frac{\Delta^n fx}{a^n};$$

welches die allgemeine Taylorsche Reihe mit Differenz-Coefficienten ist, die also in der höchsten Allgemeinheit und ohne irgend etwas vorauszusetzen, Statt findet.

Das letzte Glied rechter Hand in (9.) ist der *Rest* der Reihe, der auf die vorhergehenden $n+1$ Glieder folgt. Die Reihe gilt für jeden beliebigen Werth von x, wenn nur immer k so genommen wird, dafs $x+k$ denselben constanten Werth a behält, und α ist völlig willkürlich.

Bezeichnet man der Kürze wegen

10. Den Rest $\frac{k.k-a.k-2a\dots\dots k-na}{2.3\dots\dots n}.\frac{\Delta^n fx}{a^n}$, das heifst

$$\frac{k.k-a.k-2a\dots\dots k-na}{2.3\dots\dots na^n}.\Delta^n\left(\frac{Fa-Fx}{a-x}\right)\text{ durch }\varphi x;$$

11. Die Function Fx durch y_x, oder auch blofs durch y;

12. Die Differenz-Coefficienten $\frac{\Delta Fx}{a}$, $\frac{\Delta^2 Fx}{a^2}$, $\frac{\Delta^3 Fx}{a^3}$ durch Dy_x, D^2y_x, $D^3y_x\dots$;

13. Die Coefficienten, welche k enthalten, der Reihe nach durch k_1, k_2, k_3 ...., so dafs z. B.

$$\frac{k.k-\alpha.k-2\alpha \ldots . k-(n-1)\alpha}{2.3 \ldots . n} = k_n$$

ist, so kann die Reihe wie folgt geschrieben werden:

14. $F(x+k) = y_x + k_1 D y_x + k_2 D^2 y_x + k_3 D^3 y_x \ldots . + k_n D^n y_x + \varphi x.$

2.

Da α ganz willkürlich ist, so kann es auch $= 0$ gesetzt werden. Dann gehen die Differenz-Coefficienten $\frac{\Delta Fx}{\alpha}$, $\frac{\Delta^2 Fx}{\alpha^2}$, $\frac{\Delta^3 Fx}{\alpha^3}$ ....., also Dy, $D^2 y$, $D^3 y$ ...., offenbar in die Differential-Coefficienten dy, $d^2 y$, $d^3 y$.... über; denn z. B. dy oder dFx ist nichts anders als $\frac{F(x+\alpha)-Fx}{\alpha}$, oder $\frac{\Delta Fx}{\alpha}$ für $\alpha = 0$. Die Coefficienten k_1, k_2, k_3 .... in (14.) gehen für $\alpha = 0$ in k, $\frac{k^2}{2}$, $\frac{k^3}{3}$ .... über. Und so würde, wenn *alle* die Coefficienten k für $\alpha = 0$, bis *ins Unendliche*, von Facultäten, wie sie es sind, in blofse Potenzen übergingen, die Reihe (14.) unmittelbar die besondere, eigentlich sogenannte Taylorsche Reihe geben. Da es indessen zweifelhaft ist, ob auch noch für $n = \infty$ in (13.) $k_n = \frac{k^n}{2.3 \ldots n}$ sei, weil, wenn auch $\alpha = 0$ ist, doch $n\alpha$ für ein *unendliches* n *nicht* Null und folglich $k - n\alpha$ *nicht* $= k$ sein könnte, so ist es nöthig, die Taylorsche Reihe mit *Differentialen* (14.), oder für den Fall $\alpha = 0$, für sich besonders aufzustellen; was auf ähnliche Art wie oben, folgendermafsen geschehen kann und wobei sich dann zugleich auch die Bedingungen ergeben, unter welchen die besondere Taylorsche Reihe *Statt findet*, nemlich unter welchen die Coefficienten k in (14.) von Facultäten wirklich in blofse Potenzen übergehen.

Man setze, wie oben, in dem identischen Ausdrucke $F(x+k) = Fx + kfx$, $x+\alpha$ statt x und folglich $k-\alpha$ statt k und ziehe von dem Resultate die ursprüngliche Gröfse wieder ab, ohne für den Augenblick $\alpha = 0$ zu setzen, so ergiebt sich

$$0 = F(x+\alpha) - Fx + (k-\alpha)f(x+\alpha) - kfx, \text{ oder}$$

15. $0 = \Delta Fx + k\Delta fx - \alpha f(x+\alpha).$

In diesem Ausdruck setze man von Neuem $x+\alpha$ statt x und $k-\alpha$ statt k und ziehe von dem Resultate das Ursprüngliche wieder ab, so erhält man

$$0 = \Delta F(x+\alpha) - \Delta Fx + (k-\alpha)\Delta f(x+\alpha) - k\Delta fx - \alpha f(x+2\alpha)$$
$$+ \alpha f(x+\alpha) \text{ oder}$$

16. $0 = \Delta^2 Fx + k\Delta^2 fx - 2\alpha\Delta f(x+\alpha).$

Die Wiederholung des Verfahrens giebt

$$0 = \Delta^2 F(x+\alpha) - \Delta^2 Fx + (k-\alpha)\Delta^2 f(x+\alpha) - k\Delta^2 fx - 2\alpha\Delta f(x+2\alpha) + 2\alpha\Delta f(x+\alpha) \text{ oder}$$

17. $$0 = \Delta^3 Fx + k\Delta^3 fx - 3\alpha\Delta^2 f(x+\alpha);$$

hierauf

$$0 = \Delta^4 Fx + k\Delta^4 fx - 4\alpha\Delta^3 f(x+\alpha);$$

und so weiter.

Zusammengenommen erhält man also folgende Ausdrücke:

18. $$\begin{cases} F(x+k) = Fx + kfx, & (3.) \\ f(x+\alpha) = \dfrac{\Delta Fx}{\alpha} + k\dfrac{\Delta fx}{\alpha}, & (15.) \\ \dfrac{\Delta f(x+\alpha)}{\alpha} = \dfrac{\Delta^2 Fx}{2\alpha^2} + k\dfrac{\Delta^2 fx}{2\alpha^2}, & (16.) \\ \dfrac{\Delta^2 f(x+\alpha)}{2\alpha^2} = \dfrac{\Delta^3 Fx}{2.3\alpha^3} + k\dfrac{\Delta^3 fx}{2.3\alpha^3}, & (17.) \\ \dfrac{\Delta^3 f(x+\alpha)}{2.3\alpha^3} = \dfrac{\Delta^4 Fx}{2.3.4\alpha^4} + k\dfrac{\Delta^4 fx}{2.3.4\alpha^4}, & \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \dfrac{\Delta^{n-2} f(x+\alpha)}{2.3\ldots.n-2\,\alpha^{n-2}} = \dfrac{\Delta^{n-1} Fx}{2.3\ldots.n-1\,\alpha^{n-1}} + k.\dfrac{\Delta^{n-1} fx}{2.3\ldots.n-1\,\alpha^{n-1}}, & \\ \dfrac{\Delta^{n-1} f(x+\alpha)}{2.3\ldots.n-1\,\alpha^{n-1}} = \dfrac{\Delta^{n} Fx}{2.3\ldots.n\,\alpha^{n}} + k.\dfrac{\Delta^{n} fx}{2.3\ldots.n\,\alpha^{n}}. & \end{cases}$$

Ist nun $fx = \dfrac{F(x+k)-Fx}{k}$ (2.) *von der Art,* dafs für $\alpha = 0$

19. $$\begin{cases} f(x+\alpha) = fx, \quad \text{oder} \quad f(x+\alpha) - fx = 0, \text{ das heifst } \Delta fx = 0, \\ \dfrac{\Delta f(x+\alpha)}{\alpha} = \dfrac{\Delta fx}{\alpha}, \quad \text{oder} \quad \dfrac{\Delta f(x+\alpha) - \Delta fx}{\alpha} = 0, \text{ das heifst } \dfrac{\Delta^2 fx}{\alpha} = 0, \\ \dfrac{\Delta^2 f(x+\alpha)}{2\alpha^2} = \dfrac{\Delta^2 fx}{2\alpha^2}, \quad \text{oder} \quad \dfrac{\Delta^2 f(x+\alpha) - \Delta^2 fx}{2\alpha^2} = 0, \text{ das heifst } \dfrac{\Delta^3 fx}{2\alpha^2} = 0, \\ \dfrac{\Delta^3 f(x+\alpha)}{2.3\alpha^3} = \dfrac{\Delta^3 fx}{2.3\alpha^3}, \quad \text{oder} \quad \dfrac{\Delta^3 f(x+\alpha) - \Delta^3 fx}{2.3\alpha^3} = 0, \text{ das heifst } \dfrac{\Delta^4 fx}{2.3\alpha^3} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\Delta^{n-1}(x+\alpha)}{2.3\ldots.n-1\,\alpha^{n-1}} = \dfrac{\Delta^{n-1} fx}{2.3\ldots.n-1\,\alpha^{n-1}}, \quad \text{oder} \quad \dfrac{\Delta^{n-1} f(x+\alpha) - \Delta^{n-1} fx}{2.3\ldots.n-1\,\alpha^{n-1}} = 0, \text{ das heifst } \dfrac{\Delta^{n} fx}{2.3\ldots.n-1\,\alpha^{n-1}} = 0 \end{cases}$$

ist, so geben die Ausdrücke (18.), in einander substituirt,

$$20.\quad F(x+k) = Fx + k\frac{\Delta Fx}{\alpha} + \frac{k^2}{2}.\frac{\Delta^2 Fx}{\alpha^2} + \frac{k^3}{2.3}.\frac{\Delta^3 Fx}{\alpha^3}\ldots\ldots + \frac{k^n}{2.3\ldots.n}.\frac{\Delta^n Fx}{\alpha^n} + \frac{k^{n+1}}{2.3\ldots.n+1}.\frac{\Delta^n fx}{\alpha^n},$$

oder, da $\alpha = 0$ sein soll und $\frac{\Delta Fx}{\alpha}$, $\frac{\Delta^2 Fx}{\alpha^2}$, $\frac{\Delta^3 Fx}{\alpha^3}$ ..... in diesem Falle nichts anders sind als dFx, d^2Fx, d^3Fx ....,

$$21.\quad F(x+k) = Fx + kdFx + \frac{k^2}{2}d^2Fx + \frac{k^3}{2.3}d^3Fx\ldots\ldots + \frac{k^n}{2.3\ldots.n}d^nFx + \frac{k^{n+1}}{2.3\ldots.n+1}d^nfx;$$

und dies ist die *besondere* Taylorsche Reihe.

Die *Bedingungen* für das Stattfinden derselben sind diejenigen (19.). Sie sind in Beziehung auf $fx = \frac{F(x+k)-Fx}{k}$ ausgedrückt, lassen sich aber auch wie folgt auf andere in Beziehung auf Fx selbst, bringen.

Die Gleichungen (8.) nemlich kann man auch wie folgt ausdrücken:

$$22.\quad \begin{cases} \alpha fx = \Delta Fx + (k-\alpha)\Delta fx, \\ 2\Delta fx = \frac{\Delta^2 Fx}{\alpha} + (k-2\alpha)\frac{\Delta^2 fx}{\alpha}, \\ \frac{3\Delta^2 fx}{2\alpha} = \frac{\Delta^3 Fx}{2\alpha^2} + (k-3\alpha)\frac{\Delta^3 fx}{2\alpha^2}, \\ \frac{4\Delta^3 fx}{2.3\alpha^2} = \frac{\Delta^4 Fx}{2.3\alpha^3} + (k-4\alpha)\frac{\Delta^4 fx}{2.3\alpha^3}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{n-1\,\Delta^{n-2} fx}{2.3\ldots.n-2\,\alpha^{n-3}} = \frac{\Delta^{n-1} Fx}{2.3\ldots.n-2\,\alpha^{n-2}} + (k-(n-1)\alpha).\frac{\Delta^{n-1} fx}{2.3\ldots.n-2\,\alpha^{n-2}} \\ \frac{n\,\Delta^{n-1} fx}{2.3\ldots.n-1\,\alpha^{n-2}} = \frac{\Delta^n Fx}{2.3\ldots.n-1\,\alpha^{n-1}} + (k-n\alpha).\frac{\Delta^n fx}{2.3\ldots.n-1\,\alpha^{n-1}}. \end{cases}$$

Nun mufste, zufolge (19.), wenn die Reihe (20.) Statt finden soll,

$$23.\quad \begin{cases} \Delta fx = 0,\quad \frac{\Delta^2 fx}{\alpha} = 0,\quad \frac{\Delta^3 fx}{2\alpha^2} = 0,\quad \frac{\Delta^4 fx}{2.3\alpha^3} = 0,\quad \ldots\ldots \\ \frac{\Delta^n fx}{2.3\ldots.(n-1)\alpha^{n-1}} = 0 \end{cases}$$

sein. Dieser Bedingung gemäfs müssen die letzten Glieder rechterhand (22.) wegfallen und es mufs also

$$24.\quad \left\{\begin{array}{lllll}
\alpha f x = \Delta F x = \alpha.\dfrac{\Delta F x}{\alpha}, & & & & \\
2\Delta f x = \dfrac{\Delta^2 F x}{\alpha}, & \text{oder} & \Delta f x & = & \dfrac{\Delta^2 F x}{2\alpha}, \\
\dfrac{3\Delta^2 f x}{2\alpha} = \dfrac{\Delta^3 F x}{2\alpha^2}, & \text{oder} & \dfrac{\Delta^2 f x}{\alpha} & = & \dfrac{2\Delta^3 F x}{2.3\alpha^2}, \\
\dfrac{4\Delta^3 f x}{2.3\alpha^2} = \dfrac{\Delta^4 F x}{2.3\alpha^3}, & \text{oder} & \dfrac{\Delta^3 f x}{2\alpha^2} & = & \dfrac{3\Delta^4 F x}{2.3.4\alpha^3}, \\
\dfrac{5\Delta^4 f x}{2.3.4\alpha^3} = \dfrac{\Delta^5 F x}{2.3.4\alpha^4}, & \text{oder} & \dfrac{\Delta^4 f x}{2.3\alpha^3} & = & \dfrac{4\Delta^5 F x}{2.3.4.5\alpha^4}, \\
\ldots & & & & \\
\dfrac{n\Delta^{n-1} f x}{2.3\ldots n-1\,\alpha^{n-2}} = \dfrac{\Delta^n F x}{2.3\ldots n-1\,\alpha^{n-1}}, & \text{oder} & \dfrac{\Delta^{n-1} f x}{2.3\ldots n-2\,\alpha^{n-2}} & = & \dfrac{n-1.\Delta^n F x}{2.3\ldots n\,\alpha^{n-1}}
\end{array}\right.$$

sein. Dieses giebt aber wieder, zufolge der Bedingungen (23. oder 19.), und da für $\alpha = 0$, $\alpha f x$ oder $\alpha.\dfrac{F(x+k)-Fx}{k}$ immer $= 0$ ist,

$$25.\quad \left\{\begin{array}{ll}
0 = \alpha.\dfrac{\Delta F x}{\alpha}, & \text{das heifst } \alpha\, d F x = 0; \\
0 = \alpha.\dfrac{\Delta^2 F x}{2\alpha^2}, & \text{das heifst } \dfrac{\alpha}{2} d^2 F x = 0; \\
0 = \alpha.\dfrac{2\Delta^3 F x}{2.3\alpha^3}, & \text{das heifst } \dfrac{2\alpha}{2.3} d^3 F x = 0; \\
0 = \alpha.\dfrac{3\Delta^4 F x}{2.3.4\alpha^4}, & \text{das heifst } \dfrac{3\alpha}{2.3.4} d^4 F x = 0; \\
0 = \alpha.\dfrac{4\Delta^5 F x}{2.3.4.5\alpha^5}, & \text{das heifst } \dfrac{4\alpha}{2.3.4.5} d^5 F x = 0; \\
\ldots & \\
0 = \alpha.\dfrac{n-1\,\Delta^n F x}{2.3\ldots n\,\alpha^n}, & \text{das heifst } \dfrac{n-1.\alpha}{2.3\ldots n} d^n F x = 0.
\end{array}\right.$$

Dieses sind die Bedingungen für die Gültigkeit der besondern Taylorschen Reihe (20.), durch Fx selbst ausgedrückt. Sie finden im Allgemeinen mit Sicherheit nur dann Statt, wenn keiner der Differential-Coefficienten dFx, d^2Fx, d^3Fx, ... d^nFx unendlich grofs ist; denn wäre es einer derselben, z. B. d^nFx, so würde er, mit $\alpha = 0$ multiplicirt, nicht nothwendig Null geben; wie es sein soll. Die Bedingung für das Stattfinden der besondern Taylorschen Reihe ist also im Allgemeinen die, dafs keiner der Differential-Coefficienten in derselben für irgend einen Werth von x unendlich grofs sein darf.

3.

Es kommt nun insbesondere auf die Schätzung des Restes Φx der allgemeinen Taylorschen Reihe (14.) an.

Unmittelbar würde sich dieser Rest nur aus der Function $F(x+k)$ selbst und den sämmtlichen ihm vorhergehenden Gliedern beurtheilen lassen; denn er ist nichts anders als diese Function $F(x+k)$ selbst, nach Abzug jener Glieder. Aber da eben die Function erst entwickelt werden soll, so ist ihr Werth als noch unbekannt anzusehen und folglich auch der Werth des *Restes* aus ihr nicht zu beurtheilen, sondern nur aus den als gegeben anzusehenden *Gliedern der Entwicklung*. Es kommt also darauf an, den Ausdruck des Restes mit dem *der einzelnen Glieder* in Verbindung zu bringen. Dieses ist mit der *ersten Differenz* $\Delta\Phi x$ des unbekannten Restes möglich; denn es läfst sich dieselbe wie folgt durch das *erste Glied* des Restes ausdrücken, und dann läfst sich daraus weiter auf den Rest selbst schliefsen.

Es wurde gesetzt:

$$26.\quad k_n = \frac{k.k-\alpha.k-2\alpha \ldots\ldots k-(n-1)\alpha}{2.3\ldots\ldots n}. \quad (13.)$$

Es ist also auch, wenn man $k-\alpha$ statt k schreibt,

$$27.\quad (k-\alpha)_n = \frac{k-\alpha.k-2\alpha.k-3\alpha \ldots\ldots k-n\alpha}{2.3\ldots\ldots n}$$

Dieses giebt

$$(k-\alpha)_n + \alpha(k-\alpha)_{n-1}$$

$$= \frac{k-\alpha.k-2\alpha.k-3\alpha \ldots\ldots k-n\alpha}{2.3\ldots\ldots n} + \alpha.\frac{k-\alpha.k-2\alpha.k-3\alpha \ldots\ldots k-(n-1)\alpha}{2.3\ldots\ldots n-1}$$

$$= \frac{k-\alpha.k-2\alpha.k-3\alpha \ldots\ldots k-(n-1)\alpha}{2.3\ldots\ldots n-1}.\left(\frac{k-n\alpha}{n}+\alpha\right)$$

$$= \frac{k.k-\alpha.k-2\alpha \ldots\ldots k-(n-1)\alpha}{2.3\ldots\ldots n} = k_n. \quad (26.)$$

Also ist, für jedes beliebige n,

$$28.\quad (k-\alpha)_n + \alpha(k-\alpha)_{n-1} = k_n.$$

Nun setze man in der Reihe (14.) $x+\alpha$ statt x, also auch $k-\alpha$ statt k und ziehe von dem Resultate die ursprüngliche Reihe wieder ab, so erhält man

$$29.\quad 0 = y_{x+\alpha} + (k-\alpha)_1 Dy_{x+\alpha} + (k-\alpha)_2 D^2 y_{x+\alpha} + (k-\alpha)_3 D^3 y_{x+\alpha} \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + (k-\alpha)_n D^n y_{x+\alpha} + \Phi(x+\alpha)$$
$$- y_x - k_1 Dy_x - k_2 D^2 y_x - k_3 D^3 y_x \ldots\ldots - k_n D^n y_x - \Phi x,$$

oder, wenn man hier in den abzuziehenden Gliedern zufolge (28.)

$$30.\quad \begin{cases} k_1 = (k-\alpha)_1 + \alpha, \\ k_2 = (k-\alpha)_2 + \alpha(k-\alpha)_1, \\ k_3 = (k-\alpha)_3 + \alpha(k-\alpha)_2, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ k_n = (k-\alpha)_n + \alpha(k-\alpha)_{n-1} \end{cases}$$

setzt,

$$\begin{aligned} 31.\quad 0 = {} & y_{x+\alpha} + (k-\alpha)_1 D y_{x+\alpha} + (k-\alpha)_2 D^2 y_{x+\alpha} + (k-\alpha)_3 D^3 y_{x+\alpha} \ldots \\ & \ldots + (k-\alpha)_n D^n y_{x+\alpha} + \varphi(x+\alpha) \\ & - y_x - (k-\alpha)_1 D y_x - (k-\alpha)_2 D^2 y_x - (k-\alpha)_3 D^3 y_x \ldots \\ & \ldots - (k-\alpha)_n D^n y_x - \varphi x \\ & - \alpha D y_x - \alpha(k-\alpha)_1 D^2 y_x - \alpha(k-\alpha)_2 D^3 y_x \ldots \\ & \ldots - \alpha(k-\alpha)_{n-1} D^n y_x. \end{aligned}$$

Es ist aber z. B.

$$32.\quad \begin{cases} D^n y_{x+\alpha} - D^n y_x = \dfrac{\Delta^n F(x+\alpha)}{\alpha^n} - \dfrac{\Delta^n Fx}{\alpha^n} \text{ (12.) } = \dfrac{\Delta^{n+1} Fx}{\alpha^n} = \alpha D^{n+1} y_x, \\ \text{desgleichen} \\ \varphi(x+\alpha) - \varphi x = \Delta\varphi x = \alpha D\varphi x \text{ und} \\ y_{x+\alpha} - y_x = \Delta y_x = \alpha D y_x. \end{cases}$$

Also ist (31.) so viel als

$$\begin{aligned} 33.\quad 0 = {} & \alpha D y_x + \alpha(k-\alpha)_1 D^2 y_x + \alpha(k-\alpha)_2 D^3 y_x \ldots + \alpha(k-\alpha)_{n-1} D^n y_x \\ & + \alpha(k-\alpha)_n D^{n+1} y_x + \alpha D\varphi x \\ & - \alpha D y_x - \alpha(k-\alpha)_1 D^2 y_x - \alpha(k-\alpha)_2 D^3 y_x \ldots - \alpha(k-\alpha)_{n-1} D^n y_x \end{aligned}$$

und es folgt, wenn man wegläfst, was sich aufhebt,

$$34.\quad (k-\alpha)_n D^{n+1} y_x + D\varphi x = 0,$$

das heifst:

$$35.\quad \alpha(k-\alpha)_n \frac{\Delta^{n+1} Fx}{\alpha^{n+1}} + \Delta\varphi x = 0,$$

oder auch, ausgeschrieben,

$$36.\quad \alpha . \frac{k-\alpha . k-2\alpha . k-3\alpha \ldots k-n\alpha}{2.3 \ldots n} . \frac{\Delta^{n+1} Fx}{\alpha^{n+1}} + \Delta\varphi x = 0.$$

Das erste Glied des Restes φx, welches durch P bezeichnet werden mag, ist

$$37.\quad P = \frac{k . k-\alpha . k-2\alpha \ldots k-n\alpha}{2.3 \ldots n+1} . \frac{\Delta^{n+1} Fx}{\alpha^{n+1}}.$$

Also ist vermöge (36.)

$$38.\quad \Delta\varphi x + \frac{(n+1)\alpha}{k} . P = 0;$$

was ein Ausdruck der ***ersten Differenz des Restes durch sein erstes Glied*** ist.

Da auch zufolge (28.), wenn man dort $n+1$ statt n schreibt,

$$39. \quad (k-\alpha)_{n+1}-k_{n+1} = -\alpha(k-\alpha)_n,$$

$(k-\alpha)_{n+1}-k_{n+1}$ aber nichts anders als Δk_{n+1}, folglich

$$40. \quad \alpha(k-\alpha)_n = -\Delta k_{n+1}$$

ist, so erhält man auch vermöge (35.)

$$41. \quad \Delta\Phi x - \Delta k_{n+1}.\frac{\Delta^{n+1}Fx}{\alpha^{n+1}} = 0,$$

oder auch, da $\Delta\Phi x = \alpha D\Phi x$ und $\Delta k_{n+1} = \alpha D k_{n+1}$ ist,

$$42. \quad D\Phi x - Dk_{n+1}D^{n+1}y_x = 0;$$

welches ebenfalls Ausdrücke ***der ersten Differenz des Restes durch sein erstes Glied*** sind.

4.

Nun läfst sich vermittelst der ersten Differenz einer beliebigen Function von x, z. B. ψx, nach α genommen, also vermittelst der Differenz $\psi(x+\alpha)-\psi x$, von einer andern Differenz derselben Function, z. B. von $\psi(x+k)-\psi x$, *insofern k ein ganzzahliges Vielfaches von α*, z. B.

$$43. \quad k = m\alpha, \text{ also } m \text{ eine ganze Zahl}$$

ist,

Erstlich das *Zeichen* beurtheilen, falls das Zeichen von $\psi(x+\alpha)-\psi x$ für alle x von x bis $x+k$ sich nicht ändert, und

Zweitens läfst sich die neue Differenz $\psi(x+k)-\psi x$ selbst, wenn man weifs, dafs $\Delta\psi x$ nur *stetig* sich verändert, durch die Differenz $\psi(x+\alpha)-\psi x$, für einen *mittleren* Werth von x genommen, ausdrücken.

Wenn nemlich, wie vorausgesetzt wird, α in k *aufgeht*, so ist

$$44. \quad \begin{cases} \psi(x+\alpha)-\psi x = \Delta\psi x, \\ \psi(x+2\alpha)-\psi(x+\alpha) = \Delta\psi(x+\alpha), \\ \psi(x+3\alpha)-\psi(x+2\alpha) = \Delta\psi(x+2\alpha), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \psi(x+(m-1)\alpha)-\psi(x+(m-2)\alpha) = \Delta\psi(x+(m-2)\alpha), \\ \psi(x+m\alpha)-\psi(x+(m-1)\alpha) = \Delta\psi(x+(m-1)\alpha). \end{cases}$$

Die Summe hiervon ist, da $x+m\alpha = x+k$ sein soll,

$$45. \quad \psi(x+k)-\psi x = \Delta\psi x+\Delta\psi(x+\alpha)+\Delta\psi(x+2\alpha)\ldots\ldots+\Delta\psi(x+k-\alpha),$$

und in diesem Ausdrucke sind die Glieder rechterhand, deren Anzahl m ist, nichts anders als die Werthe von

$$\Delta\psi x \text{ für } x = x,\ x+\alpha,\ x+2\alpha,\ \ldots\ x+(m-1)\alpha.$$

Weifs man also

Erstlich, dafs $\Delta\psi x$ für *alle möglichen* Werthe von x, von x an bis $x+k$, immer dasselbe Zeichen hat, so haben auch alle die Glieder rechterhand in (45.), da sie ebenfalls zu diesen Werthen von $\Delta\psi x$ gehören, das gleiche Zeichen. Und folglich hat auch ihre *Summe* das gleiche Zeichen. Es folgt also, dafs die neue Differenz $\psi(x+k)-\psi x$ dasselbe Zeichen haben wird, wie die Differenz $\psi(x+\alpha)-\psi x = \Delta\psi x$, falls letztere für alle Werthe von x, von x bis $x+k$, ihr Zeichen nicht ändert.

Zweitens wird es unter den m Gliedern rechterhand in (45.), sie mögen gleiche oder verschiedene Zeichen haben, nothwendig ein *gröfstes* und ein *kleinstes* geben. Irgend eine *mittlere* Gröfse, m mal genommen, wird also der *Summe* der m Glieder gleich sein. Weifs man nun, dafs $\Delta\psi x$ mit x zugleich nur *stetig* sich verändert, so wird $\Delta\psi x$, indem x stetig in $x+k$ übergeht, *alle möglichen* Werthe durchlaufen, die es haben kann, also auch, indem es von seinem kleinsten zu seinem gröfsten Werthe gelangt, oder umgekehrt, nothwendig alle möglichen *Mittelwerthe*. Es wird folglich auch nothwendig diejenige Gröfse berühren, die m mal genommen der Summe der m Glieder gleich ist, und zwar nothwendig für irgend einen Werth von x, der *zwischen* x und $x+k$ liegt und der also etwa durch $x+\lambda k$ bezeichnet werden kann, wenn man unter λ eine Zahl versteht, die nicht gröfser als 1 und nicht kleiner als 0 ist. Es folgt also, sobald man weifs, dafs $\Delta\psi x$ mit x nur stetig sich verändert, es mag übrigens stets dasselbe Zeichen behalten oder nicht, dafs dann $\psi(x+k)-\psi x$ durch

$$46.\quad \psi(x+k)-\psi x = m\Delta\psi(x+\lambda k) = k.\frac{\Delta\psi(x+\lambda k)}{\alpha}$$

ausgedrückt werden kann, wo λ die Grenzen 0 und 1 nicht überschreitet.

5.

Dieses also läfst sich aus der ersten Differenz $\Delta\psi x = \psi(x+\alpha)-\psi x$ einer unbekannten Function ψx von einer andern Differenz dieser Function $\psi(x+k)-\psi x$ schliefsen, vorausgesetzt dafs k ein ganzzahliges Vielfache von α ist. Kennt man nun aufserdem noch etwa *einen der beiden Werthe*

der Function ψx, entweder den von ψx, oder den von $\psi(x+k)$, z. B. den letzten, weifs also, dafs z. B.

$$47. \quad \psi(x+k) = A$$

ist, so läfst sich auch auf die Function ψx *selbst* schliefsen, denn es ist alsdann

$$48. \quad \psi(x+k) - \psi x = A - \psi x,$$

und was von dem Resultate der Veränderlichkeit von $\psi(x+k) - \psi x$ gefunden wurde, gilt jetzt von ψx selbst.

Für den unbekannten Rest der obigen Reihe, φx, ist in der That der Werth von $\varphi(x+k)$ bekannt. Denn wenn man in (14.) $x+k$ statt x und folglich $k = x - k = 0$ setzt, so verwandelt sich das erste Glied rechterhand in $F(x+k)$ und alle folgenden Glieder, bis zum Rest, fallen wegen $k=0$ weg. Mithin giebt die Gleichung (14.) für diesen Fall:

$$49. \quad F(x+k) = F(x+k) + \varphi(x+k),$$

und folglich

$$50. \quad \varphi(x+k) = 0.$$

Insofern also die obige Function ψx entweder der Rest φx selbst ist, oder auch nur auf eine bestimmte Weise davon abhängt, wird man immer den Werth $A = \psi(x+k)$ von ψx für $x = x+k$ kennen, und folglich wird das was gefunden wird von ψx selbst gelten.

6.

Dieses läfst sich nun wie folgt anwenden, um für den unbekannten Rest φx

Erstlich, vermittelst des Ausdrucks (34. oder 41.) seiner ersten Differenz nach α durch sein erstes Glied, Grenzwerthe zu finden.

In diesem Ausdrucke, z. B. demjenigen (41.), sind nemlich die drei Gröfsen $\Delta\varphi x$, Δk_{n+1} und $\frac{\Delta^{n+1} Fx}{\alpha^{n+1}}$ sämmtlich von x abhängig, und für die verschiedenen Werthe von x haben sie, der Gleichung zufolge, *zusammengehörige* Werthe. Die Gröfse $\frac{\Delta^{n+1} Fx}{\alpha^{n+1}}$ z. B. wird aber nothwendig einen *gröfsten* und einen *kleinsten* Werth haben: sie mag bei ihrer Veränderung ihr Zeichen wechseln, oder nicht. Man bezeichne

51. Den kleinsten Werth von $\frac{\Delta^{n+1} Fx}{\alpha^{n+1}}$ durch M,

52. Den gröfsten Werth von $\frac{\Delta^{n+1} Fx}{\alpha^{n+1}}$ durch N,

so läfst sich für jeden andern Werth von x als den, der den gröfsten oder

kleinsten Werth von $\frac{\Delta^{n+1}Fx}{\alpha^{n+1}}$ giebt,

$$53.\quad \frac{\Delta^{n+1}Fx}{\alpha^{n+1}} = M + U = N - V$$

setzen, wo U und V für keinen Werth von x negativ, sondern nur 0 oder positiv sind.

Vermöge (41.) ist also nun

$$54.\quad \left\{\begin{array}{l} \Delta\varphi x - \Delta k_{n+1}(M+U) = 0 \quad \text{und} \\ \Delta\varphi x - \Delta k_{n+1}(N-V) = 0, \end{array}\right.$$

und dieses giebt

$$55.\quad \left\{\begin{array}{l} \Delta\varphi x - \Delta k_{n+1} M = + \Delta k_{n+1} U \quad \text{und} \\ \Delta\varphi x - \Delta k_{n+1} N = - \Delta k_{n+1} V. \end{array}\right.$$

Aber U und V, hier rechterhand, ändern das Zeichen nicht und sind beide stets *positiv*. Also ändern auch, in so fern Δk_{n+1} für alle Werthe von x das gleiche Zeichen hat, $\Delta\varphi x - \Delta k_{n+1} M$ und $\Delta\varphi x - \Delta k_{n+1} N$ das Zeichen nicht, und haben dabei nothwendig *entgegengesetzte* Zeichen, für alle Werthe von x, weil U und V in (55.) *beide gleiche* Zeichen haben, nemlich positiv sind.

Nun ist, da M und N constant sind und kein x enthalten,

$$96.\quad \left\{\begin{array}{l} \Delta\varphi x - \Delta k_{n+1} M = \Delta(\varphi x - k_{n+1} M) \quad \text{und} \\ \Delta\varphi x - \Delta k_{n+1} N = \Delta(\varphi x - k_{n+1} N). \end{array}\right.$$

Setzt man also

$$57.\quad \left\{\begin{array}{l} \varphi x - k_{n+1} M = f_1 x \quad \text{und} \\ \varphi x - k_{n+1} N = f_2 x, \end{array}\right.$$

so ist, vermöge (56. und 55.),

$$58.\quad \left\{\begin{array}{l} \Delta f_1 x = + \Delta k_{n+1} U \quad \text{und} \\ \Delta f_2 x = - \Delta k_{n+1} V, \end{array}\right.$$

und man weiſs von $\Delta f_1 x$ und $\Delta f_2 x$, daſs sie für die verschiedenen Werthe von x, von x bis $x+k$, ihr Zeichen nicht ändern, und zugleich, daſs sie nothwendig *entgegengesetzte* Zeichen haben.

Auf diese Functionen $f_1 x$ und $f_2 x$ findet also schon der erste Satz (§. 4.) Anwendung und es folgt, daſs auch die Differenz $f_1(x+k) - f_1 x$ dasselbe Zeichen haben wird wie die Differenz $f_1(x+\alpha) - f_1 x = \Delta f_1 x$ und die Differenz $f_2(x+k) - f_2 x$ dasselbe Zeichen wie die Differenz $f_2(x+\alpha) - f_2 x = \Delta f_2 x$.

Es haben folglich auch nothwendig $f_1(x+k) - f_1 x$ und $f_2(x+k) - f_2 x$, eben wie $\Delta_1 fx$ und $\Delta_2 fx$, *entgegengesetzte* Zeichen.

Die ersten Theile dieser Differenzen, nemlich $f_1(x+k)$ und $f_2(x+k)$ erhält man, wenn man in (57.) $x+k$ statt x, also $k=0$ setzt. Für $k=0$ ist aber k_{n+1}, das heifst $\frac{k.k-\alpha.k-2\alpha \ldots . k-n\alpha}{2.3 \ldots . n+1}$, wegen des Factors k, gleich Null: also ist nach (57.) blofs

$$59. \quad \begin{cases} f_1(x+k) = \varphi(x+k) & \text{und} \\ f_2(x+k) = \varphi(x+k). \end{cases}$$

Aber auch $\varphi(x+k)$ ist $=0$ (50.), also ist

$$60. \quad f_1(x+k) = 0 \quad \text{und} \quad f_2(x+k) = 0$$

und folglich ist blofs

$$61. \quad \begin{cases} f_1(x+k) - f_1 x = -f_1 x & \text{und} \\ f_2(x+k) - f_2 x = -f_2 x. \end{cases}$$

Mithin haben $-f_1 x$ und $-f_2 x$, und folglich auch $f_1 x$ und $f_2 x$, nothwendig *entgegengesetzte* Zeichen, und daraus folgt, vermöge (57.), dafs φx nothwendig *zwischen* $k_{n+1} M$ und $k_{n+1} N$ liegen mufs. Es sind aber $k_{n+1} M$ und $k_{n+1} N$ der kleinste und der gröfste Werth, den das *erste Glied* des Restes $k_{n+1} . \frac{\Delta^{n+1} Fx}{\alpha^{n+1}}$ haben kann, und zwar auf die Weise, dafs man darin den Factor k_{n+1} als unveränderlich und nur den Factor $\frac{\Delta^{n+1} Fx}{\alpha^{n+1}}$ als veränderlich betrachtet. Es würde also folgen, dafs dieser gröfste und kleinste Werth des ersten Gliedes des Restes *Grenzen* für die Werthe des Restes sind, und zwar in der Voraussetzung, dafs α in k aufgeht und dann unter der obigen zweiten Bedingung bei (55.), dafs

$$62. \quad \Delta k_{n+1} = -\alpha(k-\alpha)_n \text{ (40.)} = -\frac{\alpha.k-\alpha.k-2\alpha.k-3\alpha \ldots . k-n\alpha}{2.3 \ldots . n} \text{ (40.)}$$

für alle Werthe von x bis $x+k$, also von $k=k$ bis $k=0$, sein Zeichen nicht ändert.

Diese letzte Bedingung wird aber, so lange Δk_{n+1} eine *Facultät* ist, das heifst, so lange α *nicht Null* ist, nie erfüllt. Zuerst nemlich sind für $k=0$ alle Factoren in (62.) negativ, und bleiben es bis zu $k=\alpha$. Für $k=\alpha$ ist $\Delta k_{n+1}=0$. Für $k>\alpha$ und $<2\alpha$ ist der erste Factor positiv und die folgenden sind noch negativ und folglich hat Δk_{n+1} das entgegengesetzte Zeichen, wie vorhin für die Werthe von $k=0$ bis $k=\alpha$. Für $k=2\alpha$ ist wieder $\Delta k_{n+1}=0$ und für $k>2\alpha$ und $<3\alpha$ bekommt es wieder das entgegengesetzte Zeichen; u. s. w. Also wird die Bedingung, dafs Δk_{n+1} sein Zeichen nicht wechsele, nicht erfüllt, und folglich ergeben sich auf diesem Wege *keine* Grenzwerthe.

7.

Anstatt wie in (§. 6.) in (41.) von $\frac{\Delta^{n+1}Fx}{\alpha^{n+1}}$ den gröfsten und den kleinsten Werth gegen die übrigen zur Vergleichung zu ziehen, läfst sich auch von dem gröfsten und kleinsten Werth des *andern* Factors Δk_{n+1} ausgehen.

Man bezeichne nemlich:

63. Den kleinsten Werth von $\Delta k_{n+1} = \frac{-\alpha.k-\alpha.k-2\alpha\ldots.k-(n-1)\alpha}{2.3\ldots.n}$ durch P,

64. Den gröfsten Werth dieses Factors durch Q,

und setze für jeden andern Werth von x, als den, welchem der gröfste und der kleinste Werth entsprechen,

$$65.\quad \Delta k_{n+1} = P+Y = Q-Z,$$

so sind Y und Z nie *negativ*, sondern nur *positiv*, oder Null. Dieses giebt, vermöge (41.),

$$66.\quad \begin{cases} \Delta\varphi x-(P+Y)\frac{\Delta^{n+1}Fx}{\alpha^{n+1}} = 0 \text{ und} \\ \Delta\varphi x-(Q-Z)\frac{\Delta^{n+1}Fx}{\alpha^{n+1}} = 0, \end{cases}$$

oder

$$67.\quad \begin{cases} \Delta\varphi x-P.\frac{\Delta^{n+1}Fx}{\alpha^{n+1}} = +Y.\frac{\Delta^{n+1}Fx}{\alpha^{n+1}} \text{ und} \\ \Delta\varphi x-Q.\frac{\Delta^{n+1}Fx}{\alpha^{n+1}} = -Z.\frac{\Delta^{n+1}Fx}{\alpha^{n+1}} \end{cases}$$

In so fern nun $\frac{\Delta^{n+1}Fx}{\alpha^{n+1}}$ für alle Werthe von x das nemliche Zeichen hat, haben auch $\Delta\varphi x-P.\frac{\Delta^{n+1}Fx}{\alpha^{n+1}}$ und $\Delta\varphi x-Q.\frac{\Delta^{n+1}Fx}{\alpha^{n+1}}$, weil in (67.) Y und Z stets positiv sind, stets das nemliche Zeichen, und zwar haben sie nothwendig *entgegengesetzte* Zeichen, weil Y und Z in (67.) *beide* positiv sind.

Da nun P und Q constant sind, oder mit x sich nicht verändern, so ist

$$68.\quad \begin{cases} \Delta\varphi x-P.\frac{\Delta^{n+1}Fx}{\alpha^{n+1}} = \Delta\left(\varphi x-P.\frac{\Delta^{n}Fx}{\alpha^{n+1}}\right) \text{ und} \\ \Delta\varphi x-Q.\frac{\Delta^{n+1}Fx}{\alpha^{n+1}} = \Delta\left(\varphi x-Q.\frac{\Delta^{n}Fx}{\alpha^{n+1}}\right). \end{cases}$$

Setzt man also

$$69.\quad \begin{cases} \varphi x-P.\frac{\Delta^{n}Fx}{\alpha^{n+1}} = f_1 x, \\ \varphi x-Q.\frac{\Delta^{n}Fx}{\alpha^{n+1}} = f_2 x, \end{cases}$$

so ist, vermöge (68. und 67.),

$$70.\quad \begin{cases} \Delta f_1 x = +Y.\dfrac{\Delta^{n+1}Fx}{\alpha^{n+1}} \text{ und} \\ \Delta f_2 x = -Z.\dfrac{\Delta^{n+1}Fx}{\alpha^{n+1}}, \end{cases}$$

und man weifs nun, dafs $\Delta f_1 x$ und $\Delta f_2 x$ ihr Zeichen nicht ändern; zugleich aber, dafs sie stets *entgegengesetzte* Zeichen haben.

Es findet also wieder der erste Satz in (§. 4.) auf $f_1 x$ und $f_2 x$ Anwendung, und es folgt, dafs auch die beiden Differenzen $f_1(x+k)-f_1 x$ und $f_2(x+k)-f_2 x$ dieselben Zeichen wie diejenigen $\Delta f_1 x$ und $\Delta f_2 x$ und ebenfalls *entgegengesetzte* Zeichen haben.

Nun erhält man die Werthe von $f_1(x+k)$ und $f_2(x+k)$, wenn man in (69.) $x+k$ statt x setzt, nemlich:

$$71.\quad \begin{cases} f_1(x+k) = \varphi(x+k) - P.\dfrac{\Delta^n F(x+k)}{\alpha^{n+1}} \text{ und} \\ f_2(x+k) = \varphi(x+k) - Q.\dfrac{\Delta^n F(x+k)}{\alpha^{n+1}}, \end{cases}$$

oder, da $\varphi(x+k)=0$ ist (50.):

$$72.\quad \begin{cases} f_1(x+k) = -P.\dfrac{\Delta^n F(x+k)}{\alpha^{n+1}} \text{ und} \\ f_2(x+k) = -Q.\dfrac{\Delta^n F(x+k)}{\alpha^{n+1}}. \end{cases}$$

Also ist, vermöge (69.),

$$73.\quad \begin{cases} f_1(x+k)-f_1 x = +P.\left(\dfrac{\Delta^n Fx}{\alpha^{n+1}} - \dfrac{\Delta^n F(x+k)}{\alpha^{n+1}}\right) - \varphi x \text{ und} \\ f_2(x+k)-f_2 x = +Q.\left(\dfrac{\Delta^n Fx}{\alpha^{n+1}} - \dfrac{\Delta^n F(x+k)}{\alpha^{n+1}}\right) - \varphi x. \end{cases}$$

Das erste, dem Reste vorhergehende Glied ist

$$74.\quad k_n.\frac{\Delta^n Fx}{\alpha^n} = \frac{k.k-\alpha.k-2\alpha \ldots\ldots k-(n-1).\alpha}{2.3\ldots\ldots n}.\frac{\Delta^n Fx}{\alpha^n}$$

und Δk_{n+1}, wovon P und Q der kleinste und der gröfste Werth sind, ist zufolge (62.)

$$75.\quad \Delta k_{n+1} = -\frac{\alpha.k-\alpha.k-2\alpha \ldots\ldots k-n\alpha}{2.3\ldots\ldots n} = -\frac{\alpha(k-n\alpha)}{k}.k_n.$$

Also ist

$$76.\quad \Delta k_{n+1}\frac{\Delta^n Fx}{\alpha^{n+1}} = -\frac{\alpha(k-n\alpha)}{\alpha}.k_n\frac{\Delta^n Fx}{\alpha^{n+1}} = -\frac{k-n\alpha}{k}.k_n\frac{\Delta^n Fx}{\alpha^n}$$
$$= -(k-\alpha)_n\frac{\Delta^n Fx}{\alpha^n}.$$

Eben so ist

$$77. \quad \Delta k_{n+1}.\frac{\Delta^n F(x+k)}{\alpha^{n+1}} = -(k-\alpha)_n.\frac{\Delta^n F(x+k)}{\alpha^n}.$$

Nun waren P und Q der kleinste und der gröfste Werth von Δk_{n+1} (63. und 64.). Also sind sie auch der kleinste und der gröfste Werth von $-\frac{\alpha(k-n\alpha)}{k}.k_n$ (75.). Mithin kann man auch, wenn man den kleinsten und den gröfsten Werth von $(k-\alpha)_n$ durch $(k-\alpha)'_n$ und $(k-\alpha)''_n$ unterscheidet, (73.) wie folgt schreiben:

$$78. \quad \begin{cases} f_1(x+k)-f_1x = -(k-\alpha)'_n.\left(\frac{\Delta^n Fx}{\alpha^n}-\frac{\Delta^n F(x+k)}{\alpha^n}\right)-\varphi x, \\ f_2(x+k)-f_2x = -(k-\alpha)''_n.\left(\frac{\Delta^n Fx}{\alpha^n}-\frac{\Delta^n F(x+k)}{\alpha^n}\right)-\varphi x, \end{cases}$$

und es folgt hieraus, dafs man, wenn man in dem Factor $\frac{\Delta^n Fx}{\alpha^n}$ des ersten dem Reste vorhergehenden Gliedes $k_n.\frac{\Delta^n Fx}{\alpha^n}$ erst $x=x$, darauf $x=x+k$ setzt, das letzte von dem ersten abzieht und was übrig bleibt mit dem gröfsten und dem kleinsten Werthe von $(k-\alpha)_n$ multiplicirt, zwei Gröfsen erhält, zwischen welchen der Rest φx liegen mufs; folglich Grenzwerthe für diesen Rest.

Die Bedingung, neben der Voraussetzung, dafs α in k aufgehen mufs, ist hier die, dafs in dem ersten Gliede $k_{n+1}.\frac{\Delta^{n+1} Fx}{\alpha^{n+1}}$ der Factor $\frac{\Delta^{n+1} Fx}{\alpha^{n+1}}$ für alle Werthe von x, und namentlich insbesondere für die Werthe x, $x+\alpha$, $x+2\alpha$, ... $x+k-\alpha$, (denn eigentlich nur auf diese kommt es in 44. und 45. an,) sein Zeichen nicht ändere; und dies kann allerdings der Fall sein, da solches nur von der Beschaffenheit der Function Fx abhängt. Auf diese Weise erhält man also wirklich Grenzwerthe für den Rest der allgemeinen Taylorschen Reihe mit Differenzen, und zwar unter der Bedingung, dafs α in k aufgehe.

8.

Der zweite Satz in (§. 4.), dafs, in der Voraussetzung, α gehe in k auf, $\psi(x+k)-\psi x$ immer durch $k.\frac{\Delta\psi(x+\lambda k)}{\alpha}$ (46.) ausgedrückt werden kann, wo λ die Grenzen 0 und 1 nicht überschreitet, läfst sich auf den Rest φx *unmittelbar* anwenden. Es war nemlich, dem Satze zufolge,

$$79. \quad \varphi(x+k)-\varphi x = \frac{k\Delta\varphi(k+\lambda k)}{\alpha}.$$

Nun ist gemäfs (36.)

$$80. \quad \frac{\Delta\varphi x}{\alpha} = -\frac{k-\alpha.k-2\alpha.k-3\alpha \ldots . k-n\alpha}{2.3 \ldots . n} \cdot \frac{\Delta^{n+1}Fx}{\alpha^{n+1}},$$

und dieser Ausdruck gilt für jeden beliebigen Werth von x, von x an bis $x+k$. Er gilt also auch für den Werth $x+\lambda k$ von x, da derselbe nothwendig zwischen x und $x+k$ liegt. Also gilt er auch für (79.) $\frac{\Delta\varphi(x+\lambda k)}{\alpha}$, wenn man in (80.) *überall* $x+\lambda k$ statt x setzt. Demzufolge mufs dann, da $k=a-x$ ist, $a-x-\lambda k=k-\lambda k=k(1-\lambda)$ gesetzt werden. Es ist folglich, wenn man der Kürze wegen

$$81. \quad k(1-\lambda) = \varkappa$$

setzt, was $x+\lambda k = x+k-\varkappa$ giebt,

$$82. \quad \frac{\Delta\varphi(x+\lambda k)}{\alpha} = -\frac{(\varkappa-\alpha)(\varkappa-2\alpha) \ldots . (\varkappa-n\alpha)}{2.3 \ldots . n} \cdot \frac{\Delta^{n+1}F(x+k-\varkappa)}{\alpha^{n+1}}$$

und folglich vermöge (79.), da noch $\Phi(x+k)=0$ ist (50.),

$$83. \quad \Phi x = \frac{k.\varkappa-\alpha.\varkappa-2\alpha \ldots . \varkappa-n\alpha}{2.3 \ldots . n} \cdot \frac{\Delta^{n+1}F(x+k-\varkappa)}{\alpha^{n+1}}.$$

Dies ist ein directer Grenzen-Ausdruck des Restes der allgemeinen Taylorschen Reihe mit Differenzen durch sein erstes Glied. $\varkappa$ bezeichnet in demselben eine unbestimmte Gröfse, die die Grenzen 0 und k nicht überschreitet und durch welche also auch der Ausdruck *Grenzen* für den Rest giebt. Die Bedingung, neben der Voraussetzung, dafs α in k aufgehe, ist hier blofs, dafs Φx nicht anders als *stetig* sich verändern darf; was immer der Fall sein wird, wenn Fx selbst blofs stetig sich verändert, weil dann das Gleiche auch mit den Differenzen von Fx geschieht, aus welchen der Rest zusammengesetzt ist. Eine Bedingung, wie bei den vorigen Ausdrücken, dafs einer oder der andere der beiden Factoren k_{n+1} und $\frac{\Delta^{n+1}Fx}{\alpha^{n+1}}$ das Zeichen nicht ändere, ist hier, wie aus (§. 4. Zweitens) folgt, nicht nöthig.

9.

Es wurde bei den Sätzen in (§. 4.), und also bei ihrer Anwendung auf den Rest der allgemeinen Taylorschen Reihe, *vorausgesetzt dafs α in k aufgehe.* Dieses ist indessen nicht blofs *Voraussetzung,* sondern es ist vielmehr *Bedingung* für das *Stattfinden* der Sätze (§. 4.), und also auch für das *Stattfinden* der Grenzen-Ausdrücke des Restes Φx. Wenn α in k nicht aufgeht, so finden die Sätze (§. 4.) und folglich auch ihre An-

wendungen ***nicht nothwendig*** Statt. Dieser Umstand wird sich am einfachsten an einer Figur nachweisen lassen.

Es bezeichne nemlich die Function ψx in (§. 4.) die *Fläche* zwischen einer Curve, ihrer Axe und zwei auf der Axe senkrechten Coordinaten; was immer angenommen werden kann und wobei die Curve, da die Function ψx unbestimmt ist, jede beliebige Gestalt haben kann.

Sie habe die Gestalt $FGNH$ (Fig. 1.). AK sei die Axe. A sei der Anfangspunct der rechtwinkligen Coordinaten; $AB = x$, $BE = k$, $BC = DE = EK = \alpha$: so ist $\Delta\psi x$ oder $\psi(x+\alpha) - \psi x$ zunächst die Summe der beiden Flächen DGC und BDF, von welchen die eine positiv, die andere negativ ist; $\psi(x+k) - \psi x$ dagegen ist die Summe der drei Flächen DGC, BDF und CNE, von welchen die eine positiv ist, die beiden andern aber negativ sind.

So wie nun x in $\Delta\psi x$ zunimmt, z. B. $x = AP$ aus AB wird, geht die Fläche $\Delta\psi(AB) = DGC + BDF$, wenn nun $PQ = BC = \alpha$ gesetzt wird, in $\Delta\psi(AP) = DGC + PMD + CQN$ über; und so weiter. Ist x bis zu AD gekommen, so ist $\Delta\psi(AD) = DGC + CNE$. Für $x = x + k = AE$ ist $\Delta\psi(AE) = CNE + EHK$. Gesetzt nun, die positive Fläche DGC sei *gröfser* als die negative Fläche BDF, so ist $\Delta\psi(AB)$ *positiv*. Und damit auch $\Delta\psi(AP)$ und alle folgenden Werthe von $\Delta\psi x$ ebenfalls positiv bleiben, darf nur beim Fortrücken von B nach P und von C nach Q der etwaige Ueberschufs der hinzukommenden negativen Fläche CQN über die abgehende negative Fläche $BPMF$ den Ueberschufs der positiven Fläche DGC über die ursprüngliche negative Fläche BDF nicht übersteigen. Dieses ist offenbar immer möglich; ja es kann sogar die rechts hinzukommende negative Fläche immer *kleiner* sein, als die links abgehende negative Fläche, wie es ungefähr in der Figur wirklich der Fall sein wird: so kann sogar $\Delta\psi x$ nicht blofs für alle Werthe von x, von $x = AB$ bis $x = x + k = AE$, *positiv* sein, sondern noch obendrein immerfort *wachsen*. Gleichwohl kann $\psi(x+k) - \psi x$ oder die Summe der drei Flächen DGC, BDF und CNE ***nicht*** positiv sondern vielmehr *negativ* sein; denn es ist dazu nur nöthig, dafs die negative Fläche BDF nur wenig kleiner sei als die positive Fläche DGC: denn alsdann wird der Ueberschufs von DGC und BDF sehr bald, rechts von C ab, durch die neue negative Fläche mehr als aufgehoben werden, und folglich wird dann

die Summe der *drei* Flächen *DGC, BDF* und *CNE*, das heifst $\psi(x+k)$ $-\psi x$, *nicht* mehr positiv sondern negativ sein.

Also ist, *erstlich*, wenn gleich $\Delta\psi x$ oder $\psi(x+\alpha)-\psi x$ für alle Werthe von x, von $x=AB$ bis $x=x+k=AE$, *positiv* ist, ja sogar dann, wenn es immerfort *wächst*, $\psi(x+k)-\psi x$, in dem Falle wo α *nicht* in k aufgeht, noch keineswegs nothwendig ebenfalls *positiv*, und ist folglich keineswegs nothwendig *dasselbe Zeichen* wie $\Delta\psi x$; und folglich findet auch der Grenzen-Ausdruck für den Rest φx in (§. 6.), wenn α nicht in k aufgeht, nicht nothwendig Statt.

Zweitens wird auch nicht immer nothwendig nach (46.) $\psi(x+k)$ $-\psi x$ durch $k.\frac{\Delta\psi(x+\lambda k)}{\alpha}$ ausgedrückt, wenn α von k kein aliquoter Theil ist. Denn $\frac{\Delta\psi x}{\alpha}$ ist nichts anders als irgend eine *mittlere Ordinate* der Fläche $\Delta\psi x$, die, mit α multiplicirt, die Fläche $\Delta\psi x$ giebt. Diese mittlere Ordinate ist nothwendig irgend eine der Ordinaten der Fläche selbst und mufs in ihrem Umfange anzutreffen sein. Denn multiplicirt man die *gröfste* der Ordinaten der Fläche mit α, so wird man eine gröfsere Fläche als $\Delta\psi x$, und multiplicirt man die *kleinste* der Ordinaten mit α, so wird man eine kleinere Fläche als $\Delta\psi x$ erhalten, gleich viel, ob die Ordinaten positiv, oder negativ, oder zum Theil das eine, zum Theil das andere sind. Die *mittlere* Ordinate $\frac{\Delta\psi x}{\alpha}$, welche, mit α multiplicirt, die Fläche $\Delta\psi x$ giebt, mufs also nothwendig *zwischen* der gröfsten und der kleinsten Ordinate liegen. Und da nun vorausgesetzt wird, dafs ψx und folglich auch die Ordinaten nur *stetig* sich verändern, mithin die Ordinaten ohne Unterbrechung der Stetigkeit von der kleinsten zu der gröfsten übergehen: so mufs die *mittlere* Ordinate nothwendig in dem Umfange der Fläche selbst anzutreffen sein. Nun kann, wie vorhin gezeigt, $\Delta\psi x$ für jeden Werth von x, von $x=AB$ bis $x=AE$, ununterbrochen *positiv* sein, während gleichwohl $\psi(x+k)-\psi x$ *negativ* ist. Also ist $\frac{\Delta\psi x}{\alpha}$ für jeden Werth von x, von x bis $x+k$, folglich auch $\frac{\Delta\psi(x+\lambda k)}{\alpha}$ und mithin auch $k.\frac{\Delta\psi(x+\lambda k)}{\alpha}$ nothwendig eine *positive* Gröfse. Gleichwohl kann $\psi(x+k)-\psi x$ *negativ* sein, und daher ist, im Falle α in k nicht aufgeht, nicht, wie in (46.), nothwendig $\psi(x+k)-\psi x=\frac{k\Delta\psi(x+\lambda k)}{\alpha}$. Also fin-

det auch der Grenzen-Ausdruck des Restes (83.) im (§. 8.), wenn α in k nicht aufgeht, nicht nothwendig Statt.

10.

Der Fall, wenn α in k aufgeht, ist der, wenn die Differenzen-Reihe (9.) oder (14.) *abbricht*. Denn wenn, z. B. wie oben, $k = m\alpha$ ist, so ist das $m+2^{te}$ Glied der Reihe Null und alle folgenden sind es, weil sie alle den Factor $k - m\alpha = k - k = 0$ enthalten. Mithin bleiben nur die $m+1$ ersten Glieder der Reihe, und sie läuft nicht ohne Ende fort. Die Grenzen-Ausdrücke (§. 7. und 8.) für die allgemeine Taylorsche Reihe, die nur gelten, wenn α ein aliquoter Theil von k ist, finden also auch nur dann Statt, wenn die Reihe *abbricht*.

Sollten sie auch für den Fall geltend gemacht werden, wo α nicht in k aufgeht und wo also die Reihe ohne Ende fortläuft, so müfste noch eine solche Bedingung hinzukommen, dafs in (§. 4.) $\psi(x+k) - \psi x$ nothwendig das nemliche Zeichen hat wie $\Delta\psi x = \psi(x+\alpha) - \psi x$, und zwar für jeden Werth von x, von x bis $x+k$.

Diese Bedingung wäre offenbar die, dafs nicht sowohl $\Delta\psi x$ oder die *Fläche* zwischen der Curve, der Axe und den beiden zu x und $x+\alpha$ gehörigen Ordinaten, sondern vielmehr die *Ordinaten* dieser Fläche, und folglich die Ordinaten überhaupt, von x bis $x+k$ das Zeichen nicht ändern dürfen, so dafs also die Curve ganz, von B bis K, nur entweder über, oder nur unter der Axe läge; denn dann hat nicht blofs $\Delta\psi x$ stets dasselbe Zeichen, sondern auch die ganze Fläche $\psi(x+k) - \psi x$ hat offenbar eben das Zeichen wie $\Delta\psi x$, und folglich finden dann die Ausdrücke der Grenzen des Restes in (§. 7. und 8.) Statt.

Die *Ordinaten* der Fläche ψx werden durch den *Differential-Coefficienten* $d\psi x$ ausgedrückt. Man müfste also den *Differential-Coefficienten* $d\Phi x$ des Restes kennen, um an dem Ausdrucke desselben zu sehen, ob er sein Zeichen ändere, oder nicht.

Um denselben zu finden, müfste man entweder die Reihe (9. oder 14.) differentiiren, um daraus $d\Phi x$ zu nehmen, oder man müfste den Ausdruck (10.) des Restes selbst differentiiren. Eine Function differentiiren heifst aber nichts anders, als in derselben überall etwa $x+\beta$ statt x setzen, von dem Resultate die Function wieder abziehen, den Rest durch β dividiren und darauf $\beta = 0$ setzen. Man würde also den Differential-Coef-

ficienten $d\varphi x$ des Restes φx zunächst dadurch erhalten, daſs man überall $x+\beta$ statt x setzte und von dem Ergebniſs das Ursprüngliche wieder abzöge. Nun bedeutet $\Delta^n Fx$, oder die n^{te} Differenz von Fx, daſs $x+\alpha$ statt x in Fx gesetzt, Fx abgezogen, darauf wieder in dem Ergebniſs $x+\alpha$ gesetzt, das Ursprüngliche abgezogen, und so diese Operation $n$mal wiederholt werden soll. Es ist aber offenbar gleichgültig, ob man diese Operationen zuerst an Fx macht, darauf in dem Resultate noch $x+\beta$ statt x setzt und das Ursprüngliche davon wieder abzieht, oder ob man, umgekehrt, erst in Fx selbst $x+\beta$ statt x setzt, davon Fx abzieht und an dem Reste die Operation mit α macht. Also ist allgemein

$$84.\quad d\Delta^n Fx = \Delta^n dFx,$$

desgleichen auch für (14.)

$$85.\quad dD^n y_x = D^n dy_x.$$

Diesemnach würde also, da $dF(x+k)$ oder $dF\alpha = 0$ ist, die Differentiation von (14.) Folgendes geben:

$$86.\quad d\varphi x = -dy_x - k_1 D dy_x - k_2 D^2 dy_x \ldots\ldots - k_n D^n dy_x$$
$$- Dy_x dx_1 - D^2 y_x dk_2 \ldots\ldots - D^n y_x dk_n.$$

Die Differentiation des Ausdrucks des Restes selbst (10.) würde, da

$$87.\quad d\left(\frac{F\alpha - Fx}{\alpha - x}\right) = -\frac{dFx}{\alpha - x} + \frac{F\alpha - Fx}{(\alpha - x)^2} = \frac{F\alpha - Fx - (\alpha - x)dFx}{(\alpha - x)^2}$$

ist,

$$88.\quad d\varphi x = \frac{d[k.k-\alpha.k-2\alpha \ldots\ldots k-n\alpha]}{2.3\ldots\ldots n\alpha^n}\,\Delta^n\frac{F\alpha - Fx}{\alpha - x}$$
$$+\frac{k.k-\alpha.k-2\alpha\ldots\ldots k-n\alpha}{2.3\ldots\ldots n\alpha^n}\cdot\left(\frac{F\alpha - Fx - (\alpha - x)dFx}{(\alpha - x)^2}\right)$$

geben.

Beide Ausdrücke von $d\varphi x$ würden aber, schon wegen der Differentiation der Facultäten, sehr verwickelt und also das Kennzeichen schwierig sein. Folglich würden die Grenz-Ausdrücke in (§. 7. und 8.) für den Rest der Differenzen-Reihe, in dem Falle daſs die Reihe ohne Ende fortläuft, immer nur wenig brauchbar sein.

Sie sind gleichwohl an sich, obgleich sie nur für eine endliche Reihe gelten, immer noch interessant genug und können vielfältig nützlich sein, da sich daraus, wenn man nicht alle Glieder der Reihe berechnen will, die Summe der übrigen weggelassenen Glieder beurtheilen läſst.

11.

In dem Falle, wenn man das ganz willkürliche α gleich Null setzt, geht die allgemeine Taylorsche oder Differenzen-Reihe (9. oder 14.) in die besondere oder eigentlich sogenannte Taylorsche oder Differential-Reihe (21.) über, und zwar unter den in (§. 2.) angezeigten Bedingungen (25.), auf die Weise, daſs allgemein

89. $d^n Fx$ statt $\frac{d^n Fx}{\alpha^n}$ in (9.) oder $d^n y_x$ statt $D^n y_x$ in (14.) und

90. $\frac{k^n}{2.3\ldots.n}$ statt $\frac{k.k-\alpha.k-2\alpha\ldots.k-(n-1)\alpha}{2.3\ldots.n}$ in (9.), oder statt k_n in (14.) oder auch statt $(k-\alpha)_n$

geschrieben werden darf.

Nun geht, wenn $\alpha = 0$ ist, α in k *immer auf*. Also gelten für diesen Fall die Rest-Ausdrücke in (§. 6. 7. 8.) wirklich; auch in dem Falle, wenn die Reihe ohne Ende fortläuft.

Sie sind alsdann gemäfs (89. und 90.) folgende.

Erstlich, nach (§.6.). Der gröſste und der kleinste Werth des ersten Gliedes

91. $$\frac{k^{n+1}}{2.3\ldots.n+1}\, d^{n+1}Fx,$$

auf die Weise genommen, daſs man x *nur* in $d^{n+1}Fx$, nicht in k^{n+1}, von x bis $x+k$ veränderlich setzt, sind Grenzen für den Rest φx oder für die Summe aller auf das Glied $\frac{k^n}{2.3\ldots.n}\, d^n Fx$ folgenden Glieder, unter der Bedingung, daſs Δk_{n+1}, oder auch $\frac{\Delta k_{n+1}}{\alpha} = -(k-\alpha)_n$ (62.), also hier $\frac{k^n}{2.3\ldots.n}$, sein Zeichen nicht ändert, von 0 bis k; welche Bedingung aber von selbst erfüllt wird, wenn k *nur* positiv, oder *nur* negativ ist.

Dieses ist die gewöhnliche Form des Rest-Ausdrucks.

Zweitens, nach (§. 7.). Der gröſste und der kleinste Werth von

92. $$\frac{k^n}{2.3\ldots.n}(d^n Fx - d^n F(x+k)),$$

auf die Weise genommen, daſs man x nur in k^n, nicht in $d^n F(x+k)$, von x bis $x+k$, also k von k bis 0 sich verändern läſst, sind Grenzen für den Rest φx, unter der Bedingung, daſs $d^{n+1}Fx$ sein Zeichen nicht ändert, von x bis $x+k = \alpha$. Und da für $k=0$ die Gröſse (92.) 0 ist,

so liegt der Rest überhaupt

$$93. \quad \text{zwischen } 0 \text{ und } \frac{k^n}{2.3\ldots n}(d^n Fx - d^n F(x+k)).$$

Diese Art des Grenzen-Ausdrucks für die besondere Taylorsche Reihe, so wie die analoge für die Differenzen-Reihe, ist meines Wissens bis jetzt nicht ausdrücklich bemerkt worden.

Drittens nach (§. 8.). Der Ausdruck (83.), welcher hier, nemlich für $\alpha = 0$, in

$$94. \quad \varphi x = \frac{k\varkappa^n}{2.3\ldots n} d^{n+1} F(x+k-\varkappa)$$

übergeht, giebt Grenzen für den Rest der Reihe dadurch, dafs die unbestimmte Gröfse $\varkappa$ die Grenzen 0 und $\varkappa$ nicht überschreiten darf, und unter der Bedingung, dafs Fx nur stetig sich verändere.

In dieser Form hat insbesondere Cauchy den Rest-Ausdruck aufgestellt.

12.

Obgleich nun die *Grenzen-Ausdrücke* für die *allgemeine Taylorsche Reihe* mit Differenzen, statt Differentialen, nur für den Fall gelten, wenn α in k aufgeht: also der Betrag des Restes der Reihe im Allgemeinen nur in dem Falle sich schätzen läfst, wenn die Reihe *abbricht,* nicht wenn sie *ohne Ende* fortläuft: so ist gleichwohl *die Reihe selbst,* die immer in ihrer vollen Allgemeinheit Statt findet, es mag α in k aufgehen, oder nicht, zur Entwicklung von Functionen häufig, und öfters vorzugsweise anwendbar und nützlich, und giebt, was häufig der Fall ist, die Entwicklung leichter, als die besondere Taylorsche Reihe, und fast unmittelbar. Ob aber die gefundene Reihe convergire, oder nicht, kann man dann mit Hülfe der *besondern* Taylorschen Reihe beurtheilen. Denn wendet man *beide* Reihen auf eine und dieselbe Function an, so mufs man nothwendig auch eine und dieselbe Entwicklung erhalten, und folglich mufs das, was die Reihe mit Differenzen giebt, nothwendig rückwärts auch die Ausdrücke der Differential-Coefficienten (etwa in Beziehung auf die Veränderlichkeit eines andern Elementes der Function genommen) enthalten und folglich diese Coefficienten unmittelbar geben. Die durch die Differenzen-Reihe gefundene Entwicklung mufs identisch zugleich die Reihe selbst sein, welche die besondere Taylorsche Reihe mit Differentialen gegeben haben würde, wenn man sich ihrer statt der Differenzen-Reihe zur Entwicklung bedient hätte. Man kann also dann auch

ohne weiteres die Convergenz der gefundenen Reihe nach den Kennzeichen (§. 11.) beurtheilen, es mag α in k aufgegangen sein oder nicht.

Um dies näher zu erläutern, möge die Entwicklung einer beliebigen Potenz eines *Binomiums*, oder der sogenannte *binomische Lehrsatz*, zum Beispiel genommen werden.

Es sei

95. $$Fx = u^x$$

nach dem allgemeinen Taylorschen Satze mit Differenzen zu entwickeln.

Man findet

96. ΔFx, das heifst $F(x+\alpha)-Fx = u^{x+\alpha}-u^x = u^x(u^\alpha-1)$,

und daraus folgt unmittelbar

97. $$\begin{cases} \Delta^2 Fx = \Delta Fx = \Delta u^x(u^\alpha-1) = u^x(u^\alpha-1)^2, \\ \Delta^3 Fx = \Delta.\Delta^2 Fx = u^x(u^\alpha-1)^3, \\ \Delta^4 Fx = \Delta.\Delta^3 Fx = u^x(u^\alpha-1)^4, \\ \dots\dots\dots\dots \\ \Delta^n Fx = u^x(u^\alpha-1)^n. \end{cases}$$

Also ist zufolge der allgemeinen Entwicklungs-Reihe (9.)

98. $$\begin{aligned} F(x+k) &= u^{x+k} = u^x.u^k \\ &= u^x\Big[1+\frac{k}{\alpha}(u^\alpha-1)+\frac{k.k-\alpha}{2\alpha^2}(u^\alpha-1)^2 \\ &\quad +\frac{k.k-\alpha.k-2\alpha}{2.3\alpha^3}(u^\alpha-1)^3\dots\dots\dots \\ &\quad \dots+\frac{k.k-\alpha\dots k-(n-1)\alpha}{2.3\dots n\alpha^n}(u^\alpha-1)^n\Big] \\ &\quad +\frac{k.k-\alpha.k-2\alpha\dots k-n\alpha}{2.3\dots n\alpha^n}\Delta^n\Big(\frac{u^{x+k}-u^x}{k}\Big); \end{aligned}$$

und dieser Ausdruck findet in der höchsten Allgemeinheit Statt, was auch immer u, x und k sein mögen: Rationales, Irrationales, oder selbst Imaginäres; denn er ist nichts weiter als eine *identische* Verwandlung der zu entwickelnden Gröfse u^{x+k}.

Setzt man hierin $x=0$, so dafs $u^x=1$ ist, und ferner das ganz willkürliche $\alpha=1$, so erhält man

99. $$\begin{aligned} u^k &= 1+k(u-1)+\frac{k.k-1}{2}(u-1)^2+\frac{k.k-1.k-2}{2}(u-1)^3\dots\dots \\ &\quad \dots+\frac{k.k-1.k-2\dots k-(n-1)}{2.3\dots n}(u-1)^n+\frac{k.k-1.k-2\dots k-n}{2.3\dots n}\Delta^n\Big(\frac{u^k-1}{k}\Big). \end{aligned}$$

Setzt man endlich in diesem Ausdrucke

100. $$u = 1+\frac{\beta}{z},$$

so erhält man

$$\left(1+\frac{\beta}{z}\right)^k = 1+\frac{k\beta}{z}+\frac{k.k-1}{2.3}.\frac{\beta^2}{z^2}+\frac{k.k-1.k-2}{2.3}.\frac{\beta^3}{z^3}\,\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots+\frac{k.k-1.k-2\,\ldots.\,k-(n-1)}{2.3\,\ldots.\,n}.\frac{\beta^n}{z^n}$$

$$+\frac{k.k-1.k-2\,\ldots.\,k-n}{2.3\,\ldots.\,n}\,\Delta^n\left(\frac{(z+\beta)^k-z^k}{kz^k}\right)$$

oder

101. $$(z+\beta)^k = z^k+kz^{k-1}\beta+\frac{k.k-1}{2}z^{k-2}\beta^2+\frac{k.k-1.k-2}{2.3}z^{k-3}\beta^3\,\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots+\frac{k.k-1\,\ldots.\,k-(n-1)}{2.3\,\ldots.\,n}z^{k-n}\beta^n$$

$$+\frac{k.k-1.k-2\,\ldots.\,k-n}{2.3\,\ldots.\,n}z^k\Delta^n\left(\frac{(z+\beta)^k-z^k}{kz^k}\right);$$

und dieses ist der *binomische Lehrsatz* in der höchsten Allgemeinheit.

Er ergiebt sich, wie man sieht, aus der allgemeinen Entwicklungsreihe mit Differenzen *unmittelbar*, ohne alle Voraussetzung und Bedingung, blofs durch eine *identische* Verwandlung.

Die *Convergenz* dieser Reihe kann nun freilich nicht allgemein nach den obigen Kennzeichen (6. 7. und 8.) beurtheilt werden, weil $\alpha=1$ gesetzt worden ist und also, wenn k keine *ganze* Zahl ist, in k nicht aufgeht. Sie würde sich nur dann schätzen lassen, wenn die Reihe, wie es für einen ganzzahligen Exponenten k der Fall ist, abbricht.

Aber offenbar würde man identisch auch Dasselbe für die Gröfse $(z+\beta)^k$ (101.) erhalten müssen, wenn man sich zur Entwicklung derselben, statt der allgemeinen Taylorschen Reihe mit *Differenzen*, der besondern Taylorschen Reihe mit *Differentialen* (21.) bediente.

Für diese Reihe würde hier

102. $x=z$, $Fx=z^k$ und β so viel als dort k sein.

Also würde zufolge (21.)

103. $$F(x+k) = (z+\beta)^k$$

$$= z^k+\beta dz^k+\frac{\beta^2}{2}d^2z^k+\frac{\beta^3}{2.3}d^3z^k\,\ldots\ldots\ldots+\frac{\beta^n}{2.3\,\ldots.\,n}d^nz^k$$

$$+\frac{\beta^{n+1}}{2.3\,\ldots.\,n+1}\,d^n\left(\frac{(z+\beta)^k-z^k}{kz^k}\right)$$

sein.

Nun ist aber dFz, oder hier dz^k, nichts anders als

$$\frac{\Delta Fz}{\alpha} = \frac{F(z+\alpha)-Fz}{\alpha} \text{ für } \alpha=0,$$

das heifst, es ist

104. $$dz^k = \frac{(z+\alpha)^k-z^k}{\alpha} \quad \text{für } \alpha = 0.$$

Nach (101.) ist, α statt β geschrieben,

105. $$(z+\alpha)^k = z^k + kz^{k-1}\alpha + \frac{k.k-1}{2}z^{k-2}\alpha^2 + \frac{k.k-1.k-2}{2.3}z^{k-3}\alpha^3 \dots$$
$$\dots + \frac{k.k-1.k-2\dots k-(n-1)}{2.3\dots n}z^{k-n}\alpha^n \dots\dots$$ ins Unendliche, oder bis zu Ende,

und dieses giebt

106. $$\frac{(z+\alpha)^k - z^k}{\alpha} = kz^{k-1} + \frac{k.k-1}{2}z^{k-2}\alpha + \frac{k.k-1.k-2}{2.3}z^{k-3}\alpha^2 \dots$$
$$\dots + \frac{k.k-1.k-2\dots k-(n-1)}{2.3\dots n}z^{k-n}\alpha^{n-1} \dots\dots :$$

also ist für $\alpha = 0$, weil alle Glieder rechts, nach dem ersten, bis ins Unendliche, oder wenn die Reihe abbricht, bis zu Ende, α zum Factor haben,

107. $$\frac{(z+\alpha)^k - z^k}{\alpha} \text{ für } \alpha = 0, \text{ das heifst } dz^k = kz^{k-1};$$

und zwar für jeden beliebigen Werth von k.

Daraus folgt unmittelbar

108. $$\begin{cases} dz^{k-1} = k-1.z^{k-2}, & \text{also } d^2z^k = k.k-1.z^{k-2}; \\ dz^{k-2} = k-2.z^{k-3}, & \text{also } d^3z^k = k.k-1.k-2.z^{k-3}; \\ \dots\dots & \dots\dots \\ dz^{k-(n-1)} = (k-(n-1))z^{k-n}, & \text{also } d^nz^k = k.k-1.k-2\dots \\ & \dots (k-(n-1))z^{k-n} \end{cases}$$

und dieses giebt, in (103.) gesetzt,

109. $$(z+\beta)^k = z^k + kz^{k-1}\beta + \frac{k.k-1}{2}z^{k-2}\beta^2 + \frac{k.k-1.k-2}{2.3}z^{k-3}\beta^3 \dots$$
$$\dots + \frac{k.k-1.k-2\dots k-(n-1)}{2.3\dots n}z^{k-n}\beta^n$$
$$+ \frac{\beta^{n+1}}{2.3\dots n+1}d^n\left(\frac{(z+\beta)^k - z^k}{kz^k}\right).$$

Diese Reihe für $(z+\beta)^k$ ist, wie gehörig, wieder genau dieselbe wie die (101.), welche die allgemeine Entwicklungsreihe mit Differenzen gab; nur mit dem Unterschiede, dafs der Rest jetzt anders ausgedrückt ist, und dafs der Werth desselben nunmehr geschätzt werden kann, weil jetzt $x = 0$ gesetzt worden ist; und zwar nach den Kennzeichen (§. 11.).

Die allgemeine Entwicklungsreihe mit Differenzen statt Differentialen hatte also hier allerdings ihren Nutzen. Sie gab die Reihe selbst, für $(z+\beta)^k$ *unmittelbar,* und darauf, vermittelst ihres Resultats, den Werth der Differential-Coefficienten von z^k, in Beziehung auf die Veränderung des andern Elements z oder u in $Fx = u^x$, ebenfalls unmittelbar.

Berlin im März 1839.

19.

Geometrische Eigenschaften einer Factorentafel.

(Von Herrn Professor *A. F. Möbius* in Leipzig.)

Man theile die Ebene des Papiers durch horizontale und verticale Linien in quadratförmige Fächer. In die oberste horizontale Fächerreihe schreibe man von der Rechten nach der Linken die Zahlen 0, 1, 2, 3, ... in ihrer natürlichen Ordnung. Wir wollen diese Reihe die Hauptreihe nennen. In jedes Fach der darunter liegenden horizontalen Reihe schreibe man 1. In jedes Fach der nächstfolgenden Reihe, welches unter einer Zahl der Hauptreihe liegt, die durch 2 theilbar ist, setze man 2. Eben so schreibe man in alle Fächer der folgenden Reihe, welche unter den durch 3 theilbaren Zahlen der Hauptreihe liegen, die Zahl 3; u. s. w. (Siehe Fig. 2.)

Auf solche Weise erhält man eine Factorentafel, indem unter jede Zahl der Hauptreihe in verticaler Linie keine andern Zahlen als die Factoren jener Zahl, sie selbst und die Einheit mit gerechnet, zu stehen kommen.

Eine solche Anordnung der Factoren, die für die Praxis allerdings nicht die geeignetste, in theoretischer Hinsicht aber die naturgemäfseste sein dürfte, besitzt nun zugleich mehrere merkwürdige geometrische Eigenschaften. Die Entwicklung derselben ist der Zweck dieses Aufsatzes.

Es werde deshalb vorläufig bemerkt, dafs, wenn im Folgenden gesagt wird, eine Linie gehe durch eine gewisse Zahl, oder eine Zahl liege in einer gewissen Linie, unter der Zahl immer nur der Mittelpunct des Feldes verstanden werden soll, in welchem die Zahl sich befindet. Um ferner die unter sich gleichen Zahlen einer und derselben Horizontalreihe ihrem Orte nach von einander zu unterscheiden, soll hier im Texte an jede Zahl als Index noch die Zahl der Hauptreihe beigefügt werden, unter welcher erstere anzutreffen ist. Hiernach werden z. B. die Dreien in der 3ten Reihe unter der Hauptreihe characterisirt durch 3_0, 3_3, 3_6, 3_9 u. s. w., und allgemein die Zahl a in der $a$ten Reihe durch a_0, a_a, a_{2a}, a_{3a}, ... a_{ma}, ..., weil sie unter den Zahlen 0, a, $2a$, $3a$, ... ma, ... der Hauptreihe stehen. Zugleich sieht man hieraus, wie der Index einer Zahl immer sie selbst zum Factor hat und wie eine Zahl und ihr Index als

Ordinate und Abcisse des Mittelpunctes des Feldes der Zahl gelten können, indem man die horizontale Mittellinie der Hauptreihe zur Abcissenlinie, den Mittelpunct des Feldes, welches die Null enthält, zum Anfangspuncte eines rechtwinkligen Coordinatensystems und die Seite eines der quadratförmigen Felder zur Linien-Einheit wählt.

Die Grund-Eigenschaft der Factorentafel, aus welcher sich alle übrigen herleiten lassen, besteht nun darin, dafs die Gerade durch zwei Zahlen a_{ma} und b_{nb} in verschiedenen Horizontalreihen und die Gerade durch die gleichvielten in diesen Reihen darauf folgenden Zahlen $a_{(m+r)a}$ und $b_{(n+r)b}$ die Abcissenlinie in demselben Puncte treffen.

In der That haben die Zahlen a_{ma} und $a_{(m+r)a}$ gleiche Ordinaten, $= a$, und die Differenz ihrer Abcissen ist $= ra$, d. h. jede von ihnen ist um eine Weite $= a$ von der Abcissenlinie entfernt, und ihr gegenseitiger Abstand ist $= ra$. Eben so ist jede der Zahlen b_{nb} und $b_{(n+r)b}$ um b von der Abcissenlinie entfernt, und ihr gegenseitiger Abstand ist $= rb$. Es verhalten sich daher ihre gegenseitigen Abstände ra und rb wie ihre Entfernungen a und b von der Abcissenlinie; woraus das Uebrige von selbst fliefst.

Eine unmittelbare Folge hiervon ist, dafs, wenn drei oder mehrere an sich verschiedene Zahlen in vier Geraden sind, man wiederum auf Zahlen in einer Geraden kommen wird, wenn man von jeder der erstern in ihrer Horizontalreihe um gleichviel Zahlen nach einerlei Seite zu weiter geht, und dafs beide Geraden sich in der Abcissenlinie schneiden. So müssen z. B., weil die Zahlen $1_0, 2_0, 3_0, 4_0, \ldots$ in einer Verticale unter dem Nullpuncte liegen, auch die Zahlen

$$1_1,\ 2_2,\ 3_3,\ 4_4,\ \ldots,$$

desgleichen

$$1_2,\ 2_4,\ 3_6,\ 4_8,\ \ldots$$

$$1_3,\ 2_6,\ 3_9,\ 4_{12},\ \ldots$$

u. s. w. u. s. w.

in Geraden liegen, welche sämmtlich auf den Nullpunct treffen. Man sieht hieraus, wie alle Zahlen der Tafel in Reihen, deren jede die Zahlen 1, 2, 3, ... in der natürlichen Folge enthält, und welche vom Nullpuncte divergirend ausgehen, sich zusammennehmen lassen. Auch bieten sich diese Reihen beim ersten Anblicke der Tafel dar.

Die unter einer Zahl der Hauptreihe, etwa unter 8, stehenden Zahlen $1_8, 2_8, 4_8, 8_8$ oder $1_{8.1}, 2_{4.2}, 4_{2.4}, 8_{1.8}$ sind die Factoren jener Zahl 8. Es müssen daher mit 8 in gerader Linie auch die Zahlen

$1_{(8+r)1}$, $2_{(4+r)2}$, $4_{(2+r)4}$, $8_{(1+r)8}$

sein, und keine andern; also, wenn wir r nach und nach $= -2, -1, 1, 2, \ldots$ setzen, die Zahlen

1_6, 2_4, 4_0; 1_7, 2_6, 4_4, 8_0;

1_9, 2_{10}, 4_{12}, 8_{16}; 1_{10}, 2_{12}, 4_{16}, 8_{24}; u. s. w.

Eine Gerade, die man durch eine Zahl (8) der Hauptreihe und einen ihrer Factoren zieht, — stehe dieser vertical unter ihr, oder seitwärts (2_{12}), — trifft daher auch die übrigen Factoren (1_{10}, 4_{16}, 8_{24}), und keine anderen Zahlen; oder was zum Theil dasselbe sagt: Eine Gerade, gelegt durch irgend eine Zahl a_{ma} der Tafel und durch eine der Zahlen der Hauptreihe, welche ein Vielfaches von a ist, wie ab, trifft die vervielfachende Zahl b_{nb}.

Der Coefficient n im Index nb von b ist offenbar eine von a, b und m abhängige Zahl. Um diese Abhängigkeit zu bestimmen, erwäge man, dafs mit der Zahl ab der Hauptreihe die Zahlen a_{ba} und b_{ab} ebenfalls in einer Geraden liegen, nämlich in einer Verticalen, weil die Indices letzterer Zahlen der Zahl ab der Hauptreihe selbst gleich sind. Es müssen daher in der horizontalen Reihe der a zwischen a_{ba} und a_{ma} eben so viele a, als b in der Reihe der b zwischen b_{ab} und b_{nb}, vorkommen, d. h. es mufs $m-b=n-a$ sein, wodurch $n=m+a-b$ wird. Die Gerade durch die Zahl a_{ma} und durch ihr Vielfaches ab in der Hauptreihe, trifft demnach die vervielfachende Zahl $b_{(m+a-b)b}$.

Die Geraden, welche die Zahl a_{ma} mit den Zahlen $1a$, $2a$, $3a$, … … aa, …. der Hauptreihe verbinden, treffen daher resp. die Zahlen

(*A.*) 1_{m+a-1}, $2_{(m+a-2)2}$, $3_{(m+a-3)3}$, …. a_{ma}, etc.

Man kann die somit nach ihrer Stellung in der Tafel bestimmten Zahlen 1, 2, 3, 4, …. die zur Zahl a_{ma} gehörigen Zahlen nennen. Sie gehören ihr aber nach dem Gesetze zu, dafs eine Gerade, welche eine der erstern mit der letztern verbindet, die Hauptreihe in dem Producte beider trifft; wobei noch zu bemerken ist, dafs die zu a_{ma} gehörige Zahl a auch dem Orte nach mit ersterer zusammenfällt.

Soll die Zahl b_{nb} zur Zahl a_{ma} gehören, so mufs, dem Vorigen zufolge, $m+a=n+b$ sein; und eben so mufs, wenn a_{ma} und c_{pc} zusammengehörige Zahlen sein sollen, $m+a=p+c$ sein. Gehört demnach jede von zwei Zahlen b_{nb} und c_{pc} zu einer und derselben dritten a_{ma}, so ist auch $n+b=p+c$, und sie gehören folglich auch zu einander; oder mit andern Worten: wenn die zwei Geraden, welche eine Zahl a der

Tafel mit zwei andern Zahlen b und c derselben verbinden, die Hauptreihe in den Producten ab und ac treffen, so begegnet auch die Gerade durch b und c der Hauptreihe in dem Producte bc.

Hiernach sind je zwei Zahlen der Reihe ($A.$) zusammengehörige Zahlen, da jede von ihnen zu a_{ma} gehört, und die Reihe besitzt folglich die merkwürdige Eigenschaft, dafs die Gerade, welche irgend zwei Zahlen derselben verbindet, die Hauptreihe stets in dem Producte der Zahlen trifft.

Dergleichen Reihen sind, wenn man $m+a$ nach und nach $= 6, 7, 8$ setzt:

($a.$) $1_5,\ 2_8,\ 3_9,\ 4_8,\ 5_5,\ 6_0;$

($b.$) $1_6,\ 2_{10},\ 3_{12},\ 4_{12},\ 5_{10},\ 6_6,\ 7_0;$

($c.$) $1_7,\ 2_{12},\ 3_{15},\ 4_{16},\ 5_{15},\ 6_{12},\ 7_7,\ 8_0.$

Schon hieraus erhellet zur Genüge, dafs man in solchen Reihen alle Zahlen der Tafel zusammenfassen kann, und dafs dabei keine Zahl zwei oder mehreren Reihen gemeinschaftlich ist. Denn aus den Zahlen der Reihe (a) ergeben sich die von (b), und aus letztern die von (c), wenn man die Indices von 1, 2, 3, ... resp. um 1, 2, 3, ... vergröfsert, d. h. wenn man statt jeder Zahl die ihr in der Horizontalreihe, worin sie steht, zunächst folgende setzt.

Was noch die geometrische Gestalt der Reihe ($A.$) anlangt, so läfst sich leicht zeigen, dafs alle ihre Zahlen durch eine Parabel verbunden werden können. Da nämlich der Ort einer Zahl durch die Zahl selbst als Ordinate (y) und durch ihren Index als Abscisse (x) bestimmt wird, so hat man zufolge des allgemeinen Ausdruckes für eine Zahl der Reihe:

$$y = b, \qquad x = (c-b)b,$$

wo der Kürze wegen c statt des vorigen $m+a$ gesetzt worden ist. Hieraus folgt aber, nach Elimination des veränderlichen b:

$$x = cy - yy \qquad \text{oder} \qquad x - \tfrac{1}{4}cc = -(\tfrac{1}{2}c - y)^2,$$

welches die Gleichung für eine Parabel ist, deren Parameter $= 1$, $=$ der Seite eines der quadratförmigen Felder der Tafel, deren Axe parallel mit der Abscissenline, d. i. mit der Hauptreihe ist und nach der entgegengesetzten Richtung derselben läuft und deren Scheitel die Coordinaten $x = \tfrac{1}{4}cc$ und $y = \tfrac{1}{2}c$ hat.

Alle Zahlen der Tafel lassen sich demnach in Parabeln zusammenfassen, deren jede die Zahlen von 1 an in ihrer natürlichen Folge enthält. Jede dieser Parabeln hat einen Parameter $= 1$ und eine der

Hauptreihe parallele Axe, und geht durch den Nullpunct der Hauptreihe. Alle zu einer und derselben Parabel gehörigen Zahlen sind aber so gestellt, dafs die durch irgend zwei derselben gelegte Gerade die Hauptreihe in dem Producte beider trifft, und dafs folglich, wenn man eine Zahl mit ihr selbst verbindet, d. h. in dem Puncte der Zahl an die Parabel eine Tangente legt, dieselbe der Hauptreihe in dem Quadrate der Zahl begegnet *).

Das letztere Resultat kann auch unmittelbar aus folgendem leicht erweislichen Satze hergeleitet werden. Zieht man in der Ebene einer Parabel zwei Geraden, von denen die eine parallel mit der Axe ist und daher die Parabel nur in einem Puncte C schneidet, die andere der Parabel in zwei Puncten A und B und der erstern Geraden im Puncte D begegnet, so ist das Product aus den Entfernungen der Puncte A und B von der erstern Geraden gleich dem Producte aus dem Abschnitte CD der erstern in den Parameter.

Mit Hülfe dieses Satzes erhellet zugleich noch die Richtigkeit des folgenden, welcher als der duale Gegensatz des vorhin gewonnenen Resultats angesehen werden kann:

> Alle Zahlen der Tafel lassen sich in geraden Linien zusammenfassen, deren jede die Zahlen von 1 an in ihrer natürlichen Folge enthält. Jede dieser Geraden geht durch den Nullpunct der Hauptreihe. Alle zu einer und derselben Geraden gehörigen Zahlen sind aber so gestellt, dafs eine durch irgend zwei derselben gelegte Parabel, welche einen Parameter $= 1$ und eine der Hauptreihe parallele Axe

---

*) Man könnte hiernach eine Parabel in Verbindung mit einer Geraden, beide auf die oben beschriebene Weise eingetheilt, auch als **Multiplicationsmaschine** benutzen. Ein Lineal, gelegt durch die Theilpuncte der Parabel, an welchem die Factoren stehen, würde die Gerade in dem Theilpuncte des Products treffen.

Bei dieser Gelegenheit mag noch bemerkt werden, dafs zu demselben Zwecke statt der Parabel auch zwei Geraden, die eine für den einen, die andere für den andern Factor, angewendet werden könnten. Es gründet sich dieses darauf, dafs man, wenn die drei Seiten BC, CA, AB eines Dreiecks von einer vierten Geraden resp. in F, G, H geschnitten werden und

$$\frac{BF}{CF} = f, \quad \frac{CG}{AG} = g, \quad \frac{BH}{AH} = h$$

gesetzt wird, $fg = h$ hat. Schreibt man daher an jeden Punct F der Linie BC die durch seine Lage gegen B und C bestimmte Zahl f; eben so an jeden Punct G der Linien CA die Zahl g, und an jeden Punct H der Linie AB die Zahl h, so wird ein durch irgend zwei Zahlen der Linien BC und CA gelegtes Lineal die Linie AB stets in dem Producte dieser Zahlen schneiden.

hat, die Hauptreihe in dem Producte beider trifft, und dafs folglich, wenn man eine Parabel von derselben Gröfse und Lage gegen die Hauptreihe, berührend an eine der geradlinigen Reihen legt, sie der Hauptreihe in dem Quadrate der Zahl begegnet, in welcher sie die geradlinige berührt.

Zusätze. *A.* Da die Coordinaten des Scheitels einer der zuerst gedachten Parabeln $x = \frac{1}{4}cc$ und $y = \frac{1}{2}c$ sind, so liegen die Scheitel aller dieser Parabeln wiederum in einer Parabel, deren Gleichung $x = yy$ ist, also in einer Parabel, deren Parameter gleichfalls $= 1$ ist, deren Axe mit der Abscissenlinie zusammenfällt und die positive Richtung, also die entgegengesetzte der Axen der vorigen Parabeln, hat, und deren Scheitel der Nullpunct ist.

B. Für die vorigen Parabeln hat c die Werthe 1, 2, 3 ...., und es werden daher die Scheitel derjenigen unter ihnen auf Zahlen der Tafel fallen, für welche c eine gerade Zahl ist. Diese Tafelzahlen sind:

$$(\alpha.) \qquad 0_0,\ 1_1,\ 2_4,\ 3_9,\ 4_{16},\ \dots\dots$$
$$\text{für } c = 0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8.$$

Hiermit haben wir zugleich eine neue Reihe (α) von Zahlen kennen gelernt, welche eine Parabel bilden.

C. So wie aus den Zahlen einer der vorigen Parabeln die Zahlen der nächstfolgenden oder vorhergehenden gefunden wurden, indem der Index jeder Zahl um die Zahl selbst vermehrt oder vermindert wurde, so können wir auch aus der Reihe (α.) neue Reihen in Parabeln liegender Zahlen ableiten. Die aus der Vermehrung der Indices entstehenden Reihen sind:

$$1_2,\ 2_6,\ 3_{12},\ 4_{20},\ \dots\dots; \qquad 1_3,\ 2_8,\ 3_{15},\ 4_{24},\ \dots\dots; \text{ u. s. w.}$$

die aus der Verminderung entstehenden:

$$1_0,\ 2_2,\ 3_6,\ 4_{12},\ \dots\dots; \qquad 2_0,\ 3_3,\ 4_8,\ \dots\dots; \text{ u. s. w.}$$

und allgemein:

$$(\beta.) \qquad 1_{c+1},\ 2_{(c+2)2},\ 3_{(c+3)3},\ \dots\dots,$$

wo c auch negativ genommen werden kann; nur dürfen dadurch die Indices nicht negativ werden, so lange wir nicht die Grenzen der im Vorigen construirten Tafel überschreiten wollen.

Wie man sieht, werden auch durch diese Reihen alle Zahlen der Tafel erschöpft. Die allgemeine Gleichung ihrer Parabeln ist:

$$x = cy + yy \quad \text{oder} \quad x + \tfrac{1}{4}cc = (\tfrac{1}{2}c + y)^2.$$

Von allen Parabeln dieses neuen Systems sind daher die Parameter gleichfalls $=1$; die Axen sind mit der Abscissenlinie parallel und haben die positive Richtung derselben; von den Scheiteln sind die Cooordinaten $x=-\frac{1}{4}cc$, $y=-\frac{1}{2}c$, die Scheitel selbst liegen daher in einer Parabel, deren Gleichung $yy=-x$ ist und fallen somit über die Grenze unserer Tafel hinaus; endlich gehen auch hier sämmtliche Parabeln, verlängert, durch den Nullpunct.

D. Um uns von der gegenseitigen Beziehung zwischen diesem neuen und dem vorigen Systeme von Parabeln eine anschaulichere Vorstellung zu verschaffen, wollen wir uns zwei Parabeln *N* und *P* denken, deren jede einen Parameter $=1$ hat, deren Axen in die Abscissenlinie fallen, die der *N* in die negative Seite, die der *P* in die positive, und welche den Anfangspunct der Abscissen zum gemeinschaftlichen Scheitel haben. Wird nun die Parabel *N* so fortbewegt, dafs ihre Axe sich parallel bleibt und ihr Scheitel in der Parabel *P* fortgeht, so kommt sie nach und nach in die Lage aller Parabeln des ersten Systems; wird aber die Parabel *P* parallel mit sich fortbewegt, so dafs ihr Scheitel die Parabel *N* beschreibt, so coïncidirt sie nach und nach mit allen Parabeln des zweiten Systems.

E. Da die Parabeln des zweiten Systems eben so gegen die negative Seite der Abscissenlinie gelegen sind, wie die des ersten Systems gegen die positive Seite, so wird eine Gerade durch zwei Zahlen der Tafel, die zu einer Parabel des zweiten Systems gehören, der Abscissenlinie in ihrer Verlängerung über den Nullpunct nach der Linken begegnen, und zwar ebenfalls in dem Producte der beiden Zahlen, wenn die Zahlen der Hauptreihe über Null hinaus nach der Linken weiter fortgesetzt werden.

F. Aufser den bisher betrachteten zwei Systemen von Parabeln lassen sich die Zahlen der Tafel noch auf unzählig viele andere Arten in Parabeln von kleinern Parametern zusammenfassen. Dies zeigt sich am leichtesten, wenn man die geradlinige Reihe

$$\text{O.}\quad 0_0,\ 1_c,\ 2_{2c},\ 3_{3c},\ \ldots\ a_{ac},\ \ldots$$

mit der parabolischen Reihe

$$\text{I.}\quad 0_0,\ 1_{c-1},\ 2_{2(c-2)},\ 3_{3(c-3)},\ \ldots\ a_{a(c-a)},\ \ldots$$

vergleicht. Man erkennt sogleich, dafs man von den Zahlen 1, 2, 3, ... der Reihe O. zu denselben Zahlen der Reihe I. gelangt, wenn man in den horizontalen Reihen dieser Zahlen um 1, 4, 9, ... aa, ... Felder weiter

zurückgeht. Man kann nun nach demselben Gesetz aus der Reihe I. eine dritte II., aus dieser eine vierte III. u. s. w. ableiten. Dies giebt die Reihen:

$$\text{II.} \quad 0_0, \quad 1_{c-2}, \quad 2_{2(c-4)}, \quad 3_{3(c-6)}, \quad \ldots\ldots \quad a_{a(c-2a)}, \quad \ldots\ldots$$
$$\text{III.} \quad 0_0, \quad 1_{c-3}, \quad 2_{2(c-6)}, \quad 3_{3(c-9)}, \quad \ldots\ldots \quad a_{a(c-3a)}, \quad \ldots\ldots$$

und überhaupt:

$$\text{M.} \quad 0_0, \quad 1_{c-m}, \quad 2_{2(c-2m)}, \quad 3_{3(c-3m)}, \quad \ldots\ldots \quad a_{a(c-am)}, \quad \ldots\ldots$$

Es erhellet ferner ohne weiteres, dafs nicht blofs die erste und zweite Reihe, sondern auch jede der übrigen fähig ist, alle Zahlen der Tafel erschöpfend darzustellen, indem man nämlich für c nach und nach alle Zahlen setzt, für welche man positive Indices erhält.

Um die Curven zu bestimmen, die sich durch die Zahlen der Reihen II., III., ... ziehen lassen, nehme man das allgemeine Glied $a_{a(c-am)}$ der *m*ten Reihe, setze, wie im Vorigen, die Zahl desselben $a = y$, seinen Index $a(c-am) = x$, und eliminire hieraus a. Dies giebt die Gleichung

$$x = cy - myy \text{ oder } \frac{1}{m}\left(x - \tfrac{1}{4}\frac{cc}{m}\right) = -\left(y - \tfrac{1}{2}\frac{c}{m}\right)^2.$$

Von jeder der Reihen, die sich aus (M.) für die verschiedenen Werthe von c ergeben, liegen demnach die Zahlen in einer Parabel, deren Axe, wie bei dem im Obigen zuerst betrachteten Systeme, der Abscissenlinie nach entgegengesetzter Richtung parallel ist. Der Parameter jeder dieser Parabeln ist dem *m*ten Theile der Seite eines Feldes gleich, und die Coordinaten des Scheitels sind $x = \frac{1}{4}\frac{cc}{m}$ und $y = \frac{1}{2}\frac{c}{m}$. Hieraus folgt, nach Elimination von c, $yy = \frac{x}{m}$, als die Gleichung für die Curve der Scheitel. Die Scheitel sämmtlicher Parabeln liegen daher in einer Parabel, die ihnen gleich ist, aber die entgegengesetzte Lage hat, und deren Scheitel in den Anfangspunct fällt.

Endlich ist nach dem oben angeführten Satze von der Parabel das Product aus zwei Zahlen der Reihe (M.) gleich dem Producte aus dem Parameter in die Zahl der Hauptreihe, in welcher die H. Reihe von einer durch erstere beide Zahlen gelegten Geraden geschnitten wird; d. h. die Hauptreihe wird von dieser Geraden in dem *m*fachen des Productes der beiden Zahlen geschnitten.

So liegen z. B. die Zahlen jeder der durch II. dargestellten Reihen in einer Parabel, deren Parameter $= \frac{1}{2}$ ist. Diejenige dieser Reihen, für

welche $c = 11$ ist, besteht aus den Zahlen

$$0_0, \quad 1_9, \quad 2_{14}, \quad 3_{15}, \quad 4_{12}, \quad 5_6,$$

und es wird daher z. B. die Gerade durch 2_{14} und 3_{15} die Hauptreihe in dem doppelten Producte aus 2 in 3, d. i. in 12 treffen.

G. Eben so, wie jetzt aus den Reihen O. und I. die folgenden II., ... M. .... hergeleitet wurden, kann man auch in entgegengesetzter Richtung zu neuen Reihen I*., II*., ... M*., ... fortgehen, von denen jede aus der vorhergehenden, I*. aus O., II*. aus I*., u. s. w. auf gleiche Art, wie O. aus I., entspringt. Die Reihen I*. und M*. werden hiernach sein:

$$\text{I*.} \quad 0_0, \quad 1_{c+1}, \quad 2_{2(c+2)}, \quad \ldots\ldots \quad a_{a(c+a)}, \quad \ldots\ldots$$

$$\text{M*.} \quad 0_0, \quad 1_{c+m}, \quad 2_{2(c+2m)}, \quad \ldots\ldots \quad a_{a(c+am)}, \quad \ldots\ldots$$

Die Reihe I*. ist folglich einerlei mit der obigen (β.), so dafs das System von Reihen, welches man aus I*. für die verschiedenen Werthe von c erhält, dasselbe ist, welches wir oben als das zweite bezeichneten. Hinsichtlich der übrigen Reihen reicht es hin zu bemerken, dafs M*. zu M. in derselben Beziehung wie I*. zu I. steht.

11.

De formatione et proprietatibus Determinantium.

(Auct. C. G. J. Jacobi prof. ord. math. Regiom.)

1.

Sunt quidem notissimi Algorithmi, qui aequationum linearium litteralium resolutioni inserviunt. Neque tamen video eorum proprietates praecipuas, ita breviter enarratas atque in conspectum positas esse, quantum optare debemus propter earum in gravissimis quaestionibus Analyticis usum. Scilicet illae proprietates quamvis elementares non omnes ita tritae sunt, ut quas indemonstratas relinquere deceat et valde molestum est earum demonstrationibus altiorum ratiociniorum decursum interrumpere. Cui defectui hic supplere volo quo commodius in aliis commentationibus ad hanc recurrere possim; neutiquam vero mihi propono totam illam materiam absolvere. Adjeci sub finem Propositiones quasdam ad Methodum minimorum Quadratorum pertinentes, quibus explicetur quomodo incognitarum valores eorumque Pondera, Methodo illa determinata, pendeant a diversis valoribus et ponderibus quae obtinentur pro diversis Combinationibus numeri Observationum numero incognitarum aequalis, qui earum determinationi sufficit. Quae ad computum inutilia, facere tamen possunt ad naturam illorum valorum et Ponderum melius cognoscendam.

2.

Proponatur productum conflatum ex omnibus $\frac{n(n+1)}{2}$ differentiis $n+1$ quantitatum $a_0, a_1, \ldots a_n$,

$$\begin{aligned} P = (a_1-a_0)(a_2-a_0)(a_3-a_0) \ldots & (a_n-a_0) \\ (a_2-a_1)(a_3-a_1) \ldots & (a_n-a_1) \\ (a_3-a_2) \ldots & (a_n-a_2) \\ \ldots\ldots\ldots & \\ & (a_n-a_{n-1}); \end{aligned}$$

quod productum omnimodis permutando quantitates a_i valorem absolutum mutare non potest, sed aut valorem eundem servat aut in oppositum abit. Vocemus eas indicum $0, 1, \ldots n$ Permutationes, pro quibus P valorem

eundem servat, *positivas;* eas, pro quibus P valorem oppositum induit, *negativas,* sive priores dicamus pertinere ad *classem positivam Permutationum,* posteriores ad *classem negativam.* Binis propositis Permutationibus quibuscunque, certa exstabit Permutatio, qua post alteram adhibita altera prodit. *Pertinebunt duae Permutationes propositae ad classem eandem aut ad classes oppositas, prout Permutatio, qua altera ex altera obtinetur, ad classem positivam aut negativam pertinet.* Tribus enim Permutationibus abeat P respective in εP, $\varepsilon' P$, $\varepsilon'' P$, ipsis ε, ε', ε'' denotantibus ± 1; si secunda Permutatio *post* primam adhibetur, abit P successive in εP, $\varepsilon . \varepsilon' P$; unde si secundam Permutationem post primam adhibendo nascitur tertia, fit

$$\varepsilon'' = \varepsilon \varepsilon'.$$

Hinc prout ε' aut $+1$ aut -1, hoc est prout Permutatio qua tertia e prima obtinetur ad classem positivam aut negativam pertinet, Permutationes prima et tertia ad classem eandem aut oppositam pertinent, et vice versa. Sequitur ex antecc., Permutationes ad eandem classem pertinentes, si nova fiat Permutatio, aut cunctas simul in eadem classe manere aut cunctas simul in alteram classem transire. Scilicet fit illud aut hoc, prout Permutatio ad classem positivam aut negativam pertinet. Si plures Permutationes aliae post alias adhibentur, diversae nasci possunt Permutationes pro diverso quo aliae post alias adhibentur *ordine.* Etenim Permutatione aliqua loco 0, 1, 2 etc. ponatur i_0, i_1, i_2 etc. atque alia quadam Permutatione k_0, k_1, k_2 etc.; secunda post primam adhibita, ipsorum 0, 1, 2 etc. locum occupabunt

$$k_{i_0}, \quad k_{i_1}, \quad k_{i_2} \text{ etc.},$$

prima vero post secundum adhibita,

$$i_{k_0}, \quad i_{k_1}, \quad i_{k_2} \text{ etc.}$$

neque necessarium est fieri

$$k_{i_m} = i_{k_m}.$$

At prorsus eadem methodo, qua Propositio praecedens, demonstratur, *Permutationes diversas quae nascantur pro diverso ordine quo Permutationes complures aliae post alias adhibentur ad eandem pertinere classem.*

Designantibus i et i' binos indices quoscunque, productum P sic exhibere licet:

$$P = \pm (a_i - a_{i'}) . \Pi (a_k - a_i)(a_k - a_{i'}) . \Pi (a_k - a_{k'}),$$

siquidem designant

$$\Pi (a_k - a_i)(a_k - a_{i'}), \qquad \Pi (a_k - a_{k'})$$

producta omnium ipsius P factorum $(a_k-a_i)(a_k-a_{i'})$ vel $a_k-a_{k'}$, qui obtinentur tribuendo ipsi k vel utrique k, k' valores ab i et i' diversos. Quae duo producta alterum ipsorum i, i' respectu symmetricum est alterum iis vacat unde permutando indices i et i' non mutantur. Contra ex permutatione factor singularis $a_i-a_{i'}$ valorem oppositum induit; unde *ipsum productum propositum P permutando binos indices valorem oppositum induit.* Duorum igitur indicum commutatio est Permutatio negativa, unde Permutationes positivae si denuo bini indices commutantur cunctae in negativas, negativae cunctae in positivas transeunt.

Reciprocas vocare licet binas Permutationes, quibus altera post alteram adhibitis positio primitiva non mutatur. Statuamus Permutatione aliqua loco 0, 1, 2 etc. poni i_0, i_1, i_2 etc.; erit Permutatio reciproca qua 0, 1, 2 etc. loco i_0, i_1, i_2 etc. ponitur. Binae Permutationes reciprocae ad eandem classem pertinent, cum altera post alteram adhibita ipsum P non mutetur.

3.

Ut cognoscatur an Permutatio proposita sit positiva an negativa, variae assignari possunt regulae. Statuamus indicibus permutatis loco

$$0,\ 1,\ 2\ \ldots\ldots\ n$$

respective positos esse

$$i_0,\ i_1,\ i_2\ \ldots\ldots\ i_n,$$

ac quaeratur an hac permutatione productum P immutatum maneat an signum mutet. Producti P factores singuli ita exhibiti sunt ut elementum minore indice affectum de elemento maiore indice affecto detrahatur. Itaque si r et s bini sunt indicum 0, 1, 2 .... n, atque $r<s$, erit ipsius P factor

$$a_s-a_r$$

qui factor permutatione assignata abit in

$$a_{i_s}-a_{i_r}$$

qui et ipse seu illi oppositus erit inter ipsius P factores prout $i_s>r$ aut $i_s<r$. Itaque si in serie numerorum,

$$i_0,\ i_1,\ i_2\ \ldots\ldots\ i_n,$$

m vicibus evenit ut post numerum aliquem i_r invenietur minor numerus i_s, totidem vicibus producti P factor aliquis signum mutat sive Permutatione indicata mutatur P in

$$(-1)^m P,$$

eritque Permutatio positiva aut negativa prout m par aut impar est. Quam regulam olim *Cel. Cramer* dedit, *ill. Laplace* demonstravit.

Sint

$$i_0, \quad i_1, \quad i_2 \quad \ldots\ldots \quad i_m$$

quicunque indicum 0, 1, 2 .... $n-1$, ac consideremus eam Permutationem qua mutatur i_0 in i_1, i_1 in i_2 etc. ac postremo i_m in i_0. Ad eandem Permutationem pervenimus, si primum i_0 cum i_1, deinde i_0 cum i_2 etc. postremo i_0 cum i_m commutamus. Unde una illa Permutatio obtinetur m vicibus commutando duo elementa ideoque est Permutatio positiva aut negativa prout m par aut impar sive prout indicum numerus $m+1$ impar aut par est.

Ponamus Permutatione aliqua proposita quacunque mutari indices i_0 in i_1, i_1 in i_2, i_2 in i_3 ac generaliter i_{k-1} in i_k: pervenitur tandem ad indicem i_m qui in i_0 mutatur, neque antea ad aliquem praecedentium indicum reditur. Ponamus enim in serie indicum i_0, i_1, i_2 .... inveniri indicem i_λ qui in indicem aliquem praecedentem i_k mutetur; cum Permutatione quacunque unus tantum index in datum quendam indicem mutetur, fieri debet $i_\lambda = i_{k-1}$ ideoque etiam $i_{\lambda-1} = i_{k-2}$, $i_{\lambda-2} = i_{k-3}$ et ita porro usque dum habeatur $i_{\lambda-k+1} = i_0$. Unde fit $i_{\lambda-k+1} = i_m$, ideoque indicem i_λ, qui in indicem aliquem praecedentem i_k mutatur, semper antecedit index i_m qui in i_0 mutatur. Si indices i_0, i_1 .... i_m non cunctos effingunt indices 0, 1, 2 .... n, et Permutatione proposita reliqui indices quoque inter se commutantur: sit eorum aliquis k_0, rursus habetur *cyclus* indicum

$$k_0, \quad k_1, \quad k_2 \quad \ldots\ldots \quad k_l,$$

qui Permutatione proposita quilibet in proxime sequentem, ultimus in primum mutantur. Si ita pergimus usque dum omnes indices exhauriantur, patet pro unaquaque Permutatione indices una quadam et necessaria ratione disponi posse in cyclos, ita ut indices in singulos cyclos dispositi ea Permutatione quilibet in proxime sequentem, ultimus in primum abeat.

Proposita Permutatione aliqua, disponantur secundum antecedentia indices 0, 1, 2 .... n in cyclos, quorum numerus sit p singulique cycli respective formentur

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3 \quad \ldots\ldots \quad \alpha_p$$

indicibus ita ut sit

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \ldots\ldots + \alpha_p = n+1.$$

Si cyclus aliquis unico indice constat sive antecedentium numerorum α_1 etc. aliquis unitati aequalis est, index ille non in alium neque alius in eum mutatur. Cuilibet cyclo k indicibus constanti vidimus respondere Permutatio-

nem quae obtineri potest $k-1$ vicibus duos indices inter se commutando. Unde Permutatio proposita obtineri potest,

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\ \ldots.\ +\alpha_p-p = n+1-p$$

vicibus duo elementa inter se permutando*). Unde Permutatio proposita est positiva aut negativa prout $n+1-p$ par aut impar est sive *prout detrahendo de numero indicum numerum cyclorum in quos indices Permutationis propositae discedunt, residuum par aut impar fit.* Hanc pulchram regulam qua Permutatio proposita positiva an negativa sit cognoscatur, dedit ill. *Cauchy (Éc. Pol. cah. 17. p. 41).*

4.

Propositis $(n+1)^2$ quantitatibus

$$a_k^{(i)},$$

in quibus indices et superiores i et inferiores k valores omnes $0, 1, 2 \ldots. n$ induant, producatur terminus

$$a\,a'_1\,a''_2\ \ldots.\ a_n^{(n)}\ **);$$

ex eoque numerus $1.2.3\ \ldots.\ (n+1)$ terminorum similium formetur indices aut superiores aut inferiores omnimodis inter se permutando. Singulis deinde terminis signum aut positivum aut negativum praefigatur, prout Permutationes quibus e termino $a\,a'_1\,a''_2\ \ldots.\ a_n^{(n)}$ obtinentur positiva aut negativa sunt, omniumque $1.2.3\ldots.\ (n+1)$ terminorum suis signis acceptorum fiat Aggregatum, quod designabo per

$$R = \Sigma \pm a\,a'_1\,a''_2\ \ldots.\ a_n^{(n)}.$$

Eiusmodi Aggregatum R praeunte ill. *Gauss* aliisque *Determinans* appellabo, ipsas quantitatis $a_k^{(i)}$ Determinantis *elementa* et cum ipsius R terminus quilibet e $n+1$ elementis producatur ipsum R dicam Determinans $n+1^{ti}$ *gradus.*

Quilibet Determinantis R *terminus*

$$a_k\,a'_{k'}\,a''_{k''}\ \ldots.\ a_{k^{(n)}}^{(n)}$$

*) Patet simul, paucioribus commutationibus duorum elementorum Permutationem propositam obtineri non posse.

**) Indicem (0) in genere non scribo ita ut $a^{(i)}$, a_k, a loco $a_0^{(i)}$, $a_k^{(0)}$, $a_0^{(0)}$ ponatur vel quantitates $a^{(i)}$, a_k, a respective dicantur inferiore aut superiore aut utroque indice (0) affecti.

e termino $a_0 a'_1 a''_2 \dots a^{(n)}_n$ duplici modo obtineri potest, sive loco indicum inferiorum 0, 1, 2 .... n ponendo respective k, k', k'' .... $k^{(n)}$, sive ponendo 0, 1, 2 .... n loco indicum superiorum k, k', k'' .... $k^{(n)}$. Quae Permutationes sunt reciprocae ideoque ad eandem classem pertinent; unde Determinantis termini iisdem signis afficiuntur, regula signorum apposita sive inferiorum sive superiorum indicum permutationibus adhibeatur. Cum nova Permutatione quacunque facta eiusdem classis Permutationes simul omnes in eadem classe maneant sive omnes simul in oppositam classem transeant, sequitur, *quacunque indicum superiorum inferiorumve Permutatione Determinans aut non mutari aut valorem oppositum induere.* Porro cum binorum indicum Permutatione classis Permutationum positiva in negativam, negativa in positivam abeat, sequitur *binos quoscunque sive superiores sive inferiores indices permutando Determinans valorem oppositum induere.* Quae Determinantis proprietas principalis et characteristica est. Unde haec altera fluit propositio fundamentalis, *evanescere Determinans quoties bini indices sive superiores sive inferiores inter se aequales existant,* siquidem breviter indices inter se aequales dicimus ubi quantitates iis affectae aequales sunt. Scilicet si duo indices inter se aequales sunt, eorum permutatione nihil mutatur, qua tamen permutatione cum per proprietatem characteristicam Determinans in valorem oppositum abeat, fieri debet $R = -R$ sive $R = 0$.

5.

Adnotamus casus quosdam speciales quibus Determinantia in simpliciorem formam sive etiam in unicum terminum redeunt. Exhibito Determinante R sequente modo,

$$1. \quad R = \Sigma \pm a a'_1 \dots a^{(m)}_m a^{(m+1)}_{m+1} \dots a^{(n)}_n,$$

ubi $m < n$; ponamus pro omnibus ipsius i valoribus

$$0, \; 1, \; 2, \; \dots \; m-1,$$

esse

$$2. \quad a^{(m)}_i = a^{(m+1)}_i \dots = a^{(n)}_i = 0.$$

Reiiciendo Determinantis terminos evanescentes, ii tantum remanent termini,

$$\pm a_i a'_{i'} \dots a^{(m)}_{i^m} \dots a^{(n)}_{i^n},$$

in quibus indices inferiores,

$$i^m, \quad i^{m+1}, \quad \dots \; i^n,$$

convenient cum numeris

$$m,\quad m+1,\quad \ldots\ldots\quad n;$$

ordinis respectu non habito. Nam si indicum i^m, i^{m+1} etc. vel unus aequaret aliquem numerorum 0, 1, 2, ... $m-1$, terminus ex hypothesi facta evanesceret. Unde sequitur, quia in quolibet Determinantis termino indices elementis subscripti omnes inter se diversi esse debent, reliquos indices inferiores

$$i,\quad i',\quad i'',\quad \ldots\ldots\quad i^{m-1}$$

ordinis respectu non habito convenire cum numeris,

$$0,\quad 1,\quad 2,\quad \ldots\ldots\quad m-1,$$

neque valores m, $m+1$ etc. induere. Qua de re eruuntur cuncti Determinantis termini ex uno

$$\pm\, a a'_1 a''_2 \ldots\ldots a^{(m-1)}_{m-1} \,.\, \pm\, a^{(m)}_m a^{(m+1)}_{m+1} \ldots\ldots a^{(n)}_n,$$

seorsim inter se permutando indices

$$0,\quad 1,\quad 2,\quad \ldots\ldots\quad m-1$$

atque indices

$$m,\quad m+1,\quad m+2,\quad \ldots\ldots\quad n,$$

signis insuper ancipitibus $\pm$ ita determinatis ut termini qui binorum indicum permutatione alter in alterum abeunt signis oppositis afficiantur. Unde fit

$$3.\qquad R = \Sigma \pm a a'_1 \ldots\ldots a^{(m-1)}_{m-1} \,.\, \Sigma \pm a^{(m)}_m a^{(m+1)}_{m+1} \ldots\ldots a^{(n)}_n,$$

sive habetur Propositio:

I. Quoties pro indicis k valoribus 0, 1, 2, ... $m-1$ evanescant elementa $a^{(m)}_k$, $a^{(m+1)}_k$, ... $a^{(n)}_k$, Determinans

$$\Sigma \pm a a'_1 a''_2 \ldots\ldots a^{(n)}_n$$

abire in productum a duobus Determinantibus

$$\Sigma \pm a a'_1 \ldots\ldots a^{(m-1)}_{m-1} \,.\, \Sigma \pm a^{(m)}_m a^{(m+1)}_{m+1} \ldots\ldots a^{(n)}_n.$$

Prorsus eadem valet Propositio si pro indicis i valoribus 0, 1, 2, ... $m-1$ elementa $a^{(i)}_m$, $a^{(i)}_{m+1}$, ... $a^{(i)}_n$ evanescunt. Si in Propositione antecedente insuper pro indicis i valoribus 0, 1, ... $l-1$ evanescunt elementa $a^{(l)}_i$, $a^{(l+1)}_i$, ... $a^{(m)}_i$, Determinans R in productum e tribus Determinantibus abit et ita porro.

Est casus simplicissimus Propositionis antecedentis quo elementa certo quodam indice superiore affecta pro indicibus inferioribus praeter unum omnibus evanescunt, quippe quo casu alterum Determinantium e quibus R pro-

ducitur in simplex elementum abit. Sit enim

$$a^{(n)} = a_1^{(n)} \ldots\ldots = a_{n-1}^{(n)} = 0,$$

fit:

$$4.\quad \Sigma \pm a a_1' a_2'' \ldots\ldots a_{n-1}^{(n-1)} a_n^{(n)} = a_n^{(n)} \Sigma \pm a a_1' \ldots\ldots a_{n-1}^{(n-1)}.$$

Si insuper fit,

$$a^{(n-1)} = a_1^{(n-1)} \ldots\ldots = a_{n-2}^{(n-1)} = 0,$$

eadem ratione e (4.) sequitur:

$$\Sigma a a_1' a_2'' \ldots\ldots a_n^{(n)} = a_{n-1}^{(n-1)} a_n^{(n)} . \Sigma \pm a a_1' \ldots\ldots a_{n-2}^{(n-2)}.$$

Sic pergendo eruimus Propositionem hanc:

II. Evanescentibus elementis omnibus,

$$a_k^{(m)},\quad a_k^{(m+1)} \ldots\ldots a_k^{(n)},$$

in quibus respective index inferior k indicibus superioribus m, $m+1$, ... n, minor est, fieri

$$\Sigma \pm a a_1' a_2'' \ldots\ldots a_n^{(n)} = a_m^{(m)} a_{m+1}^{(m+1)} \ldots\ldots a_n^{(n)} \Sigma \pm a a_1' \ldots\ldots a_{m-1}^{(m-1)}.$$

Unde ponendo $m = 1$ sequitur:

III. Evanescentibus elementis omnibus in quibus index inferior indice superiore minor est, Determinans in unicum terminum abire vel fieri

$$\Sigma \pm a a_1' a_2'' \ldots\ldots a_n^{(n)} = a a_1' a_2'' \ldots\ldots a_n^{(n)}.$$

E Propositione II. sequitur hoc Corollarium:

IV. Evanescentibus elementis omnibus,

$$a_k^{(m)},\quad a_k^{(m+1)} \ldots\ldots a_k^{(n)},$$

in quibus indices inferiores superioribus minores sunt, si insuper habetur,

$$a_m^{(m)} = a_{m+1}^{(m+1)} \ldots\ldots = a_n^{(n)} = 1$$

fit

$$\Sigma \pm a a_1' a_2'' \ldots\ldots a_n^{(n)} = \Sigma \pm a a_1' \ldots\ldots a_{m-1}^{(m-1)}.$$

E qua Propositione patet quodlibet inferioris gradus Determinans haberi posse pro Determinantis altioris gradus casu speciali.

6.

Designemus per

$$a_g^{(f)} A_g^{(f)}$$

Aggregatum omnium Determinantis R terminorum qui per quantitatem $a_g^{(f)}$ multiplicati sunt. In quovis ipsius R termino

$$\pm a_k a'_{k'} a''_{k''} \ldots\ldots a^{(n)}_{k^{(n)}}$$

elementa a_k, $a_{k'}$ etc. indicibus cum superioribus tum inferioribus omnibus inter se diversis gaudent. Unde terminos Aggregati $A_g^{(f)}$ non ingredi possunt quantitates $a_k^{(i)}$, in quibus index superior valorem f vel inferior valorem g habet. Porro cum in quovis ipsius R termino elementum unum sit nec plura quod datum indicem superiorem i, unum nec plura quod datum indicem inferiorem k habeat, sequitur, singulos Determinantis R terminos per unum elementorum $a^{(i)}$, $a_1^{(i)}$, ... $a_n^{(i)}$ neque vero per plura eorum simul multiplicari nec non per unum elementorum a_k, a'_k, ... $a_k^{(n)}$ neque vero per plura eorum simul multiplicari. Vocabantur autem,

$$a^{(i)}A^{(i)}, \quad a_1^{(i)}A_1^{(i)}, \quad \dots\dots \quad a_n^{(i)}A_n^{(i)},$$

Aggregata terminorum Determinantis R respective per $a^{(i)}$, $a_1^{(i)}$ .... $a_n^{(i)}$ multiplicatorum, unde fieri debet,

$$1. \quad R = a^{(i)}A^{(i)} + a_1^{(i)}A_1^{(i)} \dots\dots + a_n^{(i)}A_n^{(i)};$$

porro erant,

$$a_kA_k, \quad a'_kA'_k, \quad \dots\dots \quad a_k^{(n)}A_k^{(n)},$$

Aggregata terminorum Determinantis R respective per a_k a'_k .... $a_k^{(n)}$ multiplicatorum, unde fieri debet,

$$2. \quad R = a_kA_k + a'_kA'_k + \dots\dots + a_k^{(n)}A_k^{(n)}.$$

Tribuendo indici i vel k valores 0, 1, 2 .... n, e quaque duarum formularum (1.) et (2.) obtinentur $n+1$ repraesentationes diversae Determinantis R.

Determinans R est singularum quantitatum $a_k^{(i)}$ respectu expressio linearis, atque ipsius $a_k^{(i)}$ Coefficientem, qua in Determinante R afficitur, vocavimus $A_k^{(i)}$; unde adhibita differentialium notatione ipsum $A_k^{(i)}$ exhibere licet per formulam,

$$3. \quad A_k^{(i)} = \frac{\partial R}{\partial a_k^{(i)}}.$$

Hinc si quantitatibus $a_k^{(i)}$ incrementa infinite parva tribuimus,

$$d a_k^{(i)},$$

simulque R incrementum dR capit, fit

$$4. \quad dR = \Sigma A_k^{(i)} d a_k^{(i)},$$

siquidem sub signo summatorio utrique indici i et k valores 0, 1, 2 .... n conferuntur.

Binos indices superiores i et i' commutando cum R in $-R$ abeat, sequitur, Aggregatum terminorum ipsius R per $a_k^{(i)}$ multiplicatorum, $a_k^{(i)}A_k^{(i)}$,

ea commutatione abire in Aggregatum terminorum ipsius $-R$ per $a_k^{(i')}$ multiplicatorum, $-a_k^{(i')}A_k^{(i')}$. Unde sequitur, *ponendo i loco i' abire $A_k^{(i)}$ in $-A_k^{(i')}$*; eademque ratione probatur, *ponendo k loco k' abire $A_k^{(i)}$ in $-A_{k'}^{(i)}$*. Unde etiam sequitur, *simul ponendo i loco i', k loco k', siquidem i et i', k et k' inter se diversi sint, abire $A_k^{(i)}$ in $A_{k'}^{(i')}$.*

Obtinetur $a_i^{(i)}A_i^{(i)}$ si in termino

$$\pm a a_1' a_2'' \ldots . a_i^{(i)} \ldots . a_n^{(n)}$$

elementum $a_i^{(i)}$ immutatum manet, reliquorum indicibus superioribus vel inferioribus permutatis, unde fit

$$A_i^{(i)} = \Sigma \pm a a_1' \ldots . a_{i-1}^{(i-1)} a_{i+1}^{(i+1)} \ldots . a_n^{(n)},$$

unde prodit $A_k^{(i)}$ loco inferioris indicis k ponendo i et signa mutando sive fit,

$$A_k^{(i)} = -\Sigma \pm a a_1' \ldots . a_{i-1}^{(i-1)} a_{i+1}^{(i+1)} \ldots . a_{k-1}^{(k-1)} a_i^{(k)} a_{k+1}^{(k+1)} \ldots . a_n^{(n)}.$$

Vel etiam si i et k a o diversi, obtinetur $A_k^{(i)}$ ex

$$A = \Sigma \pm a_1' a_2'' \ldots . a_n^{(n)},$$

loco indicis superioris i et inferioris k ponendo o.

Commutando indices inferiores cum superioribus non mutatur Determinans R; simul termini in $a_k^{(i)}$ ducti, $a_k^{(i)}A_k^{(i)}$, abeunt in terminos in $a_i^{(k)}$ ductos, $a_i^{(k)}A_i^{(k)}$; unde *in quantitatibus $a_k^{(i)}$ commutando indices inferiores cum superioribus abeunt quantitates $A_k^{(i)}$ in $A_i^{(k)}$ sive etiam in quantitatibus $A_k^{(i)}$ indices inferiores cum inferioribus commutantur.* Hinc etiam sequitur, *quoties pro omnibus indicibus i et k fiat,*

$$a_k^{(i)} = a_i^{(k)},$$

fieri etiam

$$A_k^{(i)} = A_i^{(k)}.$$

Commutatis enim indicibus superioribus et inferioribus omnium $a_k^{(i)}$, ipsa $A_k^{(i)}$ non mutatur cum eius elementis aequivalentia substituantur; ea autem commutatione vidimus abire $A_k^{(i)}$ in $A_i^{(k)}$, unde utrumque inter se aequale evadere debet.

Statuamus, pro *datis* duobus indicibus i et i' fieri,

$$5.\quad a^{(i)} = a^{(i')},\quad a_1^{(i)} = a_1^{(i')},\quad \ldots .\quad a_n^{(i)} = a_n^{(i')},$$

propter proprietatem eius fundamentalem evanescit valor Determinantis R. Hinc repraesentando Determinans R per formulam (1.) ac substituendo (5.) eruimus,

$$6.\quad 0 = a^{(i')}A^{(i)} + a_1^{(i')}A_1^{(i)} \ldots . + a_n^{(i')}A_n^{(i)}.$$

Haec aequatio inventa quidem est supponendo, quantitates $a_k^{(i')}$ ipsis $a_k^{(i)}$ respective aequales esse, sed cum expressionem ad dextram aequationis (6.) quantitates $a_1^{(i)}$, $a_2^{(i)}$ .... $a_n^{(i)}$ omnino non ingrediantur, *aequatio* (6.) *identica esse debet.* Ac perinde invenitur, designante k' indicem quemcunque a k diversum, quoties sit

$$7. \quad a_k = a_{k'}, \quad a'_k = a'_{k'}, \quad \dots . \quad a_k^{(n)} = a_{k'}^{(n)},$$

identice fieri:

$$8. \quad o = a_{k'} A_k + a'_{k'} A'_k \dots . + a_{k'}^{(n)} A'_k .$$

Substituendo formulas (3.), inventas formulas (1.), (2.), (6.), (8.) sic quoque exhibere licet:

$$9. \quad R = a^{(i)} \frac{\partial R}{\partial a^{(i)}} + a_1^{(i)} \frac{\partial R}{\partial a_1^{(i)}} \dots . + a_n^{(i)} \frac{\partial R}{\partial a_n^{(i)}}$$

$$= a_k \frac{\partial R}{\partial a_k} + a'_k \frac{\partial R}{\partial a'_k} \dots . + a_k^{(n)} \frac{\partial R}{\partial a_k^{(n)}},$$

$$10. \quad o = a^{(i')} \frac{\partial R}{\partial a^{(i)}} + a_1^{(i')} \frac{\partial R}{\partial a_1^{(i)}} \dots . + a_n^{(i')} \frac{\partial R}{\partial a_n^{(i)}},$$

$$o = a_{k'} \frac{\partial R}{\partial a_k} + a'_{k'} \frac{\partial R}{\partial a'_k} \dots . + a_k^{(n)} \frac{\partial R}{\partial a_k^{(n)}}.$$

Quae sunt aequationes differentiales partiales quibus Determinans R satisfacit.

7.

Per formulas §. pr. traditas theoria resolutionis algebraicae aequationum linearium facile absolvitur.

Proponantur enim aequationes lineares,

$$1. \quad \begin{cases} u \;\; = a t \;\; + a_1 t \;\; \dots . + a_n t_n \\ u_1 = a' t \;\, + a'_1 t_1 \;\, \dots . + a'_n t_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u_n = a^{(n)} t + a_1^{(n)} t_1 \dots . + a_n^{(n)} t_n; \end{cases}$$

ut eruatur incognita t_k, aequationes propositae respective per $A_k, A'_k \dots . A_k^{(n)}$ multiplicentur et post multiplicationem factam instituatur summatio: in summa illa evanescunt e (8.) §. pr. Coëfficientes ipsarum t, t_1, ... t_n praeter Coëfficientem ipsius t_k qui e (2.) §. pr. aequalis evadit Determinanti R, sive fit

$$2. \quad R t_k = A_k u + A'_k u_1 \dots . + A_k^{(n)} u_n .$$

Qua in formula tribuendo ipsi k valores 0, 1, 2 .... n, eruimus hoc systema aequationum, quod incognitarum valores suppeditat,

$$3.\quad\begin{cases} Rt = A\,u + A'u_1 \ldots\ldots + A^{(n)}u_n \\ Rt_1 = A_1u + A'_n u_1 \ldots\ldots + A_1^{(n)}u_n \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ Rt_n = A_nu + A'_n u_1 \ldots\ldots + A_n^{(n)}u_n. \end{cases}$$

Prorsus eadem ratione, propositis aequationibus linearibus,

$$4.\quad\begin{cases} s = a\,r + a'\,r_1 \ldots\ldots + a^{(n)}\,r_n \\ s_1 = a_1r + a'_1r_1 \ldots\ldots + a_1^{(n)}\,r_n \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ s_n = a_nr + a'_nr_1 \ldots\ldots + a_n^{(n)}r_n, \end{cases}$$

eruimus e (6.), (2)., §. pr.,

$$5.\quad\begin{cases} Rr = As + A_1s_1 \ldots\ldots + A_ns_n \\ Rr_1 = A's + A'_1s_1 \ldots\ldots + A'_ns_n \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ Rr_n = A^{(n)}s + A_1^{(n)}s_1 \ldots\ldots + A_n^{(n)}s_n. \end{cases}$$

Commutando elementorum $a_n^{(i)}$ indices superiores et inferiores aequationes (1.) et (4.) in se abeunt; et cum simul ipsorum $A_k^{(i)}$ indices superiores et inferiores commutentur, Determinans R immutatum maneat, simul etiam aequationes (3.) in (5.) abire debent. Unde alterum aequationum systema de altero derivari potest. Sed idem obtinetur absque ulla cognitione rationis qua quantitates R et $A_k^{(i)}$ ex elementis $a_k^{(i)}$ componuntur, observando e (1.) et (4.) fieri:

$$6.\quad ur + u_1r_1 \ldots\ldots + u_nr_n = ts + t_1s_1 \ldots\ldots + t_ns_n,$$

ac substituendo in hac aequatione ipsarum t, t_1 etc. valores e (3.) petitos. Ipsum Determinans R dicamus ad aequationes (1.) vel (4.) *pertinere* sive *earum aequationum Determinans* esse.

Aequationes (6.) §. pr. docent, propositis n aequationibus,

$$7.\quad\begin{cases} 0 = at + a_1t_1 \ldots\ldots + a_nt_n \\ 0 = a't + a'_1t_1 \ldots\ldots + a'_nt_n \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ 0 = a^{(n)}t + a_1^{(n)}t_1 \ldots\ldots + a_n^{(n)}t_n, \end{cases}$$

in quibus ipsi a non tribuatur index superior i, fieri

$$8.\quad t : t \ldots\ldots : t_n = A^{(i)} : A_1^{(i)} \ldots\ldots : A_n^{(i)},$$

nisi omnes t, t_1, ... t_n simul evanescant. Ut etiam aequatio

$$0 = a^{(i)}t + a_1^{(i)}t_1 \ldots\ldots + a_n^{(i)}t_n$$

drus ellipticus aut hyperbolicus aut systema duorum Planorum se intersecantium, si evanescente Determinante Coordinatarum valores indeterminati evadunt, ita tamen ut centrum rursus in data recta sed ubicunque iaceat. Cylindrus fit parabolicus si centrum in infinitum removetur, ita tamen ut in dato plano iaceat. Determinante igitur evanescente inter varias adhuc casus naturae maxime diversae distinguendum est et pro singulis criteria algebraica afferenda erunt. Quod tamen pro numero quocunque aequationum linearium paullo, prolixum videtur negotium.

8.

Adnotavit M. *Laplace*, unumquodque Determinans repraesentari posse ut Aggregatum productorum plurium Determinantium inferiorum graduum. Quae res ita se habet. Discerpatur numerus n in plures alios numeros veluti in *quatuor* ita ut sit,

$$n = i + k + l + m;$$

distribuantur indices 0, 1, 2, ... n in quatuor classes $i+1$, k, l, m indicibus constantes. Ex. gr. constituant indices,

$$\begin{array}{l} 0,\ 1,\ 2\ \ldots.\ i \text{ primam}, \\ i+1,\ i+2\ \ldots.\ k \text{ secundam}, \\ k+1,\ k+2\ \ldots.\ l \text{ tertiam} \\ l+1,\ l+2\ \ldots.\ n \text{ quartam} \end{array}$$

classem. Quae classes omnimodis sibi invicem inserantur ordine numerorum cuiusvis classis non mutato, ita ut in Permutatione proveniente non fiat ut index minorem aliquem eiusdem classis antecedat. Sit eiusmodi Permutatio,

$$\alpha^0,\ \alpha^1,\ \alpha^2\ \ldots.\ \alpha^n$$

ac designemus per,

$$S \pm \alpha^0\ \alpha^1\ \alpha^2\ \ldots.\ \alpha^n,$$

Aggregatum omnium expressionum quae e data expressione eiusmodi Permutationibus proveniunt, signis + aut —1 praefixis prout Permutatio positiva aut negativa est. His positis in singulis terminis expressionis

$$S \pm a^{0}_{\alpha^0} a^{1}_{\alpha^1} \ldots. a^{(i)}_{\alpha^i} . a^{(i+1)}_{\alpha^{i+1}} a^{(i+2)}_{\alpha^{i+2}} \ldots. a^{(k)}_{\alpha^k} \ldots. a^{(n)}_{\alpha^n}$$

loco factorum

$$\begin{array}{ll} a^{0}_{\alpha^0} a^{1}_{\alpha^1} \ldots. a^{(i)}_{\alpha^i}, & a^{(i+1)}_{\alpha^{i+1}} a^{(i+2)}_{\alpha^{i+2}} \ldots. a^{(k)}_{\alpha^k}, \\ a^{(k+1)}_{\alpha^{k+1}} a^{(k+2)}_{\alpha^{k+2}} \ldots. a^{(l)}_{\alpha^l}, & a^{(l+1)}_{\alpha^{l+1}} a^{(l+2)}_{\alpha^{l+2}} \ldots. a^{(n)}_{\alpha^n} \end{array}$$

scribantur Determinantia

$$\begin{array}{ll} \Sigma \pm a^{0}_{\alpha^0} a^{1}_{\alpha^1} \ldots. a^{(i)}_{\alpha^i}, & \Sigma \pm a^{(i+1)}_{\alpha^{i+1}} a^{(i+2)}_{\alpha^{i+2}} \ldots. a^{(k)}_{\alpha^n}, \\ \Sigma \pm a^{(k+1)}_{\alpha^{k+1}} a^{(k+2)}_{\alpha^{k+2}} \ldots. a^{(l)}_{\alpha^l}, & \Sigma \pm a^{(l+1)}_{\alpha^{l+1}} a^{(l+2)}_{\alpha^{l+2}} \ldots. a^{(n)}_{\alpha^n}. \end{array}$$

prodit:

$$R = \Sigma \pm a a'_1 a''_2 \dots a^{(n)}_n =$$

$$S \pm \left(\Sigma \pm a^{0}_{a_0} a^{1}_{a_0} \dots a^{(i)}_{a^i} \,.\, \Sigma \pm a^{(i+1)}_{a^{i+1}} a^{(i+2)}_{a^{i+2}} \dots a^{(k)}_{a^k} \,.\, \Sigma \pm a^{(k+1)}_{a^{k+1}} a^{(k+2)}_{a^{k+2}} \dots a^{(l)}_{a^l} \,.\right.$$

$$\left. \Sigma \pm a^{(l+1)}_{a^{l+1}} a^{(l+2)}_{a^{l+2}} \dots a^{(n)}_{n} \right).$$

Demonstratio inde patet quod *omnes* obtineantur Permutationes primum indices ita permutando ut indices eiusdem classis certum quendam ordinem servent ac deinde rursus eiusmodi classis indices omnimodis permutando. Numerus productorum Determinantium quae Aggregatum S amplectitur est,

$$\frac{1.2.3 \dots (n+1)}{1.2.3 \dots (i+1).1.2.3 \dots k.1.2.3 \dots l.1.2.3 \dots m}.$$

Formula proposita expediri potest Determinantis indagatio si Determinantia partialia, quae singulorum productorum factores constituunt, valoribus simplicibus gaudent.

9.

Accuratius examinemus Determinantia $n-1^{ti}$ gradus e quibus per Determinantia secundi gradus multiplicatis Determinans R componitur. Proposito determinante,

$$R = \Sigma \pm a a'_1 \dots a^{(n)}_n,$$

terminorum eius per $a^{(f)}_g a^{(f')}_{g'}$ multiplicatorum vocemus Aggregatum

$$1. \quad a^{(f)}_g a^{(f')}_{g'} \,.\, A^{f,f'}_{g,f'}.$$

Ipsi f et f' nec non g et g' quilibet esse possunt indices ex ipsis 0, 1, ... n, a se diversi. In terminis Aggregati

$$2. \quad A^{f,f'}_{g,g'}$$

non inveniuntur elementa indicibus superioribus f et f' neque elementa indicibus inferioribus g et g' affecta, quippe idem Determinatis R terminus binos non habet factorès eodem indice superiore vel inferiore affectos. Qua de re indices f et f' vel g et g' inter se permutando ipsum $A^{f,f'}_{g,g'}$ mutationem non subit, ideoque abit expressio (1.) in

$$3. \quad a^{(f')}_g a^{(f)}_{g'} \,.\, A^{f,f'}_{g,g'}.$$

Eadem autem permutatione cum R in $-R$ mutetur, erit (3.) Aggregatum ipsius $-R$ terminorum qui per

$$4. \quad a^{(f')}_g a^{(f)}_{g'}$$

multiplicantur, ideoque erit

$$-a^{(f')}_g a^{(f)}_{g'} \,.\, A^{f,f'}_{g,g'}$$

terminorum ipsius R per $a_g^{(f')} a_{g'}^{(f)}$ multiplicatorum Aggregatum sive

$$5. \quad A_{g',g}^{f,f'} = A_{g,g'}^{f',f} = -A_{g,g'}^{f,f'}.$$

Qua de re continebit R terminos provenientes e producto,

$$6. \quad (a_g^{(f)} a_{g'}^{(f')} - a_{g'}^{(f)} a_g^{(f')}) A_{g,g'}^{f,f'},$$

iisque termini Determinantis R erunt omnes in quibus duo elementa indicibus superioribus f et f' affecta indicibus inferioribus g et g' gaudent. At quivis ipsius R terminus continet duo elementa alterum indice superiore f alterum indice superiore f' affectum nec non duo elementa alterum indice inferiore g alterum indice inferiore g' affectum, quia cuiusvis termini elementa singula singulis indicibus cum superioribus tum inferioribus afficiuntur. Unde obtinetur R summando omnes expressiones (6.) in quibus pro iisdem f et f' sumuntur pro g et g' bini indicum 0, 1, 2, ... n vel etiam in quibus pro iisdem g et g' bini indicum 0, 1, 2, ... n ipsis f et f' substituuntur. Qua de re si pro i, i' vel pro k, k' bini diversi indicum 0, 1, 2, ... n sumuntur, ipsi autem f, f', g, g' dati indices sunt, obtinetur

$$7. \quad R = \Sigma (a_k^{(f)} a_{k'}^{(f')} - a_{k'}^{(f)} a_k^{(f')}) A_{k,k'}^{f,f'}$$
$$= \Sigma (a_g^{(i)} a_{g'}^{(i')} - a_{g'}^{(i)} a_g^{(i')}) A_{g,g'}^{i,i'}.$$

Facile etiam ipsa $A_g^{(f)}$ e quantitatibus $A_{g,g'}^{f,f'}$ componitur. Erat enim $a_g^{(f)} A_g^{(f)}$ Aggregatum terminorum Determinantis R per $a_g^{(f)}$ multiplicatorum; qui termini cum insuper per unum elementorum,

$$a^{(f')}, \quad a_1^{(f')}, \quad a_2^{(f')}, \quad \dots\dots \quad a_n^{(f')},$$

omisso elemento $a_g^{(f')}$, vel etiam per unum elementorum,

$$a_{g'}, \quad a'_{g'}, \quad a''_{g'}, \quad \dots\dots \quad a_{g'}^{(n)},$$

omisso l elemento $a_{g'}^{(f)}$ multiplicati esse debeant, obtinetur:

$$8. \quad A_g^{(f)} = a^{(f')} A_{g,0}^{f,f'} + a_1^{(f')} A_{g,1}^{f,f'} \dots\dots + a_n^{(f')} A_{g,n}^{f,f'}$$

sive

$$9. \quad A_g^{(f)} = a_{g'} A_{g,g'}^{f,0} + a'_{g'} A_{g,g'}^{f,1} \dots\dots + a_{g'}^{(n)} A_{g,g'}^{f,n},$$

ubi respective termini per $a_g^{(f')}$, $a_{g'}^{(f)}$ multiplicati omittendi sunt.

Designemus br. causa per (k, k') expressionem

$$10. \quad A_{k,k'}^{f,f'} = (k, k'),$$

ita ut sit

$$(k, k') = -(k' k).$$

Fit e (8.) ipsi g substituendo numeros 0, 1, 2 .... n:

$$
11.\quad \begin{cases}
A^{(f)} = \quad * \quad + a_1^{(f')}(0,1) + a_2^{(f')}(0,2) \;\ldots\; + a_n^{(f')}(0,n) \\
A_1^{(f)} = a^{(f')}(1,0) + \quad * \quad + a_2^{(f')}(1,2) \;\ldots\; + a_n^{(f')}(1,n) \\
A_2^{(f)} = a^{(f')}(2,0) + a_1^{(f')}(2,1) + \quad * \quad \ldots\; + a_n^{(f')}(2,n) \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
A_n^{(f)} = a^{(f')}(n,0) + a_1^{(f')}(n,1) + a_2^{(f')}(n,2) \;\ldots\; + \quad *
\end{cases}
$$

Similes formulae e (9.) derivari possunt. In aequationibus (11.) ipsorum $a^{(f')}$, $a_1^{(f')}$, etc. Coëfficientes in Diagonali positi evanescunt, bini quilibet Coëfficientes Diagonalis respectu symmetrice positi valoribus oppositis gaudent. Quae est species aequationum linearium memorabilis in variis quaestionibus analyticis obveniens.

10.

Quomodum supra differentiando R elementi $a_g^{(f)}$ respectu ipsum $A_g^{(f)}$ obtinuimus, ita ipsum $A_{g,g'}^{f,f'}$ obtinetur bis differentiando R elementorum $a_g^{(f)}$, $a_{g'}^{(f')}$ respectu. Ex ipsa enim Aggregati $A_{g,g'}^{f,f'}$ definitione eruimus formulas,

$$
1.\quad A_{g,g'}^{f,f'} = \frac{\partial^2 R}{\partial a_g^{(f)} \partial a_{g'}^{(f')}} = -\frac{\partial^2 R}{\partial a_g^{(f')} \partial a_{g'}^{(f)}}
$$

$$
= \frac{\partial . A_g^{(f)}}{\partial a_{g'}^{(f')}} = \frac{\partial . A_{g'}^{(f')}}{\partial a_g^{(f)}} = -\frac{\partial . A_g^{(f')}}{\partial a_{g'}^{(f)}} = -\frac{\partial . A_{g'}^{(f)}}{\partial a_g^{(f')}}.
$$

In aequationibus (10.) §. 6. ponatur i'', k'' loco i', k', fit:

$$
0 = a^{(i'')} \frac{\partial R}{\partial a^{(i)}} + a_1^{(i'')} \frac{\partial R}{\partial a_1^{(i)}} \;\ldots\; + a_n^{(i'')} \frac{\partial R}{\partial a_n^{(i)}}
$$

$$
0 = a_{k''} \frac{\partial R}{d a_k} + a'_{k''} \frac{\partial R}{\partial a'_k} \;\ldots\; + a_{k''}^{(n)} \frac{\partial R}{\partial a_k^{(n)}}.
$$

Quae aequationes elementorum $a_k^{(i')}$, $a_{k'}^{(i)}$, respectu differentiamus. Ubi i, i', i'' nec non k, k', k'' a se diversi sunt, obtinemus:

$$
2.\quad \begin{cases}
0 = a^{(i'')} A_{0,k}^{i,i'} + a_1^{(i'')} A_{1,k}^{i,i'} \;\ldots\; + a_n^{(i'')} A_{n,k}^{i,i'} \\
0 = a_{k''} A_{k,k'}^{0,i} + a'_{k''} A_{k,k'}^{1,i} \;\ldots\; + a_{k''}^{(n)} A_{k,k'}^{n,i}.
\end{cases}
$$

Si i'' ipsi i' vel i aut k'' ipsi k' aut k aequalis est, eruimus:

$$
3.\quad \begin{cases}
-A_k^{(i)} = a^{(i')} A_{0,k}^{i,i'} + a_1^{(i')} A_{1,k}^{i,i'} \;\ldots\; + a_n^{(i')} A_{n,k}^{i,i'} \\
-A_k^{(i)} = a_{k'} A_{k,k'}^{0,i} + a'_{k'} A_{k,k'}^{1,i} \;\ldots\; + a_{k'}^{(n)} A_{k,k'}^{n,i}.
\end{cases}
$$

In formulis (2.), (3.) statuendum est:

$$
A_{k,k'}^{i,i} = A_{k,k}^{i,i'} = 0,
$$

sive omittendi sunt termini in quibus ipsius $A^{i,i'}_{k,k'}$ indices sive superiores sive inferiores aequales existunt.

Multiplicemus aequationes sequentes,

$$\begin{aligned} 0 &= a A_k + a' A'_k \;....\; + a^{(n)} A_k^{(n)}, \\ 0 &= a_1 A_k + a'_1 A'_k \;....\; + a_1^{(n)} A_k^{(n)}, \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ R &= a_k A_k + a'_k A'_k \;....\; + a_k^{(n)} A_k^{(n)}, \\ 0 &= a_n A_k + a'_n A'_k \;....\; + a_n^{(n)} A_k^{(n)} \end{aligned}$$

per factores

$$A^{i,i'}_{0,k'},\quad A^{i,i'}_{1,k'} \;....\; A^{i,i'}_{k,k'} \;....\; A^{i,i'}_{n,k'},$$

additione facta secundum (2.) evanescunt in dextra parte termini omnes per A_k, A'_k etc. multiplicati praeter eos qui per $A_k^{(i)}$, $A_k^{(i')}$ multiplicati sunt et qui secundum (3.) evadunt,

$$A_{k'}^{(i')} . A_k^{(i)}, \quad - A_{k'}^{(i)} . A_k^{(i')}.$$

Unde prodit formula:

$$4.\qquad R . A^{i,i'}_{k,k'} = A_k^{(i)} A_{k'}^{(i')} - A_{k'}^{(i)} A_k^{(i')}$$

sive

$$5.\qquad R . \frac{\partial^2 R}{\partial a_k^{(i)} \partial a_{k'}^{(i')}} = \frac{\partial R}{\partial a_k^{(i)}} . \frac{\partial R}{\partial a_{k'}^{(i')}} - \frac{\partial R}{\partial a_{k'}^{(i)}} . \frac{\partial R}{\partial a_k^{(i')}} .$$

Evolutione productorum facta habetur formula identica,

$$\begin{aligned} &(A_k^{(i)} A_{k'}^{(i')} - A_{k'}^{(i)} A_k^{(i')})(A_{k''}^{(i)} A_{k'''}^{(i')} - A_{k'''}^{(i)} A_{k''}^{(i')}) \\ +&(A_k^{(i)} A_{k''}^{(i')} - A_{k''}^{(i)} A_k^{(i')})(A_{k'''}^{(i)} A_{k'}^{(i')} - A_{k'}^{(i)} A_{k'''}^{(i')}) \\ +&(A_k^{(i)} A_{k'''}^{(i')} - A_{k'''}^{(i)} A_k^{(i')})(A_{k'}^{(i)} A_{k''}^{(i')} - A_{k''}^{(i)} A_{k'}^{(i')}) = 0. \end{aligned}$$

In qua substituendo (4.) et dividendo per R prodit formula:

$$6.\qquad A^{i,i'}_{k,k'} A^{i,i'}_{k'',k'''} + A^{i,i'}_{k,k''} A^{i,i'}_{k''',k'} + A^{i,i'}_{k,k'''} A^{i,i'}_{k',k''} = 0,$$

ac similiter demonstratur

$$7.\qquad A^{i,i'}_{k,k'} A^{i'',i'''}_{k,k'} + A^{i,i''}_{k,k'} A^{i''',i'}_{k,k'} + A^{i,i'''}_{k,k'} A^{i',i''}_{k,k'} = 0.$$

Per aliam formulam identicam notissimam obtinetur e (4.):

$$8.\qquad \left\{ \begin{aligned} A_k^{(i)} A^{i,i'}_{k',k''} + A_{k'}^{(i)} A^{i,i'}_{k'',k} + A_{k''}^{(i)} A^{i,i'}_{k,k'} &= 0 \\ A_k^{(i)} A^{i',i''}_{k,k'} + A_k^{(i')} A^{i'',i}_{k,k'} + A_k^{(i'')} A^{i,i'}_{k,k'} &= 0 \end{aligned} \right.$$

sive

$$9.\qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial a_k^{(i)}} . \frac{\partial^2 R}{\partial a_{k'}^{(i)} \partial a_{k''}^{(i')}} + \frac{\partial R}{\partial a_{k'}^{(i)}} . \frac{\partial^2 R}{\partial a_{k''}^{(i)} \partial a_k^{(i')}} + \frac{\partial R}{\partial a_{k''}^{(i)}} . \frac{\partial^2 R}{\partial a_k^{(i)} \partial a_{k'}^{(i')}} &= 0 \\ \frac{\partial R}{\partial a_k^{(i)}} . \frac{\partial^2 R}{\partial a_k^{(i')} \partial a_{k'}^{(i'')}} + \frac{\partial R}{\partial a_k^{(i')}} . \frac{\partial^2 R}{\partial a_k^{(i'')} \partial a_{k'}^{(i)}} + \frac{\partial R}{\partial a_k^{(i'')}} . \frac{\partial^2 R}{\partial a_k^{(i)} \partial a_{k'}^{(i')}} &= 0. \end{aligned} \right.$$

Advocando formulas (1.) obtines e (8.)

$$14.\quad \begin{cases} \dfrac{\partial . \dfrac{A_{k'}^{(i)}}{A_k^{(i)}}}{\partial a_{k''}^{(i')}} = -\dfrac{A_{k''}^{(i)} A_{k,k'}^{i,i'}}{A_k^{(i)} A_k^{(i)}}, \qquad \dfrac{\partial . \dfrac{A_k^{(i)}}{A_k^{(i')}}}{\partial a_{k'}^{(i'')}} = -\dfrac{A_k^{(i'')} A_{k,k'}^{i,i'}}{A_k^{(i)} A_k^{(i)}}. \end{cases}$$

Formulae praecedentes Cl°. *Bézout* bene instruerunt, earumque in variis quaestionibus usus est.

11.

Formula (4.) §. pr. ad generalius formularum systema pertinet. Vidimus §. 7. ex aequationibus,

$$1.\quad \begin{cases} at + a_1 t_1 \dots + a_n t_n = u \\ a't + a_1' t_1 \dots + a_n' t_n = u_1 \\ \dots\dots\dots\dots \\ a^{(n)} t + a_1^{(n)} t_1 \dots + a_n^{(n)} t_n = u_n \end{cases}$$

sequi

$$2.\quad \begin{cases} A\, u + A' u_1 \dots + A^{(n)} u_n = R.t \\ A_1 u + A_1' u_1 \dots + A_1^{(n)} u_n = R.t_1 \\ \dots\dots\dots\dots \\ A_n u + A_n' u_1 \dots + A_n^{(n)} u_n = R.t_n, \end{cases}$$

quibus in formulis erat,

$$3.\quad \begin{cases} R = \Sigma \pm a a' \dots a_n^{(n)}, \quad A_n^{(n)} = \Sigma \pm a a_1' \dots a_{n-1}^{(n-1)}, \\ \qquad A = \Sigma \pm A A_1' \dots A_{n-1}^{(n-1)}. \end{cases}$$

Aequationum (1.) tantum $k+1$ primas consideremus,

$$4.\quad \begin{cases} at + a_1 t_1 \dots + a_k t_k + a_{k+1} t_{k+1} \dots + a_n t_n = u, \\ a't + a_1' t_1 \dots + a_k' t_k + a_{k+1}' t_{k+1} \dots + a_n' t_n = u_1, \\ \dots\dots\dots\dots \\ a^{(k)} t + a_1^{(k)} t_1 \dots + a_k^{(k)} t_k + a_{k+1}^{(k)} t_{k+1} \dots + a_n^{(k)} t_n = u_k, \end{cases}$$

earumque ope determinemus t, $t_1 \dots t_k$ per reliquas quantitates t_{k+1}, t_{k+2} etc., atque per u, $u_1 \dots u_k$. Prodeat,

$$5.\quad C_k t_k + C_{k+1} t_{k+1} \dots + C_n t_n = Du + D_1 u_1 \dots + D_k u_k,$$

qua in formula erit,

$$6.\quad C_n = \Sigma \pm a a_1' a_2'' \dots a_k^{(k)}, \qquad D_k = \Sigma \pm a a_1' a_2'' \dots a_{k-1}^{(k-1)}.$$

Quod patet observando, obtineri aequationes (4.) e (1.) ponendo $n = k$ ac ipsorum u_i loco ponendo,

$$u_i - a_{k+1}^{(i)} t_{k+1} - a_{k+2}^{(i)} t_{k+2} \dots - a_n^{(i)} t_n.$$

Similiter e $n-k+1$ postremis aequationum (2.) determinemus quantitates $u_k, u_{k+1} \ldots u_n$ per reliquas $u, u_1 \ldots u_{k-1}$ et per quantitates $t_k, t_{k+1} \ldots t_n$: quo facto prodeat:

$$7.\quad Eu+E_1u_1 \ldots +E_ku_k = F_kt_k+F_{k+1}t_{k+1} \ldots +F_nt_n,$$

erit

$$8.\quad E_k = \Sigma \pm A_k^{(k)}A_{k+1}^{(k+1)} \ldots A_n^{(n)},\quad F_k = R.\Sigma \pm A_{k+1}^{(k+1)}A_{k+2}^{(k+2)} \ldots A_n^{(n)}.$$

Aequationes (5.) et (7.) inter se convenire debent, nam per aequationes propositas (1.) unico tantum modo exprimi potest t_k per $t_{k+1}, t_{k+2} \ldots t_n$, $u, u_1 \ldots u_k$. Unde fieri debet

$$\frac{D_k}{C_k} = \frac{E_k}{F_k}$$

sive

$$9.\quad \frac{\Sigma \pm aa'_1a''_2 \ldots a_{k-1}^{(k-1)}}{\Sigma \pm aa'_1a''_2 \ldots a_k^{(k)}} = \frac{\Sigma \pm A_k^{(k)}A_{k+1}^{(k+1)} \ldots A_n^{(n)}}{R.\Sigma \pm A_{k+1}^{(k+1)}A_{k+2}^{(k+2)} \ldots A_n^{(n)}}.$$

In hac formula generali ipsi k tribuendo valores

$$n-1,\; n-2,\; n-3,\; \ldots\; 1,$$

prodit:

$$10.\quad \begin{cases} \dfrac{\Sigma \pm aa'_1 \ldots a_{n-2}^{(n-2)}}{\Sigma \pm aa'_1 \ldots a_{n-1}^{(n-1)}} = \dfrac{\Sigma \pm A_{n-1}^{(n-1)}A_n^{(n)}}{RA_n^{(n)}} \\ \dfrac{\Sigma \pm aa'_1 \ldots a_{n-3}^{(n-3)}}{\Sigma \pm aa'_1 \ldots a_{n-1}^{(n-2)}} = \dfrac{\Sigma \pm A_{n-2}^{(n-2)}A_{n-1}^{(n-1)}A_n^{(n)}}{R\Sigma \pm A_{n-1}^{(n-1)}A_n^{(n)}} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{a}{\Sigma \pm aa'_1} = \dfrac{\Sigma \pm A'_1A''_2 \ldots A_n^{(n)}}{R\Sigma \pm A''_2A'''_3 \ldots A_n^{(n)}}. \end{cases}$$

Harum aequationum prima suppeditat,

$$\Sigma \pm A_{n-1}^{(n-1)}A_n^{(n)} = \Sigma \pm aa'_1 \ldots a_{n-2}^{(n-2)} = RA_{n-1,\,n}^{n-1,\,n},$$

quae cum formula (4.) §. pr. convenit. Deinde aequationum (10.) duas, tres, quatuor etc. primas inter se multiplicando, prodit formularum systema hoc:

$$11.\quad \begin{cases} \Sigma \pm A_{n-1}^{(n-1)}A_n^{(n)} = R\,\Sigma \pm aa'_1 \ldots a_{n-2}^{(n-2)} \\ \Sigma \pm A_{n-2}^{(n-2)}A_{n-1}^{(n-1)}A_n^{(n)} = R^2\Sigma \pm aa'_1 \ldots a_{n-3}^{(n-3)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Sigma \pm A'_1A''_2 \ldots A_n^{(n)} = aR^{n-1}. \end{cases}$$

Quas formulas amplectitur formula generalis,

$$12.\quad \Sigma \pm A_{k+1}^{(k+1)}A_{k+2}^{(k+2)} \ldots A_n^{(n)} = R^{n-k-1}\Sigma \pm aa'_1 \ldots a_k^{(k)}.$$

E qua aliae plurimae profluunt, indices

$$0,\ 1,\ 2\ \ldots.\ k,\ k+1,\ k+2\ \ldots.\ n$$

omnimodis permutando. Veluti si formularum (11.) postremam sic repraesentamus:

$$\frac{\partial \Sigma \pm A A'_1 A''_2 \ldots. A^{(n)}}{\partial A} = a R^{(n-1)},$$

generaliter habebitur

$$\frac{\partial \Sigma \pm A A'_1 A''_2 \ldots. A^{(n)}}{\partial A_k^{(i)}} = a_k^{(i)} R^{(n-1)}.$$

Ponendo

$$\Sigma \pm A A'_1 \ldots. A_n^{(n)} = r,$$

fit

$$r = A\frac{\partial r}{\partial A} + A_1\frac{\partial r}{\partial A_1} \ldots. + A_n\frac{\partial r}{\partial A_n}$$
$$= R^{n-1}\{Aa + A_1 a_1 \ldots. + A_n a_n\},$$

sive e §. 6.:

$$13.\quad \Sigma \pm A A'_1 \ldots. A_n^{(n)} = R^{(n)}.$$

Quae notissima formula est.

12.

Substituendo secundum (3.) §. 6 ipsis $A_k^{(i)}$ expressiones,

$$1.\quad A_k^{(i)} = \frac{\partial R}{\partial a_k^{(i)}},$$

sequitur e formulis §. 7., *propositis aequationibus linearibus*

$$2.\quad \begin{cases} u = at + a_1 t_1 \ldots. + a_n t_n \\ u_1 = a't + a'_1 t_1 \ldots. + a'_n t_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_n = a^{(n)} t + a_1^{(n)} t_1 \ldots. + a_n^{(n)} t_n \end{cases}$$

fieri

$$3.\quad \begin{cases} R.t = \frac{\partial R}{\partial a}u + \frac{\partial R}{\partial a'}u_1 \ldots. + \frac{\partial R}{\partial a^{(n)}}u_n \\ R.t_1 = \frac{\partial R}{\partial a_1}u + \frac{\partial R}{\partial a'_1}u_1 \ldots. + \frac{\partial R}{\partial a_1^{(n)}}u_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ R.t_n = \frac{\partial R}{\partial a_n}u + \frac{\partial R}{\partial a'_n}u_1 \ldots. + \frac{\partial R}{\partial a_n^{(n)}}u_n. \end{cases}$$

Proponamus systemata aequationum linearium in quibus omnibus iidem sint incognitarum Coëfficientes et quae solis terminis mere constantibus inter se differunt. Quarum aequationum typus generalis sit,

$$4.\quad \begin{cases} a t + a_1 t_1 \ldots\ldots + a_n t_n = \delta a_k \\ a' t + a'_1 t_1 \ldots\ldots + a'_n t_n = \delta a'_k \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a^{(n)} t + a_1^{(n)} t_1 \ldots\ldots + a_n^{(n)} t_n = \delta a_k^{(n)}, \end{cases}$$

e quibus aequationibus $n+1$ systemata proposita obtineantur ponendo ipsius k loco indices 0, 1, 2 .... n. Valores incognitarum e systemate aequationum (4.) provenientes vocemus

$$t^{(k)},\quad t_1^{(k)},\quad \ldots\ldots\quad t_n^{(k)},$$

erit secundum (3.):

$$5.\quad R.t_k^{(k)} = \frac{\partial R}{\partial a_k}\delta a_k + \frac{\partial R}{\partial a'_k}\delta a'_k \ldots\ldots + \frac{\partial R}{\partial a_k^{(n)}}\delta a_k^{(n)}.$$

Unde tribuendo indici k cunctos valores 0, 1 .... n et summando prodit formula:

$$6.\quad R\{t + t'_1 + t''_2 \ldots\ldots + t_n^{(n)}\} = \delta R$$

sive etiam

$$7.\quad t + t'_1 + t''_2 \ldots\ldots + t_n^{(n)} = \delta \log R.$$

Expressio ad dextram formulae praecedentis est summa e valore primae incognitae e primo aequationum systemate, e valore secundae incognitae e secundo systemate eruto etc. Signum variationis — δ — functioni alicui U elementorum $a_k^{(i)}$ praefigendo intelligo summam,

$$8.\quad \delta U = \Sigma \frac{\partial U}{\partial a_k^{(i)}}\delta a_k^{(i)},$$

designantibus $\delta a_k^{(i)}$ quantitates quascunque et summa ad utriusque indicis i et k cunctos valores 0, 1 .... n sive quod idem est ad cuncta Determinantis elementa extensa.

Supponamus typum aequationum propositarum esse

$$9.\quad \begin{cases} a\, t^{(k)} + a_1\, t_1^{(k)} \ldots\ldots + a_n\, t_n^{(k)} = \delta a_k + (0, k) \\ a'\, t^{(k)} + a'_1\, t_1^{(k)} \ldots\ldots + a'_n\, t_n^{(k)} = \delta a'_k + (1, k) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a^{(n)} t^{(k)} + a_1^{(n)} t_1^{(k)} \ldots\ldots + a_n^{(n)} t_n^{(k)} = \delta a_k^{(n)} + (n, k); \end{cases}$$

mutabitur formula (5.) in hanc,

$$10.\quad R t_k^{(k)} = \frac{\partial R}{\partial a_k}\,\delta a_k + \frac{\partial R}{\partial a'_k}\,\delta a'_k \;\ldots\; + \frac{\partial R}{\partial a_k^{(n)}}\,\delta a_k^{(n)}$$
$$+ \frac{\partial R}{\partial a_k}(0, k) + \frac{\partial R}{\partial a'_k}(1, k) \;\ldots\; + \frac{\partial R}{\partial a_k^{(n)}}(n, k),$$

ideoque mutabitur (11.) in hanc,

$$11.\quad R\{t + t'_1 + t''_2 \;\ldots\; t_n^{(n)}\} = \delta R + \Sigma \frac{\partial R}{\partial a_k^{(i)}}(i, k),$$

summa ad indicum i et k cunctos valores 0, 1, 2 .... n extensa. Ponamus inter Coëfficientes aequationum linearium propositarum locum habere aequationes,

$$a_k^{(i)} = a_i^{(k)},$$

unde quantitates,

$$\frac{\partial R}{\partial a_k^{(i)}} = A_k^{(i)}, \qquad \frac{\partial R}{\partial a_i^{(k)}} = A_i^{(k)},$$

inter se aequales existunt §. 6. Supponamus porro quantitates (i, k) indicum i et k permutatione valores induere oppositos, sive fieri

$$12.\quad (k, i) = -(i, k), \quad (k, k) = 0.$$

Quibus positis in summa

$$\Sigma \frac{\partial R}{\partial a_k^{(i)}}(i, k),$$

termini

$$\frac{\partial R}{\partial a_k^{(k)}}(k, k)$$

evanescunt; porro pro i et k diversis bini termini,

$$\frac{\partial R}{\partial a_k^{(i)}}(i, k) + \frac{\partial R}{\partial a_i^{(k)}}(k, i),$$

sese mutuo destruunt, unde tota summa

$$\Sigma \frac{\partial R}{\partial a_k^{(i)}}(i, k)$$

evanescit. Habemus igitur hanc Propositionem.

Propositio.

„Proponatur aequationum linearium systema,

$$\begin{array}{l} a t^{(k)} + a_1 t_1^{(k)} \;\ldots\; + a_n t_n^{(k)} = \delta a_k + (0, k) \\ a' t^{(k)} + a'_1 t_1^{(k)} \;\ldots\; + a'_n t_n^{(k)} = \delta a'_k + (1, k) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a^{(n)} t^{(k)} + a_1^{(n)} t_1^{(k)} \;\ldots\; + a_n^{(n)} t_n^{(k)} = \delta a_k^{(n)} + (n, k), \end{array}$$

in quibus

$$a_k^{(i)} = a_i^{(k)}$$

atque (i, k) sunt quantitates quaecunque pro quibus fit,

$$(i, k) = -(k, i), \qquad (k, k) = 0;$$

e systemate aequationum proposito formentur $n+1$ systemata, ponendo pro ipso k indices $0, 1, 2 \ldots n$, atque e primo systemate eruatur valor primae incognitae, e secundo secundae etc.: omnium summa aequatur variationi logarithmi Determinantis aequationum propositarum, sive fit

$$t + t'_1 + t''_2 \ldots + t^{(n)}_n = \delta \log \Sigma \pm a a'_1 a''_2 \ldots a^{(n)}_n."$$

Hac interdum Propositione solvere licet quaestiones Analyticas gravissimas quae primo intuitu valde complicatae videntur. Cuius rei olim occasione tradam exempla.

13.

Statuamus

$$1. \quad c_k^{(i)} = S\alpha^{(i)} a^{(k)} = \alpha^{(i)} a^{(k)} + \alpha_1^{(i)} a_1^{(k)} \ldots + \alpha_p^{(i)} a_p^{(k)},$$

ac vocemus P Determinans ad elementa $c_k^{(i)}$ pertinens, quod rursus $n+1^{ti}$ gradus sit, ita ut habeatur,

$$2. \quad P = \Sigma \pm c c'_1 c''_2 \ldots c_n^{(n)}.$$

Est productum

$$3. \quad \pm c c'_1 c''_2 \ldots c_m^{(n)} = \pm S\alpha a \,.\, S\alpha' a' \,.\, S\alpha'' a'' \ldots S\alpha^{(n)} a^{(n)},$$

quod summarum productum per unam summam repraesentare licet,

$$4. \quad \pm c c'_1 c''_2 \ldots c_n^{(n)} = \pm S\alpha_m a_m \,.\, \alpha'_{m'} a'_{m'} \,.\, \alpha''_{m''} a''_{m''} \ldots \alpha^{(n)}_{m^{(n)}} a^{(n)}_{m^{(n)}}$$
$$= \pm S\alpha_m \alpha'_{m'} \ldots \alpha^{(n)}_{m^{(n)}} \,.\, a_m a'_{m'} \ldots a^{(n)}_{m^{(n)}},$$

siquidem signum summatorium S ad solos indices inferiores m, m' etc. referimus, quibus singulis cuncti valores tribuendi sunt

$$0, 1, 2 \ldots p.$$

Permutando quantitatum c indices superiores, indices superiores ipsorum α easdem Permutationes subeunt; contra permutando quantitatum c indices inferiores, elementorum a indices superiores easdem Permutationes subeunt. Prodit Determinans P ex aequationis (4.) laeva parte, indices ipsius c superiores $0, 1, 2 \ldots n$ omnibus modis permutando simulque signum positivum aut negativum praefigendo prout eorum indicum permutatio positiva

aut negativa est. Qua de re obtinetur P ex expressione,

$$S.\pm a_m a'_{m'} \ldots\ldots a^{(n)}_{m^{(n)}} . a_m a'_{m'} \ldots\ldots a^{(n)}_{m^{(n)}},$$

indices ipsius a superiores omnimodis permutando, signo positivo aut negativo praefixo prout Permutatio positiva aut negativa est, unde fit

$$5.\quad P = S.\left(a_m a'_{m'} \ldots\ldots a^{(n)}_{m^{(n)}} . \Sigma \pm a_m a'_{m'} \ldots\ldots a^{(n)}_{m^{(n)}}\right).$$

At secundum Determinantium proprietatem fundamentalem evanescit Determinans

$$\Sigma \pm a_m a'_{m'} \ldots\ldots a^{(n)}_{m^{(n)}},$$

quoties indicum

$$m,\; m' \;\ldots\ldots\; m^{(n)}$$

duo quicunque inter se aequales existunt. Qua de re sufficit in aequatione (5.) signum S referre ad indicum m, m' etc. *valores a se diversos* quocunque modo e numero indicum $0, 1, 2 \ldots\ldots p$ petitos. Distinguamus iam inter tres casus quibus $p < n$, $p = n$, $p > n$.

Sit $p < n$; non licet indicibus m, $m' \ldots\ldots m^{(n)}$ quorum numerus est $n+1$ valores inter se diversos e numero $p+1$ indicum $0, 1, 2 \ldots\ldots p$ tribuere; qua de re semper evanescit Determinans,

$$\Sigma \pm a_m a'_{m'} \ldots\ldots a^{(n)}_{m^{(n)}},$$

ideoque totum Aggregatum quod signum S amplectitur. Qua de re hanc habemus Propositionem.

Propositio I.

„Sit

$$c^{(i)}_k = a^{(i)} a^{(k)} + a^{(i)}_1 a^{(k)}_1 \ldots\ldots + a^{(i)}_p a^{(k)}_p,$$

quoties $p < n$ evanescit Determinans

$$\Sigma \pm c c'_1 c''_2 \ldots\ldots c^{(n)}_n.“$$

Iam secundum casum examinemus qui prae ceteris momenti est.

Sit $p = n$; indices inter se diversi m, $m' \ldots\ldots m^{(n)}$ ex indicibus $0, 1, 2 \ldots\ldots n$ sumi debent ideoque cum utrorumque idem numerus sit, indices m, m' etc. cum indicibus $0, 1, 2 \ldots\ldots n$ conveniunt, ordinis respectu non habito. Qua de re eruitur P e formula,

$$P = S.a a'_1 \ldots\ldots a^{(n)}_n \Sigma \pm a a'_1 \ldots\ldots a^{(n)}_n,$$

indicibus inferioribus $0, 1 \ldots\ldots$ omnimodis permutatis ita tamen ut in utroque factore

$$a a'_1 \ldots\ldots a^{(n)}_n, \qquad \Sigma \pm a a'_1 \ldots\ldots a^{(n)}_n$$

eadem adhibeatur Permutatio. At iis Permutationibus Determinans,

$$\Sigma \pm \alpha \alpha_1' \dots \alpha_n^{(n)},$$

aut non mutatur aut tantum signum mutat prout Permutatio positiva aut negativa est. Qua de re eruimus P si in expressione,

$$\pm a a_1' \dots a_n^{(n)} . \Sigma \pm \alpha \alpha_1' \dots \alpha_n^{(n)},$$

indices ipsorum α inferiores omnimodis permutantur signo positivo aut negativo electo prout Permutatio positiva ut nevativa est. Unde si ponimus

$$6. \quad \Sigma \pm a a_1' \dots a_n^{(n)} = R, \qquad \Sigma \pm \alpha \alpha_1' \dots \alpha_n^{(n)} = \mathrm{P},$$

fit

$$7. \quad P = \mathrm{P} R.$$

Qua formula haec continetur Propositio in his quaestionibus fundamentalis

Propositio II.

„Datis binis quibuscunque eiusdem gradus Determinantibus eorum productum exhiberi potest ut eiusdem gradus Determinans cuius elementa sunt expressiones rationales integrae elementorum Determinantium propositorum; videlicet posito

$$c_k^{(i)} = \alpha^{(i)} a^{(k)} + \alpha_1^{(i)} a_1^{(k)} \dots + \alpha_n^{(i)} a_n^{(k)}$$

atque

$$R = \Sigma \pm a a_1' \dots a_n^{(n)}, \quad \mathrm{P} = \Sigma \pm \alpha \alpha_1' \dots \alpha_n^{(n)}, \quad P = \Sigma \pm c c_1' \dots c_n^{(n)},$$

fit

$$P = \mathrm{P} R."$$

E Propositione antecedente fluit generalior:

datis quotcunque eiusdem gradus Determinantibus eorum productum ut eiusdem gradus exhiberi posse Determinans cuius elementa expressiones sint rationales integrae elementorum Determinantium propositorum.

Non essentiale est, quod Prop. II. supponitur, utriusque Determinantis eundem gradum esse; vidimus enim §. 5., quodlibet Determinans $m+1^{ti}$ gradus,

$$\Sigma \pm \alpha \alpha_1' \dots \alpha_m^{(m)},$$

etiam pro altioris gradus Determinante haberi posse. Sit $n > m$ atque supponamus evanescere cuncta elementa,

$$\alpha_k^{(m+1)}, \quad \alpha_k^{(m+2)}, \quad \dots \quad \alpha_k^{(n)},$$

in quibus inferior index superiore minor est, porro esse,

$$\alpha_{m+1}^{(m+1)} = \alpha_{m+2}^{(m+2)} \dots = \alpha_n^{(n)} = 1;$$

erit secundum §. 5. IV.:

$$\Sigma \pm \alpha\alpha'_1\alpha''_2 \;....\; \alpha_n^{(n)} = \Sigma \pm \alpha\alpha'_1 \;....\; \alpha_m^{(m)}.$$

Eo igitur casu fit:

$$8.\quad \Sigma \pm \alpha\alpha'_1\alpha''_2 \;....\; \alpha_m^{(m)} . \Sigma \pm a a'_1 a''_2 \;....\; a_n^{(n)} = \Sigma \pm c c'_1 c''_2 \;....\; c_n^{(n)},$$

sive habetur

Propositio III.

„Sit pro indicis i valoribus 0, 1, 2 .... m,

$$c_k^{(i)} = \alpha^{(i)} a^{(k)} + \alpha_1^{(i)} a_1^{(k)} \;....\; + \alpha_n^{(i)} a_n^{(k)},$$

pro indicibus i valoribus maioribus quam m,

$$c_k^{(i)} = a_i^{(k)} + \alpha_{i+1}^{(i)} a_{i+1}^{(k)} + \alpha_{i+2}^{(i)} a_{i+2}^{(k)} \;....\; + \alpha_n^{(i)} a_n^{(k)}:$$

erit

$$\Sigma \pm \alpha\alpha'_1 \;....\; \alpha_m^{(m)}\, \Sigma \pm a a'_1 \;....\; a_n^{(n)} = \Sigma \pm c c'_1 c''_2 \;....\; c_n^{(n)}.\text{“}$$

In parte laeva aequationis (8.) non inveniuntur elementa α quorum index superior ipso m maior est, unde in Prop. antec. de valoribus eorum ex arbitrio statuere licet. Quos si evanescere ponimus, fit pro ipso $i \leqq m$,

$$c_k^{(i)} = \alpha^{(i)} a^{(k)} + \alpha_1^{(i)} a_1^{(k)} \;....\; + \alpha_m^{(i)} a_m^{(k)},$$

pro $i > m$,

$$c_k^{(i)} = a_i^{(k)}.$$

14.

Accedamus ad casum quo $p > n$; secundum formulam (5.) §. pr. fit P summa expressionum,

$$a_m a'_{m'} \;....\; a^{(n)}_{m^{(n)}} . \Sigma \pm \alpha_m \alpha'_{m'} \;....\; \alpha^{(n)}_{m^{(n)}},$$

indicibus m, m' etc. tributis quibuscunque $n+1$ valoribus a se diversis e numero indicum 0, 1, 2 .... p. Qua de re ex ipsis 0, 1, 2 .... p electis $n+1$ numeris diversis, hi numeri omnimodis inter se permutati pro indicibus inferioribus m, m' .... $m^{(n)}$ sumi debent, omnibusque illis Permutationibus pro quibuscunque $n+1$ numeris factis, singula Aggregata $1.2 \;....\; n+1$ terminorum sic provenientia summanda sunt. At illis indicum inferiorum m, m' etc. Permutationibus Determinans

$$\Sigma \pm \alpha_m \alpha'_{m'} \;....\; \alpha^{(n)}_{m^{(n)}}$$

non mutatur aut solum signum mutat prout Permutatio positiva aut negativa est. Qua de re fit,

$$P = S.\Sigma \pm \alpha_m \alpha'_{m'} \;....\; \alpha^{(n)}_{m^{(n)}}\, \Sigma \pm a_m a'_{m'} \;....\; a^{(n)}_{m^{(n)}},$$

sive fit P Aggregatum e

$$\frac{p+1\,.\,p\,.\,p-1\,\ldots\,p-n+1}{1.2.3\,\ldots\,n+1} = \frac{p+1\,.\,p\,.\,p-1\,\ldots\,n+2}{1.2.3\,\ldots\,p-n}$$

productis binorum Determinantium,

$$\Sigma \pm a_m a'_{m'} \ldots a^{(n)}_{m^{(n)}} \cdot \Sigma \pm a_m a'_{m'} \ldots a^{(n)}_{m^{(n)}},$$

quae obtinentur quoscunque $n+1$ diversos numeros ex ipsis 0, 1, 2 .... p pro indicibus inferioribus m, m' .... $m^{(n)}$ sumendo. Habemus igitur sequentem Propositionem:

Propositio IV.

„Formentur producta binorum Determinantium,

$$\Sigma \pm a_m a'_{m'} \ldots a^{(n)}_{m^{(n)}} \cdot \Sigma \pm a_m a'_{m'} \ldots a^{(n)}_{m^{(n)}},$$

pro indicibus inferioribus m, m' etc. quoscunque sumendo $n+1$ numeros ex ipsis 0, 1, 2 .... p, ubi $p>n$: cunctorum eiusmodi productorum summa aequatur Determinanti

$$\Sigma \pm c c'_1 \ldots c^{(n)}_n,$$

cuius elementa dantur per formulam,

$$c^{(i)}_k = a^{(i)} a^{(k)} + a^{(i)}_1 a^{(k)}_1 \ldots + a^{(i)}_p a^{(k)}_p."$$

Casu particulari quo pro omnibus ipsorum i et k valoribus fit,

$$a^{(i)}_m = a^{(i)}_m,$$

e Propp. antecc. haec fluit:

Propositi V.

„Posito

$$c^{(i)}_k = c^{(k)}_i = a^{(i)} a^{(k)} + a^{(i)}_1 a^{(k)}_1 \ldots + a^{(i)}_p a^{(k)}_p,$$

sit Determinans

$$\Sigma \pm c c'_1 \ldots c^{(n)}_n = P;$$

ubi $p<n$ fit

$$P = 0;$$

ubi $p=n$ fit

$$P = \{\Sigma \pm a a'_1 \ldots a^{(n)}_n\}^2;$$

ubi $p>n$ fit

$$P = S\{\Sigma \pm a_m a'_{m'} \ldots a^{(n)}_{m^{(n)}}\}^2,$$

siquidem pro indicibus inferioribus m, m' etc. sumuntur quilibet $n+1$ diversi e numeris 0, 1, 2 .... p."

Hinc ut Corollarium sequitur, *quoties quantitates $a^{(i)}_k$ reales sint Determinans*

$$\Sigma \pm c c'_1 \ldots c^{(n)}_n$$

evanescere non posse nisi Determinantia

$$\Sigma \pm a_m a'_{m'} \dots a^{(n)}_{m^{(n)}}$$

singula evanescant.

Propositiones II., IV. ill. *Cauchy* demonstravit loco citato.

15.

Proponantur aequationes lineares

$$1. \quad \begin{cases} cx + c_1 x_1 \dots + c_n x_n = \gamma \\ c'x + c'_1 x_1 \dots + c'_n x_n = \gamma' \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c^{(n)} x + c_1^{(n)} x \dots + c_n^{(n)} x_n = \gamma^{(n)}, \end{cases}$$

ubi

$$2. \quad c_k^{(i)} = a^{(i)} a^{(k)} + a_1^{(i)} a_1^{(k)} \dots + a_p^{(i)} a_p^{(k)}$$

$$3. \quad \gamma_k^{(i)} = a^{(i)} l + a_1^{(i)} l_1 \dots + a_p^{(i)} l_p.$$

Quae proveniunt aequationes si $p+1$ aequationes,

$$4. \quad \begin{cases} a\, x + a' x_1 \dots + a^{(n)} x_n = l \\ a_1 x + a'_1 x_1 \dots + a_1^{(n)} x_n = l_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_p x + a'_p x_1 \dots + a_p^{(n)} x_n = l_p \end{cases}$$

per factores

$$a^{(i)}, \quad a_1^{(i)}, \quad \dots \quad a_p^{(i)}$$

multiplicatae adduntur. Si $p < n$ aequationum (1.) Determinans secundum Prop. I. §. 13. evanescit, quo casu incognitarum valores aut infiniti aut indeterminati evadunt. Indeterminatos eos evadere inde patet quod aequationibus (1.) satisfit quoties aequationibus (4.) satisfactum est; si vero $p < n$, aequationum (4.) numerus numero incognitarum minor est ideoque aequationibus illis infinitis modis satisfieri potest.

Sit $p \geqq n$, ac statuamus rursus

$$5. \quad P = \Sigma \pm c c'_1 \dots c_n^{(n)};$$

resolvendo (1.) provenit,

$$6. \quad \begin{cases} P . x = \frac{\partial P}{\partial c} \gamma + \frac{\partial P}{\partial c'} \gamma' \dots + \frac{\partial P}{\partial c^{(n)}} \gamma^{(n)} \\ P . x_1 = \frac{\partial P}{\partial c_1} \gamma + \frac{\partial P}{\partial c'_1} \gamma' \dots + \frac{\partial P}{\partial c_1^{(n)}} \gamma^{(n)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ P . x_n = \frac{\partial P}{\partial c_n} \gamma + \frac{\partial P}{\partial c'_n} \gamma' \dots + \frac{\partial P}{\partial c_n^{(n)}} \gamma^{(n)}. \end{cases}$$

In quibus valoribus ipsius $\gamma^{(i)}$ expressiones (3.) substituamus, quo facto prodeat:

$$7. \quad \begin{cases} P.x = \beta l + \beta_1 l_1 \ldots\ldots + \beta_p l_p \\ P.x_1 = \beta' l + \beta'_1 l'_1 \ldots\ldots + \beta'_p l_p \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ P.x_n = \beta^{(n)} l + \beta_1^{(n)} l_1 \ldots\ldots + \beta_p^{(n)} l_p; \end{cases}$$

erit

$$8. \quad \beta_m^{(k)} = \alpha_m \frac{\partial P}{\partial c_k} + \alpha'_m \frac{\partial P}{\partial c'_k} \ldots\ldots + \alpha_m^{(n)} \frac{\partial P}{\partial c_k^{(n)}}.$$

Quas expressiones secundum (2.) sic quoque exhibere licet,

$$9. \quad \beta_m^{(k)} = \frac{\partial P}{\partial c_k} \cdot \frac{\partial c_k}{\partial a_m^{(k)}} + \frac{\partial P}{\partial c'_k} \cdot \frac{\partial c'_k}{\partial a_k^{(n)}} \ldots\ldots + \frac{\partial P}{\partial c_k^{(n)}} \cdot \frac{\partial c_k^{(n)}}{\partial a_m^{(k)}}.$$

Inter omnes quantitates c solae sunt quantitates c_k, c'_k .... $c_k^{(n)}$ quae elementum $a_m^{(k)}$ implicant; expresso igitur P per quantitates α, a ope formularum (2.), fit

$$10. \quad \beta_m^{(k)} = \frac{\partial P}{\partial a_m^{(k)}}$$

Unde incognitarum valores (7.) per has formulas exhiberi possunt:

$$11. \quad \begin{cases} P.x = \frac{\partial P}{\partial a} l + \frac{\partial P}{\partial a_1} l_1 \ldots\ldots + \frac{\partial P}{\partial a_p} l_p \\ P.x_1 = \frac{\partial P}{\partial a'} l + \frac{\partial P}{\partial a'_1} l_1 \ldots\ldots + \frac{\partial P}{\partial a'_p} l_p \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ P.x_n = \frac{\partial P}{\partial a^{(n)}} l + \frac{\partial P}{\partial a_1^{(n)}} l_1 \ldots\ldots + \frac{\partial P}{\partial a_p^{(n)}} l_p \end{cases}$$

Ponamus rursus,

$$12. \quad R = \Sigma \pm a_m a'_{m'} \ldots\ldots a_{m^{(n)}}^{(n)}, \qquad \mathrm{P} = \Sigma \pm \alpha_m \alpha'_{m'} \ldots\ldots \alpha_{m^{(n)}}^{(n)}$$

atque signum summatorium — S — extendamus ad qualibet ipsorum m, m' .... $m^{(n)}$ systemata in quibus m, m' etc. $n+1$ diversis numeris ex ipsis 0, 1, 2 .... p aequantur. Erit secundum Prop. IV. §. pr.,

$$13. \quad P = S.\mathrm{P}R.$$

Qua formula in (11.) substituta fit

$$14. \quad \begin{cases} \{S.\mathrm{P}R\}x = S.\mathrm{P}\left\{\frac{\partial R}{\partial a} l + \frac{\partial R}{\partial a_1} l_1 \ldots\ldots + \frac{\partial R}{\partial a_p} l_p\right\} \\ \{S.\mathrm{P}R\}x_1 = S.\mathrm{P}\left\{\frac{\partial R}{\partial a'} l + \frac{\partial R}{\partial a'_1} l_1 \ldots\ldots + \frac{\partial R}{\partial a'_p} l_p\right\} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \{S.\mathrm{P}R\}x_n = S.\mathrm{P}\left\{\frac{\partial R}{\partial a^{(n)}} l + \frac{\partial R}{\partial a_1^{(n)}} l_1 \ldots\ldots + \frac{\partial R}{\partial a_p^{(n)}} l_p\right\}. \end{cases}$$

Expressionem R non ingrediuntur omnia elementa,

$$a^{(i)},\quad a_1^{(i)},\quad \ldots\ldots\quad a_p^{(i)},$$

sed tantum elementa,

$$a_m^{(i)},\quad a_{m'}^{(i)},\quad \ldots\ldots\quad a_{m^{(n)}}^{(i)}.$$

Qua de re valores (14.) sic quoque exhibere licet:

$$15.\quad \begin{cases} \{S.\mathrm{P}R\}x \;=\; S.\mathrm{P}\left\{\dfrac{\partial R}{\partial a_m}l_m + \dfrac{\partial R}{\partial a_{m'}}l_{m'} \ldots\ldots + \dfrac{\partial R}{\partial a_{m^{(n)}}}l_{m^{(n)}}\right\} \\ \{S.\mathrm{P}R\}x_1 = S.\mathrm{P}\left\{\dfrac{\partial R}{\partial a'_m}l_m + \dfrac{\partial R}{\partial a'_{m'}}l_{m'} \ldots\ldots + \dfrac{\partial R}{\partial a'_{m^{(n)}}}l_{m^{(n)}}\right\} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \{S.\mathrm{P}R\}x_n = S.\mathrm{P}\left\{\dfrac{\partial R}{\partial a_m^{(n)}}l_m + \dfrac{\partial R}{\partial a_{m'}^{(n)}}l_{m'} \ldots\ldots + \dfrac{\partial R}{\partial a_{m^{(n)}}^{(n)}}l_{m^{(n)}}\right\}. \end{cases}$$

Designemus per

$$(x),\quad (x_1),\quad \ldots\ldots\quad (x_n),$$

valores incognitarum $x, x_1 \ldots\ldots x_n$ provenientes e $n+1$ aequationibus e numero aequationum (4.) in quibus termini constantes sint,

$$l_m,\quad l_{m'},\quad \ldots\ldots\quad l_{m^{(n)}};$$

erunt expressiones uncis inclusae quae in dextra parte aequationum (15.) sub signo S inveniuntur per P multiplicatae, aequales ipsis

$$R(x),\quad R(x_1),\quad \ldots\ldots\quad R(x_n).$$

Unde poterunt iam formula (15.) sic exhiberi:

$$16.\quad \begin{cases} \{S.\mathrm{P}R\}x \;=\; S.\mathrm{P}R(x) \\ \{S.\mathrm{P}R\}x_1 = S.\mathrm{P}R(x_1) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \{S.\mathrm{P}R\}x_n = S.\mathrm{P}R(x_n), \end{cases}$$

unde

$$17.\quad x = \frac{S.\mathrm{P}R(x)}{S.\mathrm{P}R},\quad x_1 = \frac{S.\mathrm{P}R(x_1)}{S.\mathrm{P}R},\quad \ldots\ldots\quad x_n = \frac{S.\mathrm{P}R(x_n)}{S.\mathrm{P}R}.$$

Quae sequens est Propositio:

Propositio I.

„Quascunque $n+1$ combinando e $p+1$ aequationibus (4.) veluti $m+1^{\text{tam}}$, $m'+1^{\text{tam}}$, ... $m^{(n)}+1^{\text{tam}}$, eruantur incognitarum $x, x_1 \ldots\ldots x_n$ valores,

$$(x),\quad (x_1),\quad \ldots\ldots\quad (x_n);$$

qui valores omnes per *eandem* quantitatem multiplicentur,

$$\mathrm{P}R = \Sigma \pm \alpha_m \alpha'_{m'} \ldots\ldots \alpha_{m^{(n)}}^{(n)} . \Sigma \pm a_m a'_{m'} \ldots\ldots a_{m^{(n)}}^{(n)};$$

pro omnibus illis combinationibus quarum numerus est,

$$\frac{p+1.p\;....\;p-n+1}{1.2\;....\;n+1} = \frac{p+1.p\;....\;n+2}{1.2\;....\;p-n},$$

producta singula,

$$\mathrm{P}R.(x),\quad \mathrm{P}R.(x_1),\quad ....\quad \mathrm{P}R.(x_n),$$

summando ac dividendo per summam ipsorum $\mathrm{P}R$ prodeunt incognitarum valores quales per aequationes (1.) determinantur,

$$x = \frac{S.\mathrm{P}R(x)}{S.\mathrm{P}R},\quad x_1 = \frac{S.\mathrm{P}R(x_1)}{S.\mathrm{P}R},\quad x_n = \frac{S.\mathrm{P}R(x_n)}{S.\mathrm{P}R}."$$

Si rursus fit,

$$a_m^{(i)} = a_m^{(i)}$$

abeunt aequationes (1.) in sequentes,

$$18.\quad \begin{cases} (a\,a)x + (a\,a')x_1\;....\;+(a\,a^{(n)})x_n = (a\,l) \\ (a'\,a)x + (a'\,a')x_1\;....\;+(a'\,a^{(n)})x_n = (a'\,l) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (a^{(n)}\,a)x + (a^{(n)}\,a')x_1\;....\;+(a^{(n)}\,a^{(n)})x_n = (a^{(n)}\,l), \end{cases}$$

siquidem

$$(a^{(i)}a^{(k)}) = (a^{(k)}a^{(i)}) = a^{(i)}a^{(k)} + a_1^{(i)}a_1^{(k)}\;....\;+(a_p^{(i)}a_p^{(k)})$$

$$(a^{(i)}l) = a^{(i)}l + a_1^{(i)}l_1\;....\;+a_p^{(i)}l_p.$$

Aequationes (18.) eaedem sunt atque adhibentur ad determinationem incognitarum x, x_1 etc. per Methodum *Minimorum Quadratorum*, si Observationes numerum aequationum (4.) suppeditarunt ipsum incognitarum numerum excedentem. Ponendo enim

$$U = S.(a_m x + a'_m x_1\;....\;+a_m^{(n)}x_n - l_m)^2,$$

summa S extensa ad ipsius m valores 0, 1 .... p, aequationes (18.) conveniunt cum his

$$\tfrac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial x} = 0,\quad \tfrac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial x_1} = 0,\quad \tfrac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial x_n} = 0,$$

pro quibus U valorem Minimum nanciscitur.

Habemus igitur hanc Propositionem:

Propositio II.

„Proponantur aequationes,

$$\begin{aligned} a x + a' x_1 + a'' x_2\;....\;+a^{(n)}x_n &= l \\ a_1 x + a'_1 x_1 + a''_1 x_2\;....\;+a_1^{(n)}x_n &= l_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_p x + a'_p x_1 + a''_p x_2\;....\;+a_p^{(n)}x_n &= l_p, \end{aligned}$$

quarum numerus incognitarum numerum excedat; e quolibet systemate $n+1$ aequationum praecedentium valor incognitae eruatur atque per quadratum Determinantis eius systematis, RR, multiplicetur; quibus factis pro singulis aequationum propositarum combinationibus omnium illorum productorum summa per summam omnium RR dividatur: eruitur incognitae valor idem atque invenitur, si aequationes propositae per Methodum Minimorum Quadratorum tractantur."

Observandum est, valores omnium incognitarum qui ex eadem aequationum propositarum combinatione proveniant secundum Prop. praec. per *eandem* quantitatem RR multiplicari, quam ideo in applicationibus ad *Methodum Minimorum Quadratorum* convenit appellare ***Pondus Combinationis***, a pondere valoris incognitae bene distinguendum.

16.

Statuamus ex aequationibus (18.) §. pr. sequi,

$$P.x = H(al)+H'(a'l)\ \dots\ +H^{(n)}(a^{(n)}l),$$

ubi P sicuti supra designat aequationum illarum Determinans. Consueverunt Astronomi, quantitatem

$$\frac{P}{H} = \mathfrak{P}$$

appellare incognitae x *Pondus* seu potius Pondus determinationis incognitae x quae omnibus Observationibus per Methodum Min. Quadr. combinatis eruitur. Restituendo ipsius $(a^{(i)}a^{(k)})$ loco elementum $c_k^{(i)}$ fit,

$$P = \Sigma \pm c c'_1 c''_2 \dots c_n^{(n)}, \qquad H = \Sigma \pm c'_1 c''_2 \dots c_n^{(n)}.$$

Unde secundum Prop. V. §. 14.,

$$P = S\{\Sigma \pm a_m a'_{m'} a''_{m''} \dots a^{(n)}_{m^{(n)}}\}^2$$
$$H = S\{\Sigma \pm \quad a'_{m'} a''_{m''} \dots a^{(n)}_{m^{(n)}}\}^2,$$

siquidem in altera formula pro ipsis $m, m', m'' \dots m^{(n)}$, in altera pro ipsis $m', m'' \dots m^{(n)}$ omnibus modis quibus fieri potest sumuntur indicum $0, 1, 2 \dots p$ seu $n+1$ seu n diversi. Si tantummodo tot combinamus Observationes quot sunt incognitae, ex. gr. Observationes quantitatibus

$$l_0,\ l_1 \dots l_n$$

respondentes, fit Pondus ipsius x ea Combinatione determinatae,

$$\frac{\{\Sigma \pm a_0 a'_1 a''_2 \dots a_n^{(n)}\}^2}{S\{\Sigma \pm \quad a'_1 a''_2 \dots a_n^{(n)}\}^2} = (\mathfrak{P}),$$

siquidem in denominatore sub signo S pro indicibus inferioribus sumuntur

omnibus modis n diversi e $n+1$ indicibus 0, 1, 2 .... n. Si vocamus quantitatem

$$\{\Sigma \pm a_0 a'_1 a''_2 \ldots\ldots a^{(n)}_n\}^2 = RR$$

Combinationis Pondus, erit,

$$S\{\Sigma \pm a'_1 a''_2 \ldots\ldots a^{(n)}_n\}^2 = \frac{RR}{(\mathfrak{P})},$$

ipsius x per Combinationem illam determinatae Pondus inversum, multiplicatum per Pondus Combinationis RR. Quantitas quae Aggregato praecedente continetur,

$$\{\Sigma \pm a'_0 a''_1 \ldots\ldots a^{(n)}_{n-1}\}^2,$$

etiam in aliis Combinationibus obvenit, videlicet in iis quae quantitatibus l_0, l_1 .... l_{n-1} atque uni e reliquis l_n, l_{n+1} .... l_p respondent ideoque in

$$p+1-n$$

Combinationibus. Quam ob rem si pro singulis Combinationibus $p+1$ Observationum ad numerum $n+1$, qui determinandis incognitis sufficit, determinamus ipsius x Pondus inversum, multiplicatum per Combinationis Pondus: omnium eiusmodi productorum summa aequatur quantitati,

$$(p+1-n)\,S\{\Sigma \pm a'_{m'} a''_{m''} \ldots\ldots a^{(n)}_{m^{(n)}}\}^2 = (p+1-n)H,$$

sive fit

$$S\frac{RR}{(\mathfrak{P})} = (p+1-n)H = (p+1-n).\frac{P}{\mathfrak{P}} = (p+1-n).\frac{S.RR}{\mathfrak{P}},$$

unde

$$\frac{S.\dfrac{RR}{(\mathfrak{P})}}{S.RR} = \frac{p+1-n}{\mathfrak{P}}.$$

Hac formula incognitae per M.M.Q ex omnibus $p+1$ Obss. determinatae pondus $\mathfrak{P}$ determinatur eiusdem quantitatis ponderibus quae pro numero Observationum $n+1$ aequali numero incognitarum obtinentur, advocatis singulis *Combinationum Ponderibus* RR. Videmus ipsorum $\frac{1}{(P)}$ valorem quodammodo medium in parte dextra aequationis praecedentis formatum non ipsi $\frac{1}{\mathfrak{P}}$ aequari sicuti in Prop. II. §. antec. de incognitarum valoribus usu venit, sed ipsi $\frac{1}{\mathfrak{P}}$ multiplicato per $p+1-n$, hoc est per excessum Observationum numeri unitate aucti super numerum incognitarum. Quod bene quadrat, quia determinationum pondera cum Observationum numero crescunt.

Regiom. 17 Martii 1841.

12.

De Determinantibus functionalibus *).

(Auct. *C. G. J. Jacobi* prof. ord. math. Regiom.)

1.

In Commentatione anteriore proprietates praecipuas Determinantium enarravi, quae ad quodcunque elementorum systema pertinet. In hac Commentatione supponam, elementa Determinantis esse differentialia partialia systematis functionum totidem variabilium, harum variabilium respectu sumta. Eiusmodi Determinantia per totam Analyticam gravissimas partes agere constat, quin etiam in variis quaestionibus ad systema functionum plurium variabilium pertinentibus similes vices gerere atque quotientem differentialem functionis unius variabilis. Quod egregie declarant varia theoremata quae de Determinantibus illis aliis occasionibus proposui. Qua de re fortasse conveuit ea Determinantia propria appellatione *Determinantium functionalium* insignire. Quemadmodum autem Determinantium functionalium proprietates ex iis quae de Determinantibus algebraicis constant derivabimus, ita Determinantium proprietates algebraicorum vice versa e Determinantium functionalium proprietatibus deduci possunt. Statuendo enim, ipsas

$$f,\ f_1,\ f_2\ \ldots.\ f_n$$

esse functiones lineares variabilium $x, x_1 \ldots. x_n$,

$$f_k = a_k x + a'_k x_1 + a''_k x_2 \ldots. + a_k^{(n)} x^n,$$

fit

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_i} = a_k^{(i)},$$

ideoque Determinans, ad systema elementorum $a_k^{(i)}$ quodcunque pertinens, haberi potest pro Determinante ad systema differentialium partialium,

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_i},$$

pertinente sive pro Determinante functionali.

*) Quae e theoria aequationum linearium et Determinantium algebraicorum nota supponuntur, demonstrata inveniuntur in Commentatione praecedente „*De Determinantibus*"; ad hanc pertinent Commentationum paragraphi quas asteriscis superpositis notavi.

Sed antequam ad rem propositam accedam, pauca de notatione differentialium partialium antemittam. Et cum in hac Commentatione saepius de functionibus a se independentibus vel non a se independentibus sermo fiat, etiam de his rebus dilucidationes quasdam elementares annectare ratum videbatur.

2.

Ut distinguerentur differentialia *partialia* a *vulgaribus* seu in quibus variabilis omnes ut unius variabilis functiones considerantur, *Eulerus* aliique differentialia partialia uncis includere consueverunt. Sed quia uncorum accumulatio et legenti et scribenti molestior fieri solet, praetuli characteristica

$$d$$

differentialia vulgaria, differentialia autem partialia characteristica

$$\partial$$

denotare. De qua re ubi convenitur, erroris locus esse non potest. Itaque si f ipsarum x et y functio est, scribam

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

Si qua unam tantum variabilem continet functio, perinde characteristica d vel ∂ uti licet. Eadem uti licet distinctione in denotandis integrationibus, ita ut expressiones,

$$\int f(x, y)\, dx, \qquad \int f(x, y)\, \partial x,$$

inter se distinguantur; scilicet in illa consideratur y ideoque etiam $f(x, y)$ ut ipsius x functio, in hac integratio respectu solius x perficienda est atque y inter integrationem pro Constante habetur.

Alias proposuit notationes ill. *Lagrange*, quibus et ipsis saepenumero cum commodo uti licet. Etenim si f plurium variabilium x, y, z functio est, denotat per f' differentiale totale, hoc est expressionem,

$$f' = \frac{\partial f}{\partial x} x' + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial z} z',$$

ubi x', y', z' sunt differentialia ipsarum x, y, z eius respectu variabilis sumta quae pro independente assumta est. Contra differentialia *partialia* denotat scribendo post signum f' eam variabilem, cuius respectu differentiatio partialis instituenda est dum reliquae pro Constantibus habentur, ita ut sit,

$$f'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad f'(y) = \frac{\partial f}{\partial y}, \qquad f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Si duarum tantum variabilium functiones proponuntur, ille super- et supponendo lineolas denotat, quot vicibus functio respectu alterutrius variabilis differentianda sit, ita ut ex. gr. $f_{,,}^{'''}$ idem sit atque $\frac{\partial^5 f}{\partial x^3 \partial y^2}$. Deficit *Lagrangiana* notatio, si functionis trium pluriumve variabilium differentialia altiora quam prima exhibenda sunt, neque eiusmodi differentialia in *Theoria Functionum* obveniunt.

Ut functionis plures variabiles involventis differentiale partiale sit definitum, non sufficit indicare et functionem differentiandam et variabilem cuius respectu differentiandum est, sed insuper necesse est indicetur, quaenam sint quantitates, quae inter differentiandum constantes manent. Sit enim f ipsarum x, x_1 .... x_n functio, assumtis illarum variabilium n functionibus ω_1, ω_2 .... ω_n si ipsa f pro variabilium x, ω_1, ω_2 .... ω_n functione habetur, variante x non amplius constantes erunt $\omega_1, \omega_2 .... \omega_n$, si x_1, $x_2 .... x_n$ constantes manent, neque si ω_1, ω_2 .... ω_n constantes manent, etiam constantes erunt x_1, x_2 .... x_n. Expressio autem $\frac{\partial f}{\partial x}$ prorsus diversos valores indicabit, sive hae sive illae quantitates inter differentiandum constantes sunt. Ex. gr. in functione f duarum variabilium x at y ipsius y loco introducatur ipsarum x, y functio quaedam u pro altera variabili independente, quod antea erat differentiale $\frac{\partial f}{\partial x}$, iam erit

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x},$$

ita ut idem signum $\frac{\partial f}{\partial x}$ valores prorsus diversos significet, prout y vel u constans manet dum f respectu ipsius x differentiatur. Qua de re et in hac et in aliis Commentationibus quoties Differentialium Partialium usus erit, dicendo variabilium x, x_1 .... x_n ipsam f esse functionem, non tantum indicabo, ipsam f a variabilibus illis pendere, constantem manere si illae constantes maneant, variari si varientur, quod idem locum haberet, si ipsarum x, x_1 .... x_n loco aliae quaecunque variabiles ω, ω_1 .... ω_n earum functiones, ut independentes introducerentur: sed *ipso dicendo f variabilium x, x_1 .... x_n esse functionem subintelligam, quoties ea functio per partes differentietur ita instituendam esse differentiationem ut ex ipsis illis variabilibus semper una tantum varietur dum reliquae omnes constantes maneant.*

Nec minus quoad signa, ut formulae omni ambiguitate eximerentur, necesse esset ut non tantum indicaretur variabilis cuius respectu differentiatur, sed simul totum systema variabilium independentium, quarum functio per partes differentianda proponitur, ut ipso signo eae quoque quantitates quae inter differentiandum *constantes* maneant cognoscerentur. Quod eo magis necessarium possit videri, quia evitari nequit quin in eadem Ratiocinatione vel etiam in una eademque formula inveniantur differentialia partialia ad diversa variabilium independentium systemata referenda, veluti in expressione supra proposita,

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x},$$

in qua f pro ipsarum quidem x et u, sed u pro ipsarum x et y functio habenda est. In quam expressionem mutabatur $\frac{\partial x}{\partial f}$, si u loco y pro variabili independente introducitur. Quod, si adscribuntur variabili dependenti independentes ad quas differentiationes partiales referuntur, indicari poterit per hanc formulam, omni ambiguitate exemtam,

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial f(x,u)}{\partial x}+\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\cdot\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}.$$

Sed notatio, in aequatione antecedente adhibita, sicuti aliae omnes, quae fingi possunt ad differentialia partialia ipsa significandi ratione omnino definienda, in quaestionibus certe generalioribus et formulis magis complicatis molestissima evaderet nec ferenda esset; scilicet pro maiore variabilium independentium numero pluribusque terminis eveniret ut formula, quam una tantum linea repraesentare licet, totam paginam occuparet. Quando sine graviore incommodo licet quamquam maxime affectanda sunt signa, quibus et omnis ambiguitas tollatur et formulae sine interpretatione verbali adiecta per se clarae et intelligibiles fiant, in hoc tamen casu propter summam illam nec evitandam prolixitatem acquiescendum esse putavi in notatione differentialium quae variabilium independentium indicationi supersedet. Neque eveniet ut lectori intelligenti et ratiocinia sedulo persequenti in dubitationem venire possit, ad quodnam variabilium independentium systema singula differentialium partialia referantur. Interim ubi ratum videtur, quo facilius duo differentialium partialium systema diversis variabilium systematis respondentia inter se distinguantur, alterum more *Euleriano* uncis includam.

3.

Quacunque aequatione inter plures quantitates proposita, nisi aequatio identica est, quantitatum illarum unaquaeque per reliquas determinari potest. *Identicam* dico aequationem in qua termini omnes se mutuo destruunt unde quantitati determinandae inservire nequit. Si ex aequatione proposita quantitatis alicuius valor petitur isque valor in aequatione proposita ipsi quantitati substituitur, aequatio identica emergit, seu potius hunc ipsum dicimus valorem quantitatis ex aequatione petitum sive aequationi satisfacientem qui quantitati substitutus aequationem identicam reddat. Quia nullitatem differentiando rursus nullitatem ideoque terminos se destruentes differentiando rursus terminos se destruentes obtines, sequitur, aequationem identicam cuiuscunque quantitatis respectu differentiando rursus aequationem identicam prodire.

Voco aequationes *a se independentes,* quarum nulla neque ipsa identica est neque reliquarum ope ad identicam reduci potest. Proponantur inter quantitates $x.\ x_1\ \dots\ x_n$ aequationes,

$$u = 0,\quad u_1 = 0,\quad \dots\quad u_m = 0;$$

ex aequatione $u = 0$ petatur quantitatis alicuius x valor per x_1, x_2 etc. expressus atque in reliquis aequationibus $u_1 = 0$, $u_2 = 0$ etc. substituatur; deinde ex aequatione $u_1 = 0$ petatur alterius quantitatis x_1 valor per x_2, x_3 etc. expressus atque in ipsius x expressione inventa et in reliquis aequationibus $u_2 = 0$ etc. substituatur, etc. etc. Si hac ratione pergimus aequationibus,

$$1.\quad u = 0,\quad u_1 = 0,\quad \dots\quad u_k = 0,$$

et ipsarum x, $x_1\ \dots\ x_k$ valores per reliquas quantitates x_{k+1}, x_{k+2} etc. expressi erunt et reliquae aequationes,

$$2.\quad u_{k+1} = 0,\quad u_{k+2} = 0,\quad \dots\quad u_m = 0,$$

solas x_{k+1}, x_{k+2} etc. continebunt, sive quantitates x, $x_1\ \dots\ x_k$ ex iis *eliminatae* erunt. Si pro nullo ipsius k valore minore quam m evenit ut substituendo ipsarum x, $x_1\ \dots\ x_k$ valores, ex aequationibus (1.) petitos, una aliqua aequationum (2.) identica evadat, praecedente methodo totidem quantitates atque proponuntur aequationes determinari seu per reliquas quantitates exprimi possunt. Si vero pro certo ipsius k valore evenit ut substituendo ipsarum x, $x_1\ \dots\ x_k$ valores ex aequationibus (1.) petitos reliquarum aequationum $u_{k+1} = 0$, $a_{k+2} = 0$ etc. una identica evadat, aequatio illa identica ad unam quantitatem per reliquas determinandam adhiberi non pote-

rit, unde eo casu non totidem quantitates per reliquas exprimi possunt atque aequationes propositae sunt. Qua de re *aequationes propositae a se invicem independentes sunt aut non sunt prout earum ope quantitatum inter quas proponuntur totidem aut non totidem per reliquas exprimi possunt.* Nullo autem modo fieri potest ut aequationibus propositis determinetur quantitatum numerus maior numero aequationum; unde aequationum a se independentium numerum aut aequare aut excedere debet incognitarum quas involvunt numerus, nunquam ei inferior esse potest. Si valores quantitatum e totidem aequationibus inventi rursus in his aequationibus substituuntur, aequationes identicae evadere debent.

Propositis aequationibus a se independentibus, quantitates earum ope per reliquas determinandae non semper ex arbitrio eligi possunt. Veluti si duae quantitates x et x_1 in omnibus aequationibus propositis nonnisi additione inter se junctae inveniuntur, ipsum quidem $x+x_1$ neque vero singulas x et x_1 per reliquas quantitates exprimere licet. Si aequationibus $u=0$, $u_1=0$, ... $u_m=0$ quantitates x, x_1 .... x_m determinari seu per reliquas quantitates x_{m+1} etc. exprimi possunt, ex aequationibus illis nulla deduci potest inter solas x_{m+1}, x_{m+2} .... x_n seu e qua simul omnes x, x_1, ... x_m eliminatae sint. Nam eiusmodi aequatione quantitatum x_{m+1}, x_{m+2} etc aliqua veluti x_{m+1} per reliquas x_{m+2} etc. exprimi posset, ideoque ope $m+1$ aequationum $m+2$ quantitates x, x_1 .... x_{m+1} per reliquas x_{m+2} etc. determinarentur quod fieri nequit. Contra si non fieri potest ut ex aequationibus a se independentibus,

$$u=0,\quad u_1=0,\quad \ldots\ldots\quad u_m=0,$$

omnes x, x_1 .... x_m determinentur, ex aequationibus illis semper aliam deducere licet inter solas x_{m+1}, x_{m+2} etc. seu e qua omnes x, x_1 .... x_m eliminatae sunt. Faciamus enim pro ipsius k valore aliquo minore quam m aequationibus,

$$u=0,\quad u_1=0,\quad \ldots\ldots\quad u_k=0,$$

determinari x, x_1 .... x_k earumque valores substitui in aequationibus,

$$u_{k+1}=0,\quad u_{k+2}=0,\quad \ldots\ldots\quad u_m=0:$$

tum demum his aequationibus nulla amplius determinatur quantitatum x_{k+1}, x_{k+2} .... x_m, si per substitutionem factam quantitates illae ex aequationibus $u_{k+1}=0$ etc. omnino abeunt seu aequationes inter solas x_{m+1}, x_{m+2} etc. prodeunt.

Vidimus antecedentibus, propositis inter $n+1$ incognitas $m+1$ aequationibus independentibus, non tantum aequationum propositarum nullam reliquarum ope identicam reddi posse, sed etiam ex incognitarum numero assignari posse idque in genere variis modis incognitas $n-m$ inter quas nulla existat aequatio quae e propositis aequationibus derivari possit. Aequationes $u=0$, $u_1=0$, ... $u_m=0$, quibus totidem quantitates x, $x_1 \dots x_m$, quas involvunt, determinantur, *harum quantitatum respectu* dico a se independentes.

4.

Prorsus similia de functionibus a se independentibus valent. Functiones plurium variabilium voco a se invicem *independentes* si earum nulla neque Constans est neque per reliquas exprimi potest vel quod idem est si inter functiones eas solas nulla locum habet aequatio ab ipsis praeterea variabilibus vacua, quae functionum expressiones substituendo identica fiat. Si inter functiones propositas ejusmodi habentur una pluresve aequationes, functionum totidem per reliquas determinari possunt, inter quas nulla amplius aequatio locum habet. Unde si functiones propositae non a se independentes sunt, earum aliae a se independentes erunt, reliquae per eas exprimi poterunt. Si functiones f, $f_1 \dots f_n$ non a se independentes sunt, functiones autem f_1, $f_2 \dots f_n$ a se independentes sunt, erit f ipsarum f_1, $f_2 \dots f_n$ functio. Nam si functiones f_1, $f_2 \dots f_n$ a se independentes sunt, aequatio inter omnes f, $f_1 \dots f_n$ locum habens ipsa functione f vacare non potest, quae ideo ea aequatione ut reliquarum f_1, $f_2 \dots f_n$ functio determinatur. —

Si ipsarum x, $x_1 \dots x_n$ functiones praeter has quantitates alias a, a_1, a_2 etc. involvunt, eas functiones *quantitatum* x, $x_1 \dots x_n$ *respectu* a se independentes dicam, si inter solas functiones et quantitates a, a_1, a_2 etc. nulla aequatio locum habet. Si loco plurium functionum una tantum habetur unius variabilis functio, casus quo functiones a se non independentes sunt, in eum redit quo functio Constans est. Aequatione enim, quae inter functiones propositas locum habet, functio si unica tantum proponitur Constanti aequatur. Sint f, f_1, f_2 etc. functiones variabilium x, $x_1 \dots x_n$ a se independentes, sitque x una variabilium quas f continet: exprimere licet x per f reliquasque variabiles x_1, $x_2 \dots x$. Qua ipsius x expressione substituta in functionibus f_1, f_2 etc. continebit f_1 praeter f quasdam variabilium x_1, $x_2 \dots x_n$; alioquin enim f_1 per solam f exprimeretur quod

est contra suppositionem, functiones f, f_1 etc. a se independentes esse. Sit x_1 una variabilium quas praeter f involvit f_1, exprimere licet x_1 per f, f_1, x_2, x_3 .... x_n, quae expressio substituatur in ipsarum x, f_2, f_3 etc. expressionibus inventis, quo facto illae et ipsae per f, f_1, x_2, x_3, ... x_n exprimuntur. Et continebit rursus f_2 quasdam variabilium x_2, x_3 .... x_n, cum e suppositione facta f_2 per solas f, f_1 exprimi nequeat; unde rursus variabilium x_2, x_3 .... x_n aliquam per reliquas atque ipsas f, f_1 f_2 exprimere licet. Hac ratione si pergimus, datis functionibus quibuscunque a se invicem independentibus, variabilium quas continent totidem per reliquas et functiones illas determinantur. Neque plures variabilium x etc. per reliquas ipsasque f etc. exprimi posse, inde patet, quod ponendo $m+1$ aequationes

$$1. \quad \begin{cases} f(x, x_1 \dots x_n) = \omega \\ f_1(x, x_1 \dots x_n) = \omega_1 \\ \dots\dots\dots \\ f_m(x, x_1 \dots x_n) = \omega_m, \end{cases}$$

non plures quam $m+1$ quantitates determinantur. Neque si praeter functiones a se independentes f, f_1 .... f_m aliae proponantur f_{m+1} etc., quae per solas f, f_1 .... f_m exprimi possunt, plures quam $m+1$ variabiles per reliquas ipsasque f, f_1 .... f_m, f_{m+1} etc. exprimere licet; nam cum ipsae f_{m+1} etc. per solas f, f_1 .... f_m exprimantur, hoc idem esset ac si proponeretur plures quam $m+1$ variabiles per reliquas et $m+1$ functiones f, f_1 .... f_m exprimere. Videmus igitur, prout functiones plurium variabilium propositae a se independentes aut non independentes sint, variabilium totidem aut non totidem per reliquas et functiones illas exprimi posse, vel vice versa functiones a se independentes aut non independentes esse, prout variabilium totidem aut non totidem per reliquas functionesque propositas exprimere liceat. Sequitur ut Corollarium, functionum a se independentium numerum variabilium quas continent numerum superare non posse.

Si numerus functionum a se independentium minor est numero variabilium quas continent, variabiles totidem per reliquas functionesque propositas determinandae non semper ex arbitrio sumi possunt. Veluti si in functionibus propositis duae variabiles x et x_1, tantum in binomio $x+x_1$ inter se junctae obveniunt, certo non licet singulas x et x_1 seorsim per functiones illas et reliquas variabiles exprimere. Quoties x, x_1 .... x_m per reliquas x_{m+1} etc. functionesque f, f_1 .... f_m exprimi possunt, inter quantitates

$$f, \; f_1, \; \dots \; f_m, \quad x_{m+1}, \; \dots \; x_n$$

nulla locum habere potest aequatio quae substituendo functionum $f, f_1 \dots f_m$ expressiones identica fiat. Si enim haberetur, ejus ope una insuper variabilium x_{m+1}, x_{m+2} etc., veluti x_{m+1} per quantitates f, $f_1 \dots f_m$, x_{m+2}, $x_{m+3} \dots x_n$ exprimi posset ideoque propositis $m+1$ aequationibus (1.) determinarentur $m+2$ quantitates $x, x_1 \dots x_{m+1}$ quod fieri nequit. Vice versa si inter functiones a se independentes $f, f_1 \dots f_m$ atque variabiles $x_{m+1}, x_{m+2} \dots x_n$ nulla locum habet aequatio quae substituendo functionum $f, f_1, \dots f_m$ expressiones identica fit, ipsas $x, x_1 \dots x_m$ per quantitates

$$f, \; f_1, \; \dots \; f_m, \quad x_{m+1}, \; x_{m+2} \; \dots \; x_n$$

exprimere licet. Vidimus enim §. pr., si $m+1$ aequationibus (1.) incognitae $x, x_1 \dots x_m$ non determinantur, necessario eas incognitas ex aequationibus (1.) eliminari posse; unde prodiret aequatio inter ipsas $\omega, \omega_1 \dots \omega_m$, $x_{m+1}, x_{m+2} \dots x_n$, sive $f, f_1 \dots f_m, x_{m+1}, x_{m+2} \dots x_n$, quod suppositioni factae contrarium est.

Sequitur ex antecedentibus, si $m+1$ functiones $n+1$ variabilium a se independentes proponantur, non modo nullam inter solas functiones illas aequationem locum habere, sed semper etiam e numero $n+1$ variabilium extare $n-m$, inter quas et functiones propositas nulla aequatio locum habeat, sive non modo functionum propositarum independentium nulla per reliquas functiones, sed ne per reliquas quidem illas $n-m$ variabiles exprimi poterit. Functiones $m+1$ a se independentes per quas reliquasque variabiles totidem quantitates $x, x_1 \dots x_m$ exprimi possunt, secundum appellationem supra propositam designare licet ut functiones *variabilium $x, x_1 \dots x_m$ respectu* a se independentes, quippe inter quas nulla aequatio locum habere potest ab ipsis illis variabilibus vacua. Functiones propositae variabilium loco quarum respectu independentes sunt pro variabilibus independentibus sumi atque ut tales in aliis functionibus introduci possunt, quod fit variabiles illas per ipsas functiones aliasque quas functiones involvunt variabiles exprimendo.

5.

Propositis variabilium $x, x_1 \dots x_n$ functionibus totidem

$$f, \; f_1 \; \dots \; f_n,$$

formentur omnium differentialia partialia omnium variabilium respectu sumta, unde prodeunt $(n+1)^2$ quantitates,

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_k}.$$

Determinans ad harum quantitatum systema pertinens,

$$\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \; \ldots . \; \frac{\partial f_n}{\partial x_n},$$

voco *Determinans functionale* vel magis diserte, Determinans ad functiones $f, f_1 \ldots . f_n$ variabilium $x, x_1 \ldots . x_n$ pertinens sive functionum $f, f_1 \ldots . f_n$ Determinans variabilium $x, x_1 \ldots . x_n$ respectu formatum. Nam si plura variabilium systemata modo hoc modo illud pro independentibus sumuntur, accurate indicandum est, quarum respectu functiones differentientur vel formetur Determinans functionale. Si una tantum habetur functio, redit Determinans functionale in Quotientem differentialem functionis.

In genere Determinantis gradus (4*) idem est atque functionum numerus; quoties vero functionum propositarum complures ipsis variabilibus aequantur, Determinantis gradus minuitur. Sit ex. gr.

$$f_{m+1} = x_{m+1}, \quad f_{m+2} = x_{m+2}, \quad \ldots . \quad f_n = x_n,$$

fit Determinans functionale propositum,

$$\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \; \ldots . \; \frac{\partial f_m}{\partial x_m}.$$

Si omnes functiones propositae singulae singulis variabilibus aequantur, Determinans propositum in *unitatem* abit. Si functiones

$$f_{m+1}, \; f_{m+2}, \; \ldots . \; f_n$$

ipsarum $x_{m+1}, x_{m+2} \ldots . x_n$ functiones quaecunque sunt, ipsas $x, x_1 \ldots . x_m$ non involventes, fit Determinans propositum,

$$\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \; \ldots . \; \frac{\partial f_n}{\partial x_n} =$$

$$\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \; \ldots . \; \frac{\partial f_m}{\partial x_m} \cdot \Sigma \pm \frac{\partial f_{m+1}}{\partial x_{m+1}} \cdot \frac{\partial f_{m+2}}{\partial x_{m+2}} \; \ldots . \; \frac{\partial f_n}{\partial x_n}.$$

Quae omnia ex iis sequuntur, quae in Commentatione „*De Determinantibus*" §. 5. probavi, dummodo ipsius $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}$ loco ponitur $a_k^{(i)}$.

6.

In limine quaestionum de Determinantibus functionalibus se offert Propositio, functionum a se non independentium evanescere Determinans, functiones quarum Determinans evanescat non esse a se independentes. Demonstremus primum functionum a se non independentium evanescere Determinans. Sint $f, f_1 \ldots . f_n$ non a se independentes ita ut inter eas locum habeat aequatio,

$$\Pi(f, f_1 \ldots . f_n) = 0,$$

quae identica fiat substituendo ipsis $f, f_1 \dots f_n$ ipsas variabilium $x, x_1 \dots x_n$ expressiones quibus aequantur. Aequationem antecedentem singularum variabilium respectu differentiando obtinemus hoc aequationum systema,

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial f} + \frac{\partial f_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial f_1} \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial f_n}$$

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial f} + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial f_1} \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial f_n}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial f} + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial f_1} \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial f_n}.$$

Quae aequationes haberi possunt pro systemate aequationum linearium inter totidem incognitas,

$$\frac{\partial \Pi}{\partial f}, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial f_1}, \quad \dots \quad \frac{\partial \Pi}{\partial f_n},$$

in quo termini constantes nihilo aequantur. De eiusmodi systemate constat (7*), nisi omnes simul evanescant incognitae, eius Determinans necessario evanescere. Quantitates autem $\frac{\partial \Pi}{\partial f}$ etc. omnes simul evanescere nequeunt, quod idem foret ac si Π omnibus $f, f_1 \dots f_n$ careret, unde quoties functiones $f, f_1 \dots f_n$ a se independentes non sunt fieri debet,

$$\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \dots \frac{\partial f_n}{\partial x_n} = 0,$$

q. d. e.

7.

Paullo prolixior est demonstratio rigorosa Propositionis inversae, quoties evanescat Determinans, functiones non a se independentes esse. Quam ita adornabo demonstrationem ut primum probem, si theorema antecedens de n functionibus propositum iustum sit, idem de $n+1$ functionibus valere. Unde valebit Propositio de quocunque functionum numero ubi de duabus functionibus comprobata erit.

Vocemus

$$A, \quad A_1, \quad \dots \quad A_n$$

expressiones quae in Determinante,

$$\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \dots \frac{\partial f_n}{\partial x_n},$$

resp. multiplicatae inveniuntur per

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} \dots \frac{\partial f}{\partial x_n};$$

habentur aequationes identicae (6*):

$$1.\quad \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\;\ldots\;\frac{\partial f_n}{\partial x_n} = \frac{\partial f}{\partial x}A + \frac{\partial f}{\partial x_1}A_1 \;\ldots\; + \frac{\partial f}{\partial x_n}A_n$$

$$2.\quad \begin{cases} 0 = \frac{\partial f_1}{\partial x}A + \frac{\partial f_1}{\partial x_1}A_1 \;\ldots\; + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}A_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 = \frac{\partial f_n}{\partial x}A + \frac{\partial f_n}{\partial x_1}A_1 \;\ldots\; + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}A_n. \end{cases}$$

Statuamus functiones $f_1, f_2 \ldots f_n$ a se independentes esse; si enim non sunt, iam locum habet, quod demonstratu proponitur, functiones propositas non a se independentes esse. Poterunt variabilium $x, x_1 \ldots x_n$ numerus n, veluti $x_1, x_2 \ldots x_n$ per x ipsasque $f_1, f_2 \ldots f_n$ exprimi ita ut $f, f_2 \ldots f_n$ ipsarum $x_1, x_2 \ldots x_n$ respectu a se independentes sint (v. §. 4.). Quas ipsarum $x_1, x_2 \ldots x_n$ expressiones in functione f introducenda, ipsa f evadit functio variabilium,

$$x, f_1, f_2 \ldots f_n.$$

Differentialia partialia harum variabilium respectu sumta uncis includamus: fit

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial f_1}\right)\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x} + \left(\frac{\partial f}{\partial f_2}\right)\cdot\frac{\partial f_2}{\partial x} \;\ldots\; + \left(\frac{\partial f}{\partial f_n}\right)\cdot\frac{\partial f_r}{\partial x}.$$

porro si i quemcunque indicum $1, 2 \ldots n$ designat,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial f}{\partial f_1}\right)\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \left(\frac{\partial f}{\partial f_2}\right)\cdot\frac{\partial f_2}{\partial x_i} \;\ldots\; + \left(\frac{\partial f}{\partial f_n}\right)\cdot\frac{\partial f_n}{\partial x_i}.$$

Quibus expressionibus substitutis in (1.), expressiones resp. multiplicatae per

$$\left(\frac{\partial f}{\partial f_1}\right),\; \left(\frac{\partial f}{\partial f_2}\right),\; \ldots\; \left(\frac{\partial f}{\partial f_n}\right),$$

propter formulas (2.) identice evanescunt. Unde prodit formula memorabilis,

$$\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\;\ldots\;\frac{\partial f_n}{\partial x_n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)A$$

sive

$$3.\quad \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\;\ldots\;\frac{\partial f_n}{\partial x_n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\;\ldots\;\frac{\partial f_n}{\partial x_n}.$$

Evanescente igitur Determinante ad laevam, evanescere debet aut $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ aut Determinans,

$$\Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\;\ldots\;\frac{\partial f_n}{\partial x_n} = A.$$

Supponimus propositum de n functionibus valere sive Determinante n functionum evanescente functiones non a se independentes esse. Unde evanescente Determinante praecedente A, functiones $f_1, f_2 \ldots f_n$ ipsarum x_1, $x_2 \ldots x_n$ respectu non a se independentes forent, quod suppositioni factae

contrarium est. Evanescere igitur debet alter factor $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$, unde sequitur f per solas f_1, f_2 .... f_n absque variabili x exprimi posse. Itaque functiones f, f_1 .... f_n non a se independentes erunt, q. e. d.

Propositum postquam de $n+1$ functionibus est demonstratum ubi de n functionibus valet, generaliter valebit ubi de duabus functionibus comprobatum erit. Quod ita fit. Sint f, f_1 ipsarum x, x_1 functiones quarum Determinans evanescat sive sit identica,

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} - \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x} = 0.$$

Est f_1 aut Constans aut alteram certe variabilium veluti x_1 involvit, unde x_1 per x et f_1 exprimi potest. Qua expressione in f substituta fit,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial f_1}\right) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{\partial f}{\partial f_1}\right) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1}$$

unde

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} - \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1}.$$

Alter factor $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}$ non evanescit cum f_1 ipsam x_1 implicare supponamus, unde fit,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 0,$$

sive functio f per x et f_1 expressa variabili x vacat soliusque f_1 functio fit. Evictum igitur est, quoties identice sit,

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} - \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x} = 0,$$

aut esse f_1 Constantem aut f ipsius f_1 functionem, ideoque functiones f, f_1 non independentes esse, q. d. e.

E Propositione, functionum non a se independentium evanescere Determinans, sequitur functiones quarum non evanescat Determinans a se independentes esse; e Propositione, functiones quarum evanescat Determinans non a se independentes esse, sequitur functionum a se independentium non evanescere Determinans.

Si una tantum haberetur functio, Propositiones antecedentibus probatae in hanc redirent, functionem esse Constantem aut non esse Constantem prout eius differentiale aut evanescat aut non evanescat. Vice versa antecedentia docent, hanc Propositionem ad systema functionum plurium

variabilium extendi posse, si conditioni functionem esse Constantem substituatur conditio functiones a se non independentes esse, differentiali autem substituatur Determinans functionale.

8.

Designantibus $f, f_1 \ldots . f_n$ variabilium $x, x_1 \ldots . x_n$ functiones a se independentes, si proponitur hoc systema aequationum linearium,

$$1. \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} r + \frac{\partial f}{\partial x_1} r_1 \ldots . + \frac{\partial f}{\partial x_n} r_n = s \\ \frac{\partial f_1}{\partial x} r + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} r_1 \ldots . + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} r_n = s_1 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial x} r + \frac{\partial f_n}{\partial x_1} r_1 \ldots . + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} r_n = s_n \end{cases}$$

aut hoc

$$2. \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} t + \frac{\partial f_1}{\partial x} t_1 \ldots . + \frac{\partial f_n}{\partial x} t_n = u \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} t + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} t_1 \ldots . + \frac{\partial f_n}{\partial x_1} t_n = u_1 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} t + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} t_1 \ldots . + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} t_n = u_n, \end{cases}$$

earum aequationum resolutio semper possibilis et determinata est. Quippe secundum theoriam notam aequationum linearium tum demum accidit ut aequationes lineares impossibiles aut ad determinandas incognitas insufficientes evadant si earum Determinans evanescit (7*). At aequationum (1.) aut (2.) Determinans,

$$\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \ldots . \frac{\partial f_n}{\partial x_n},$$

quoties functiones $f, f_1 \ldots . f_n$ a se independentes sunt, non evanescere §. pr. demonstravi.

Ipsam resolutionem aequationum (1.) aut (2.) hac ratione eruimus. Cum $f, f_1 \ldots . f_n$ a se independentes sint, ipsas x, x_1 etc. per f, f_1 etc. exprimere licet. Quibus expressionibus substitutis in alia quacunque ipsarum x, x_1 etc. functione φ, ea in functionem ipsarum f, f_1 etc. abit. Eritque ipsius φ differentiale partiale quantitatis f_k respectu sumtum,

$$3. \quad \frac{\partial \varphi}{\partial f_k} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial f_k} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial f_k} \ldots . + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial f_k}.$$

Hinc ponendo $\Phi = f_i$ prodit, prout $k = i$ aut k a i diversus est:

$$4.\quad \begin{cases} \frac{\partial f_i}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial f_i}+\frac{\partial f_i}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial f_i}\;\ldots\ldots+\frac{\partial f_i}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial x_n}{\partial f_i} = 1 \\ \frac{\partial f_i}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial f_k}+\frac{\partial f_i}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial f_k}\;\ldots\ldots+\frac{\partial f_i}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial x_n}{\partial f_k} = 0. \end{cases}$$

Si in ipsius x_k expressione per f, f_1 etc. exhibita substituimus ipsarum f, f_1 etc. expressiones propositas, ea identice ipsi x_k aequalis fit, qua de re eam ipsius x_k aut alius variabilis x_i respectu differentiando nanciscimur unitatem aut nihilum, sive fit:

$$5.\quad \begin{cases} \frac{\partial x_k}{\partial f}\cdot\frac{\partial f}{\partial x_k}+\frac{\partial x_k}{\partial f_1}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x_k}\;\ldots\ldots+\frac{\partial x_k}{\partial f_n}\cdot\frac{\partial f_n}{\partial x_k} = 1 \\ \frac{\partial x_k}{\partial f}\cdot\frac{\partial f}{\partial x_i}+\frac{\partial x_k}{\partial f_1}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x_i}\;\ldots\ldots+\frac{\partial x_k}{\partial f_n}\cdot\frac{\partial f_n}{\partial x_i} = 0. \end{cases}$$

Multiplicando (1.) respective per

$$\frac{\partial x_k}{\partial f},\quad \frac{\partial x_k}{\partial f_1},\quad \ldots\ldots\quad \frac{\partial x_k}{\partial f_n}$$

et addendo, fit aequationum (5.) ope:

$$6.\quad r_k = \frac{\partial x_k}{\partial f}s+\frac{\partial x_k}{\partial f_1}s_1\;\ldots\ldots+\frac{\partial x_k}{\partial f_n}s_n.$$

Multiplicando (2.) respective per

$$\frac{\partial x}{\partial f_i},\quad \frac{\partial x_1}{\partial f_i},\quad \ldots\ldots\quad \frac{\partial x_n}{\partial f_i}$$

et addendo, fit aequationum (4.) ope:

$$7.\quad t_i = \frac{\partial x}{\partial f_i}u+\frac{\partial x_1}{\partial f_i}u_1\;\ldots\ldots+\frac{\partial x_n}{\partial f_i}u_n.$$

Quae formulae has suppeditant Propositiones:

I. Sint variabilium $x, x_1 \ldots\ldots x_n$ functiones $f, f_1 \ldots\ldots f_n$ a se invicem independentes, si proponitur hoc aequationum linearium systema,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}r+\frac{\partial f}{\partial x_1}r_1\;\ldots\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_n}r_n &= s \\ \frac{\partial f_1}{\partial x}r+\frac{\partial f_1}{\partial x_1}r_1\;\ldots\ldots+\frac{\partial f_1}{\partial x_n}r_n &= s_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x}r+\frac{\partial f_n}{\partial x_1}r_1\;\ldots\ldots+\frac{\partial f_n}{\partial x_n}r_n &= s_n, \end{aligned}$$

earum resolutio semper est possibilis et determinata eruntque incognitarum valores:

$$r = \frac{\partial x}{\partial f} s + \frac{\partial x}{\partial f_1} s_1 \ldots + \frac{\partial x}{\partial f_n} s_n$$
$$r_1 = \frac{\partial x_1}{\partial f} s + \frac{\partial x_1}{\partial f_1} s_1 \ldots + \frac{\partial x_1}{\partial f_n} s_n$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$r_n = \frac{\partial x_n}{\partial f} s + \frac{\partial x_n}{\partial f_1} s_1 \ldots + \frac{\partial x_n}{\partial f_n} s_n.$$

II. Sint variabilium $x, x_1 \ldots x_n$ functiones $f, f_1 \ldots f_n$ a se invicem independentes, si proponitur hoc aequationum linearium systema:

$$\frac{\partial f}{\partial x} t + \frac{\partial f_1}{\partial x} t_1 \ldots + \frac{\partial f_n}{\partial x} t_n = u$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_1} t + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} t_1 \ldots + \frac{\partial f_n}{\partial x_1} t_n = u_1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_n} t + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} t_1 \ldots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} t_n = u_n,$$

earum resolutio semper est possibilis et determinata eruntque incognitarum valores:

$$t = \frac{\partial x}{\partial f} u + \frac{\partial x_1}{\partial f} u_1 \ldots + \frac{\partial x_n}{\partial f} u_n$$
$$t_1 = \frac{\partial x}{\partial f_1} u + \frac{\partial x_1}{\partial f_1} u_1 \ldots + \frac{\partial x_n}{\partial f_1} u_n$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$t_n = \frac{\partial x}{\partial f_n} u + \frac{\partial x_1}{\partial f_n} u_1 \ldots + \frac{\partial x_n}{\partial f_n} u_n.$$

Ex his Propositionibus sequentia fluunt Corollaria:

III. Si variabilium $x, x_1 \ldots x_n$ functiones $f, f_1 \ldots f_n$ a se independentes sunt, ex aequationibus,

$$\frac{\partial f}{\partial x} r + \frac{\partial f}{\partial x_1} r_1 \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} r_n = 0$$
$$\frac{\partial f_1}{\partial x} r + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} r_1 \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} r_n = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{\partial f_n}{\partial x} r + \frac{\partial f_n}{\partial x_1} r_1 \ldots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} r_n = 0,$$

necessario sequitur

$$r = 0, \quad r_1 = 0, \quad \ldots \quad r_n = 0.$$

IV. Si variabilium $x, x_1 \ldots x_n$ functiones $f, f_1 \ldots f_n$ a se independentes sunt, ex aequationibus,

$$\frac{\partial f}{\partial x}t + \frac{\partial f_1}{\partial x}t_1 \ldots + \frac{\partial f_n}{\partial x}t_n = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_1}t + \frac{\partial f_1}{\partial x_1}t_1 \ldots + \frac{\partial f_n}{\partial x_1}t_n = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_n}t + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}t_1 \ldots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}t_n = 0,$$

necessario sequitur

$$t = 0, \quad t_1 = 0, \quad \ldots\ldots \quad t_n = 0.$$

Si in Propositione I. aut II. aequationes lineares et propositas et resolutas accuratius inspicimus, videmus alias ex aliis obtineri, incognitas r aut t cum terminis constantibus s aut u simulque quotientes differentiales $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}$ cum quotientibus differentialibus $\frac{\partial x_k}{\partial f_i}$ commutando. Quod facilem suppeditat regulam pro eiusmodi aequationum linearium resolutione. Simul e formulis praecedentibus patet quomodo quotientes differentiales $\frac{\partial x_k}{\partial f_i}$ e quotientibus differentialibus $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}$ obtineantur. Collatis enim formulis praecedentibus cum iis quae per notos algorithmos algebraicos resolutioni aequationum linearium intervenientes obtinentur, formato Determinante

$$R = \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \ldots\ldots \frac{\partial f_n}{\partial x_n},$$

sequitur

$$8. \quad R \cdot \frac{\partial x_k}{\partial f_i} = \frac{\partial R}{\partial \cdot \frac{\partial f_i}{\partial x_k}},$$

sive aequatur $R \cdot \frac{\partial x_k}{\partial f_i}$ Aggregato terminorum quod in Determinante R per $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}$ multiplicatum reperitur; unde ex. gr. fit,

$$9. \quad R \cdot \frac{\partial x}{\partial f} = \Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \ldots\ldots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}.$$

9.

Adnotari potest succincta differentialium partialium Determinantis functionalis expressio quam per formulam (8.) §. pr. obtinere licet. Proponatur ipsum R differentiare quantitatis alicuius a respectu quae *sive una variabilium x, x_1 etc. sive alia quaecunque quantitas sit* quam functiones

f, f etc. implicant: fit

$$\frac{\partial R}{\partial a} = \Sigma \cdot \frac{\partial R}{\partial \frac{\partial f_i}{\partial x_k}} \cdot \frac{\partial^2 f_i}{\partial a \, \partial x_k},$$

utrique i et k sub signo Σ tributis valoribus omnibus $0, 1, 2 \ldots, n$. Formula praecedens per (8.) §. pr. in hanc abit:

$$\frac{\partial R}{\partial a} = R \, \Sigma \cdot \frac{\partial^2 f_i}{\partial a \, \partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial f_i};$$

fit autem

$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial a \, \partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial f_i} + \frac{\partial^2 f_i}{\partial a \, \partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial f_i} \ldots + \frac{\partial^2 f_i}{\partial a \, \partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial f_i} = \frac{\partial \frac{\partial f_i}{\partial a}}{\partial f_i},$$

unde prodit formula:

$$1. \quad \frac{\partial \log R}{\partial a} = \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial a}}{\partial f} + \frac{\partial \frac{\partial f_1}{\partial a}}{\partial f_1} \ldots + \frac{\partial \frac{\partial f_n}{\partial a}}{\partial f_n}.$$

Itaque ad obtinendum $\frac{\partial R}{\partial a}$; expressionum propositarum f, f_1 etc. quaeque f_i ipsius a respectu differentietur, differentiale per ipsas f, $f_1 \ldots f_n$ exprimatur eaque expressio ipsius f_i respectu differentietur: horum omnium $n+1$ differentialium Aggregatum aequabit ipsum $\frac{\partial R}{\partial a}$.

In Commentatione *de Determinantibus* §. 10. demonstravi, posito

$$R = \Sigma \pm a a'_1 a''_2 \ldots a_n^{(n)}, \qquad A_k^{(i)} = \frac{\partial R}{\partial a_k^{(i)}},$$

fieri

$$\Sigma \pm A A'_1 \ldots A_m^{(m)} = R^m \, \Sigma \pm a_{m+1}^{(m+1)} a_{m+2}^{(m+2)} \ldots a_n^{(n)}.$$

Statuendo

$$a_k^{(i)} = \frac{\partial f_i}{\partial x_k},$$

secundum (8.) §. pr. fit,

$$A_k^{(i)} = R \frac{\partial x_k}{\partial f_i},$$

quod substituendo et dividendo per R^m abit formula praecedens in hanc:

$$2. \quad R \, \Sigma \pm \frac{\partial x}{\partial f} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial f_1} \ldots \frac{\partial x_m}{\partial f_m} = \Sigma \pm \frac{\partial f_{m+1}}{\partial x_{m+1}} \cdot \frac{\partial f_{m+2}}{\partial x_{m+2}} \ldots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}.$$

Ex hac formula permutatione indicum sive ipsarum x sive ipsarum f plurimae aliae obtinentur. Si ponitur $m = n$, loco citato formula prodit,

$$\Sigma \pm A A'_1 \ldots A_n^{(n)} = R^n.$$

unde eo casu abit (2.) in hanc formulam,

$$R\Sigma \pm \frac{\partial x}{\partial f}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial f_1}\;\ldots\;\frac{\partial x_n}{\partial f_n} = 1$$

sive

$$3.\quad \Sigma \pm \frac{\partial x}{\partial f}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial f_1}\;\ldots\;\frac{\partial x_n}{\partial f_n} = \frac{1}{\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\;\ldots\;\frac{\partial f_n}{\partial x_n}}.$$

Si una habetur unius variabilis x functio f et vice versa x per f exprimitur, ipsius x differentiale sumtum ipsius f respectu valore reciproco gaudet differentialis functionis f ipsius x respectu sumti. Similiter formula praecedens docet, si habeantur $n+1$ variabilium x, x_1 .... x_n totidem functiones f, f_1 .... f_n et vice versa x, x_1 .... x_n per f, f_1 .... f_n exprimantur, Determinans functionale ipsorum x, x_1 .... x_n, formatum ipsorum f, f_1 .... f_n respectu, gaudere valore reciproco Determinantis functionalis ipsorum f, f_1 .... f_n variabilium x, x_1 .... x_n respectu formati.

10.

Antecedentia docent quomodo obtineatur Determinans functionale si non ipsae dantur functionum expressiones explicitae sed vice versa variabiles per functiones exhibitae dantur. Qua quaestio redit in generaliorem invenire Determinans functionale si definiantur functiones per aequationes, inter functiones ipsas et variabilis propositas, sive si functiones implicite dantur.

Definiantur ipsarum x, x_1 .... x_n functiones f, f_1 .... f_n per aequationes sequentes inter omnes illas $2n+2$ quantitates propositas,

$$F = 0,\quad F_1 = 0,\quad F_2 = 0,\quad \ldots\ldots\quad F_n = 0.$$

Substituendo functionum f, f_1 .... f_n expressiones per x, x_1 .... x_n exhibitae, ex aequationibus illis prodeuntes, earum aequationum quaevis,

$$F_i = 0,$$

identica evadit. Quam aequationem differentiando variabilis alicuius x_k respectu prodit

$$1.\quad 0 = \frac{\partial F_i}{\partial x_k} + \frac{\partial F_i}{\partial f}\cdot\frac{\partial f}{\partial x_k} + \frac{\partial F_i}{\partial f_1}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x_k}\;\ldots\;+\frac{\partial F_i}{\partial f_n}\cdot\frac{\partial f_n}{\partial x_k}.$$

Statuamus

$$2.\quad \frac{\partial F_i}{\partial f_m} = a_m^{(i)},\qquad \frac{\partial f_m}{\partial x_k} = a_m^{(k)},$$

sit porro

$$a^{(i)}a^{(k)} + a_1^{(i)}a_1^{(k)} \ldots + a_n^{(i)}a_n^{(k)} = c_k^{(i)}$$

erit e (1.):

$$3. \quad c_k^{(i)} = -\frac{\partial F_i}{\partial x_k}.$$

Iam vero habetur formula nota (13*),

$$\Sigma \pm c c_1' c_2'' \ldots c_n^{(n)} = \Sigma \pm a a_1' a_2'' \ldots a_n^{(n)} . \Sigma \pm a a_1' a_2'' \ldots a_n^{(n)};$$

unde substituendo (2.) et (3.) provenit,

$$4. \quad (-)^{n+1} \Sigma \pm \frac{\partial F}{\partial x} . \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial F_n}{\partial x_n} =$$

$$\Sigma \pm \frac{\partial F}{\partial f} . \frac{\partial F_1}{\partial f_1} \ldots \frac{\partial F_n}{\partial f_n} . \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} . \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}.$$

Quae formula suppeditat valorem Determinantis functionalis propositi,

$$5. \quad \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} . \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial f_n}{\partial x_n} = (-1)^{n+1} \frac{\Sigma \pm \frac{\partial F}{\partial x} . \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial F_n}{\partial x_n}}{\Sigma \pm \frac{\partial F}{\partial f} . \frac{\partial F_1}{\partial f_1} \ldots \frac{\partial F_n}{\partial f_n}}.$$

Variabilis x functione aliqua f definita per aequationem,

$$F(f, x) = 0,$$

obtinetur functionis f differentiale, variabilis x respectu sumtum si ipsius F differentialia ipsarum f et x respectu sumta alterum per alterum dividuntur et signum negativum praefigitur. Prorsus simili modo, docet formula (5.), variabilium $x, x_1 \ldots x_n$ functionibus $f, f_1 \ldots f_n$ definitis per aequationes,

$$F = 0, \quad F_1 = 0, \quad \ldots \quad F_n = 0,$$

functionum $f, f_1 \ldots f_n$ Determinans, variabilium $x, x_1 \ldots x_n$ respectum formatum, aequari Quotienti duorum ipsarum $F, F_1, \ldots F_n$ Determinantium ipsarum $f, f_1 \ldots f_n$ et ipsarum $x, x_1 \ldots x_n$ respectu formatorum, signo $+$ aut $-$ praefixo prout ipsarum f, f_1 etc. numerus par aut impar est.

E formula generali (5.) sequitur ut Corollarium formula §. pr. demonstrata. Invenimus enim Propositionem, datis inter ipsas $x, x_1 \ldots x_n$, $f, f_1 \ldots f_n$ aequationibus $F=0, F_1=0, \ldots F_n=0$, si $f, f_1 \ldots f_n$ per $x, x_1 \ldots x_n$ exprimantur, fieri,

$$\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} . \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial f_n}{\partial x_n} = (-)^{n+1} \frac{\Sigma \pm \frac{\partial F}{\partial x} . \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial F_n}{\partial x_n}}{\Sigma \pm \frac{\partial F}{\partial f} . \frac{\partial F_1}{\partial f_1} \ldots \frac{\partial F_n}{\partial f_n}}$$

unde secundum eandem Propositionem si $x, x_1 \ldots x_n$ per $f, f_1 \ldots f_n$ exprimantur fieri debet.

$$\Sigma \pm \frac{\partial x}{\partial f} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial f_1} \dots \frac{\partial x_n}{\partial f_n} = (-)^{n+1} \frac{\Sigma \pm \frac{\partial F}{\partial f} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial f_1} \dots \frac{\partial F_n}{\partial f_n}}{\Sigma \pm \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \dots \frac{\partial F_n}{\partial x_n}},$$

ideoque

$$\Sigma \pm \frac{\partial x}{\partial f} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial f_1} \dots \frac{\partial x_n}{\partial f_n} = \frac{1}{\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \dots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}},$$

quod §. pr. probavi.

11.

Supponamus functiones $f, f_1 \dots f_n$ non immediate per ipsas variabiles $x, x_1 \dots x_n$, sed per earum functiones,

$$\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_p$$

expressas dari. Sit

$$1. \quad \alpha_m^{(i)} = \frac{\partial f_i}{\partial \varphi_m}, \quad a_m^{(k)} = \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_k},$$

unde statuendo,

$$c_k^{(i)} = \alpha^{(i)} a^{(k)} + \alpha_1^{(i)} a_1^{(k)} \dots + \alpha_p^{(i)} a_p^{(k)}$$
$$= \frac{\partial f_i}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} + \frac{\partial f_i}{\partial \varphi_1} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_k} \dots + \frac{\partial f_i}{\partial \varphi_p} \cdot \frac{\partial \varphi_p}{\partial x_k},$$

erit

$$2. \quad c_k^{(i)} = \frac{\partial f_i}{\partial x_k}.$$

Invenimus in Commentatione *de Determinantibus* §. 12 sqq., si $p < n$:

$$3. \quad \Sigma \pm c c_1' c_2'' \dots c_n^{(n)} = 0,$$

si $p = n$,

$$4. \quad \Sigma \pm c c_1' c_2'' \dots c_n^{(n)} = \Sigma \pm \alpha \alpha_1' \dots \alpha_n^{(n)} . \Sigma \pm a a_1' \dots a_n^{(n)},$$

si $p > n$,

$$5. \quad \Sigma \pm c c_1' c_2'' \dots c_n^{(n)} = S . \{ \Sigma \pm \alpha_m \alpha'_{m'} \dots \alpha^{(n)}_{m^{(n)}} . \Sigma \pm a_m a'_{m'} \dots a^{(n)}_{m^{(n)}} \},$$

ubi signum S pertinet ad cunctas combinationes quibus pro indicibus m, $m' \dots m^{(n)}$ sumuntur $n+1$ diversi ex ipsis $0, 1, 2 \dots p$. Ex his tribus formulis (3.), (4.), (5.), substituendo elementis,

$$\alpha_m^{(i)}, \quad a_m^{(k)}, \quad c_k^{(i)},$$

differentialia partialia (1.) et (2.), tres Propositiones sequentes fluunt:

Propositio I.

Determinans functionum, quae omnes per minorem functionum numerum exprimi possunt, evanescit.

Haec Propositio cum iis convenit quae supra demonstravi; quoties enim functiones propositas per minorem aliarum quantitatum numerum exprimere licet, functiones non sunt a se invicem independentes (§. 4.), functionum autem a se non independentium Determinans evanescit (§. 6.).

Propositio II.

Sint $f, f_1 \dots f_n$ quantitatum $\varphi, \varphi_1 \dots \varphi_n$, ipsae $\varphi, \varphi_1 \dots \varphi_n$ quantitatum $x, x_1 \dots x_n$ functiones, unde ipsae quoque $f, f_1 \dots f_n$ pro quantitatum $x, x_1 \dots x_n$ functionibus haberi possunt; quarum functionum Determinans aequatur producto e Determinante functionum $f, f_1 \dots f_n$ ipsarum $\varphi, \varphi_1 \dots \varphi_n$ respectu atque Determinante functionum $\varphi, \varphi_1 \dots \varphi_n$ ipsarum $x, x_1 \dots x_n$ respectu formato sive fit,

$$\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n} = \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_1} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial \varphi_n} \cdot \Sigma \pm \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}.$$

Haec Propositio est prorsus analoga ei, in quam pro $n = 0$ redit, designante f ipsius y, y ipsius x functione, esse

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Neque formulae simplicitas minuitur modo differentialibus Determinantia functionalia substituantur.

Propositio III.

Sint $f, f_1 \dots f_n$ functiones maioris numeri quantitatum, $\varphi, \varphi_1 \dots \varphi_p$, quae ipsae sunt variabilium $x, x_1 \dots x_n$ functiones; formetur productum duorum Determinantium,

$$\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_1} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial \varphi_n} \cdot \Sigma \pm \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n},$$

omniaque similia pro quibuscunque $n+1$ e $p+1$ functionibus $\varphi_1, \varphi_1 \dots \dots \varphi_p$: omnium horum productorum summa aequatur Determinanti functionum $f, f_1 \dots f_n$ ipsarum $x, x_1 \dots x_n$ respectu formato, sive fit:

$$\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n} = S\left\{\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_1} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial \varphi_n} \cdot \Sigma \pm \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}\right\}.$$

Haec Propositio analoga est huic, functionis plurium quantitatum differentiale obtineri differentialia functionis singularum quantitatum respectu sumta respective per singularum quantitatum differentialia multiplicando omniaque producta addendo.

Sequitur e Propositione II. haec ut Corollarium, in qua ipsius Φ loco elementum y posui:

Propositio IV.

Sint $f, f_1 \ldots. f_n$ quantitatum $y, y_1 \ldots. y_n$ functiones, ei exprimuntur cum $f, f_1 \ldots. f_n$ tum $y, y_1 \ldots. y_n$ per alias quantitates,

$$x, x_1 \ldots. x_n,$$

erit

$$\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \ldots. \frac{\partial f_n}{\partial y_n} = \frac{\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \ldots. \frac{\partial f_n}{\partial x_n}}{\Sigma \pm \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \ldots. \frac{\partial y_n}{\partial x_n}}.$$

Haec Propositio huic respondet, in expressione $\frac{df}{dy}$ perinde esse quaenam variabilis sit cuius respectu differentietur, sive expressa et f et y per aliam quamlibet variabilem x, fieri

$$\frac{df}{dy} = \frac{\frac{df}{dx}}{\frac{dy}{dx}}.$$

Si in Propositione IV. ponitur $f = x$, $f_1 = x_1 \ldots. f_n = x_n$, redimus in formulam (3.) §. 9.

12.

E Propositionibus §. pr. traditis aliae quaedam fluunt adnotatu dignae. In Propositione II. §. pr. ponamus,

$$\Phi = x, \quad \Phi_1 = x_1, \quad \ldots. \quad \Phi_m = x_m,$$

secundum §. 5. fit,

$$\Sigma \pm \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \ldots. \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} = \Sigma \pm \frac{\partial \varphi_{m+1}}{\partial x_{m+1}} \cdot \frac{\partial \varphi_{m+2}}{\partial x_{m+2}} \ldots. \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}.$$

Unde docet Prop. II., si in Determinante functionali,

$$\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \ldots. \frac{\partial f_n}{\partial x_n},$$

ipsarum $x_{m+1}, x_{m+2} \ldots. x_n$ loco aliae ipsarum $x, x_1 \ldots. x_n$ functiones,

$$\Phi_{m+1}, \quad \Phi_{m+2}, \quad \ldots. \quad \Phi_n,$$

pro variabilibus independentibus introducantur, fieri

$$1.\quad \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\;\dots\;\frac{\partial f_n}{\partial x_n} =$$

$$\Sigma\pm\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\dots\frac{\partial f_m}{\partial x_m}\cdot\frac{\partial f_{m+1}}{\partial \varphi_{m+1}}\cdot\frac{\partial f_{m+2}}{\partial \varphi_{m+2}}\dots\frac{\partial f_n}{\partial \varphi_n}\cdot\Sigma\frac{\partial \varphi_{m+1}}{\partial x_{m+1}}\cdot\frac{\partial \varphi_{m+2}}{\partial x_{m+2}}\dots\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}.$$

Hinc si unius tantum variabilis x_n loco alia variabilis Φ introducitur, fit,

$$2.\quad \Sigma\pm\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\dots\frac{\partial f_n}{\partial x_n} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}\cdot\Sigma\pm\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\;\dots\;\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\cdot\frac{\partial f_n}{\partial \varphi}.$$

Si insuper in formula (1.) ponitur,

$$\Phi_{m+1} = f_{m+1},\quad \Phi_{m+2} = f_{m+2},\quad \dots\quad \Phi_n = f_n,$$

fit secundum §. 5.,

$$\Sigma\pm\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\dots\frac{\partial f_m}{\partial x_m}\cdot\frac{\partial f_{m+1}}{\partial \varphi_{m+1}}\cdot\frac{\partial f_{m+2}}{\partial \varphi_{m+2}}\dots\frac{\partial f_n}{\partial \varphi_n} = \Sigma\pm\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\dots\frac{\partial f_m}{\partial x_m}.$$

Unde sequitur Propositio prae ceteris memorabilis Determinans functionale

$$\Sigma\pm\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\;\dots\;\frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$

si in functionibus $f, f_1 \dots f_m$ variabilium $x_{m+1}, x_{m+2} \dots x_n$ loco ipsae $f_{m+1}, f_{m+2} \dots f_n$ introducantur, fieri

$$3.\quad \Sigma\pm\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\;\dots\;\frac{\partial f_n}{\partial x_n} =$$

$$\Sigma\pm\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\;\dots\;\frac{\partial f_m}{\partial x_m}\cdot\Sigma\pm\frac{\partial f_{m+1}}{\partial x_{m+1}}\cdot\frac{\partial f_{m+2}}{\partial x_{m+2}}\;\dots\;\frac{\partial f_n}{\partial x_n}.$$

Qua in formula tenendum est, duorum Determinantium in se ductorum prius ipsarum $x, x_1 \dots x_m, f_{m+1}, f_{m+2} \dots f_n$ respectu formatum esse, in posteriore ipsas $f_{m+1}, f_{m+2} \dots f_n$ pro variabilium $x, x_1 \dots x_n$ functionibus haberi. E formula praecedente pro $m = 0$ sequitur,

$$4.\quad \Sigma\pm\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\;\dots\;\frac{\partial f_n}{\partial x_n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\Sigma\pm\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\;\dots\;\frac{\partial f_n}{\partial x_n},$$

in qua uncis innuitur ipsam f pro ipsarum $f, x_1, x_2 \dots x_n$ functione haberi. Hanc formulam iam supra §. 7. demonstravi.

Datis ipsarum $x, x_1 \dots x_n$ functionibus $\Phi_{m+1}, \Phi_{m+2}, \dots \varphi_n$, si exprimuntur $x_{m+1}, x_{m+2} \dots x_n$ per $x, x_1 \dots x_m, \Phi_{m+1}, \Phi_{m+2} \dots \Phi_n$, fit secundum §. 9. (3.):

$$\Sigma\pm\frac{\partial \varphi_{m+1}}{\partial x_{m+1}}\cdot\frac{\partial \varphi_{m+2}}{\partial x_{m+2}}\;\dots\;\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} = \frac{1}{\Sigma\pm\frac{\partial x_{m+1}}{\partial \varphi_{m+1}}\cdot\frac{\partial x_{m+2}}{\partial \varphi_{m+2}}\;\dots\;\frac{\partial x_n}{\partial \varphi_n}}.$$

Qua in formula in formandis Determinantibus functionalibus habentur quantitates $x, x_1 \dots x_m$ pro Constantibus. Substituendo formulam praeceden-



tem in (1.), sequitur, si ipsarum $x, x_1 \dots x_n$ functiones $f, f_1 \dots f_n$ nec non ipsae $x_{m+1}, x_{m+2} \dots x_n$ exprimantur per

$$x, x_1 \dots x_m, \varphi_m, \varphi_{m+1} \dots \varphi_n,$$

fieri,

$$5. \quad \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \dots \frac{\partial f_n}{\partial x_n} = \frac{\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \dots \frac{\partial f_m}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial f_{m+1}}{\partial \varphi_{m+1}} \cdot \frac{\partial f_{m+2}}{\partial \varphi_{m+2}} \dots \frac{\partial f_n}{\partial \varphi_n}}{\Sigma \pm \frac{\partial x_{m+1}}{\partial \varphi_{m+1}} \cdot \frac{\partial x_{m+2}}{\partial \varphi_{m+2}} \dots \frac{\partial x_n}{\partial \varphi_n}}.$$

Porro e (3.) sequitur, si exprimantur

$$f, f_1 \dots f_m, \quad x_{m+1}, x_{m+2} \dots x_n$$

per quantitates

$$x, x_1 \dots x_m, \quad f_{m+1}, f_{m+2} \dots f_n,$$

fieri

$$6. \quad \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial f_1} \dots \frac{\partial f_n}{\partial x_n} = \frac{\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \dots \frac{\partial f_m}{\partial x_m}}{\Sigma \pm \frac{\partial x_{m+1}}{\partial f_{m+1}} \cdot \frac{\partial x_{m+2}}{\partial f_{m+2}} \dots \frac{\partial x_n}{\partial f_n}}.$$

Formulae (5.) (6.) etiam e Prop. 10. §. pr. deducuntur, ipsis $y, y_1 \dots y_n$ substituendo $x, x_1 \dots x_n$, ipsis autem $x_{m+1}, x_{m+2} \dots x_n$ substituendo $f_{m+1}, f_{m+2} \dots f_n$.

13.

Ponamus, ipsarum $x, x_1 \dots x_n$ functiones $f, f_1 \dots f_n$ determinari $n+m+1$ aequationibus inter quantitates illas $x, x_1 \dots x_n, f, f_1 \dots f_n$ aliasque quantitates,

$$f_{n+1}, f_{n+2} \dots f_{n+m}$$

propositas,

$$F = 0, \quad F_1 = 0, \quad \dots \quad F_{n+m} = 0,$$

ac quaeratur rursus Determinans functionale,

$$\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \dots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}.$$

Ex aequationibus,

$$F_{n+1} = 0, \quad F_{n+2} = 0 \quad \dots \quad F_{n+m} = 0,$$

ipsarum $f_{n+1}, f_{n+2} \dots f_{n+m}$ petamus valores eosque in functionibus F, $F_1 \dots F_n$ substituamus, erunt $F = 0$, $F_1 = 0 \dots F_n = 0$ aequationes inter solas quantitates

$$x, x_1 \dots x_n, \quad f, f_1 \dots f_n.$$

Quarum aequationum ope determinatis ipsarum $x, x_1 \dots x_n$ functionibus $f, f_1 \dots f_n$, fit e (5.) §. 10.:

$$1. \quad \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n} = (-1)^{n+1} \frac{\Sigma \pm \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial F_n}{\partial x_n}}{\Sigma \pm \frac{\partial F}{\partial f} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial f_1} \cdots \frac{\partial F_n}{\partial f_n}}.$$

Fractionis ad dextram cum numeratorem tum denominatorem multiplicemus per

$$\Sigma \pm \frac{\partial F_{n+1}}{\partial f_{n+1}} \cdot \frac{\partial F_{n+2}}{\partial f_{n+2}} \cdots \frac{\partial F_{n+m}}{\partial f_{n+m}},$$

erit secundum (3.) §. pr.

$$\Sigma \pm \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial F_{n+1}}{\partial f_{n+1}} \cdot \frac{\partial F_{n+2}}{\partial f_{n+2}} \cdots \frac{\partial F_{n+m}}{\partial f_{n+m}} =$$
$$\Sigma \pm \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \cdot \Sigma \pm \frac{\partial F_{n+1}}{\partial f_{n+1}} \cdot \frac{\partial F_{n+2}}{\partial f_{n+2}} \cdots \frac{\partial F_{n+m}}{\partial f_{n+m}},$$

$$\Sigma \pm \frac{\partial F}{\partial f} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial f_1} \cdots \frac{\partial F_{n+m}}{\partial f_{n+m}} =$$
$$\Sigma \pm \frac{\partial F}{\partial f} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial f_1} \cdots \frac{\partial F_n}{\partial f_n} \cdot \Sigma \pm \frac{\partial F_{n+1}}{\partial f_{n+1}} \cdot \frac{\partial F_{n+2}}{\partial f_{n+2}} \cdots \frac{\partial F_{n+m}}{\partial f_{n+m}},$$

siquidem in laeva parte aequationum praecedentium ipsas $F, F_1 \ldots. F_{n+m}$ rursus pro omnium $f, f_1 \ldots. f_{n+m}, x, x_1 \ldots. x_n$ functionibus habemus quales propositae sunt. Substituendo formulas praecedentes in (1.), prodit expressio quaesita,

$$2. \quad \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n} =$$
$$(-)^{n+1} \frac{\Sigma \pm \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial F_{n+1}}{\partial f_{n+1}} \cdot \frac{\partial F_{n+2}}{\partial f_{n+2}} \cdots \frac{\partial F_{n+m}}{\partial f_{n+m}}}{\Sigma \pm \frac{\partial F}{\partial f} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial f_1} \cdots \frac{\partial F_{n+m}}{\partial f_{n+m}}}.$$

Quae docet formula quomodo inveniatur Determinans functionum quae quocunque modo implicito dantur.

Si determinatur unius variabilis x functio f per $m+1$ aequationes inter quantitates $x, f, f_1 \ldots. f_m$ propositas,

$$F = 0, \quad F_1 = 0, \quad \ldots. \quad F_m = 0,$$

fit

$$3. \quad \frac{df}{dx} = -\frac{\Sigma \pm \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial f_1} \cdot \frac{\partial F_2}{\partial f_2} \cdots \frac{\partial F_m}{\partial f_m}}{\Sigma \pm \frac{\partial F}{\partial f} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial f_1} \cdot \frac{\partial F_2}{\partial f_2} \cdots \frac{\partial F_m}{\partial f_m}}.$$

Quam formulam si cum generali (2.) comparas, et hic vides perfectam locum habere analogiam inter differentiale primum functionis unius variabilis atque Determinans systematis functionem plurium variabilium.

14.

Demonstrabo iam Propositionem, quae prae ceteris memorabilis atque iuncta formula (2.) §. pr. ipsis Determinantibus functionalibus inveniendis commoda est. *Ponamus enim inter quantitates x, x_1 .... x_n datas esse totidem aequationes,*

$$f = \alpha,\quad f_1 = \alpha_1,\quad \ldots\ldots\quad f_n = \alpha_n,$$

in quibus α, α_1 etc. sint Constantes: dico Determinans

$$\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \quad \ldots\ldots \quad \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$

non mutare valorem si functiones f, f_1 .... f_n varias subeant mutationes quales per aequationes propositas subire possunt, ita tamen ut functioni alicui f_i transmutandae non ipsa adhibeatur aequatio $f_i = \alpha_i$.

Sufficit Propositionem praecedentam pro casu demonstrare quo una tantum functio f mutationem subeat per aequationes inter ipsas x, x_1 .... x_n propositas,

$$f_1 = \alpha_1,\quad f_2 = \alpha_2,\quad \ldots\ldots\quad f_n = \alpha_n.$$

Propositio enim pro una functione demonstrata ubi successive singulis functionibus f, f_1 .... f_n applicatur, propositum demonstratum erit pro casu generali quo per aequationes propositas simul omnes functiones f, f_1 .... f_n mutantur.

Ponamus igitur per aequationes,

$$1.\quad f_1 = \alpha_1,\quad f_2 = \alpha_2,\quad \ldots\ldots\quad f_n = \alpha_n,$$

fieri

$$2.\quad f = \Phi;$$

probandum est per easdem aequationes fieri,

$$3.\quad \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \ldots\ldots \frac{\partial f_n}{\partial x_n} = \Sigma \pm \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \ldots\ldots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}.$$

Functio Φ praeter variabiles x, x_1 .... x_n implicabit Constantes α_1, α_2 .... α_n ita ut pro ipsis α_1, α_2 .... α_n restituendo functiones f_1, f_2 .... f_n ipsa Φ identice redeat in functionem propositam f. Hinc per aequationes (1.) locum habebunt aequationes,

$$4.\quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial \alpha_1} \cdot \dfrac{\partial f_1}{\partial x} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial \alpha_2} \cdot \dfrac{\partial f_2}{\partial x} \ldots\ldots + \dfrac{\partial \varphi}{\partial \alpha_n} \cdot \dfrac{\partial f_n}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_1} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial \alpha_1} \cdot \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial \alpha_2} \cdot \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} \ldots\ldots + \dfrac{\partial \varphi}{\partial \alpha_n} \cdot \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_n} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial \alpha_1} \cdot \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial \alpha_2} \cdot \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \ldots\ldots + \dfrac{\partial \varphi}{\partial \alpha_n} \cdot \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n}. \end{cases}$$

Quibus substitutis in Determinante

$$\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \; \dots \; \frac{\partial f_n}{\partial x_n},$$

sequentem eruimus expressionem,

$$\Sigma \pm \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \; \dots \; \frac{\partial f_n}{\partial x_n} + \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_1} \Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \dots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$
$$+ \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_2} \Sigma \pm \frac{\partial f_2}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \dots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$
$$\dots + \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_n} \Sigma \pm \frac{\partial f_n}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \dots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}.$$

At Determinantia singula in singulos factores,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_1}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_2}, \quad \dots \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_n}$$

ducta *identice* evanescunt, unde fit

$$\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \; \dots \; \frac{\partial f_n}{\partial x_n} = \Sigma \pm \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \; \dots \; \frac{\partial f_n}{\partial x_n}.$$

Nimirum si in differentialibus,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \quad \dots \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}$$

pro ipsis $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$ restituis functiones $f_1, f_2 \dots f_n$, Determinans ad dextram identice in Determinans ad laevam redit.

Si per aequationes,

$$\Phi = \alpha, \; f_2 = \alpha_2, \; f_3 = \alpha_3. \; \dots \; f_n = \alpha_n$$

fit

$$f_1 = \Phi_1,$$

eodem modo probas fieri,

$$\Sigma \pm \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \; \dots \; \frac{\partial f_n}{\partial x_n} = \Sigma \pm \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \; \dots \; \frac{\partial f_n}{\partial x_n},$$

unde etiam

$$\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \; \dots \; \frac{\partial f_n}{\partial x_n} = \Sigma \pm \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \; \dots \; \frac{\partial f_n}{\partial x_n}.$$

Sic pergendo sequitur generaliter, si per aequationes,

$$f = \alpha, \; f_1 = \alpha_1, \; \dots \; f_{i-1} = \alpha_{i-1}, \; f_{i+1} = \alpha_{i+1}, \; \dots \; f_n = \alpha_n,$$

fiat

$$f_i = \Phi_i;$$

per aequationes,

$$f = \alpha, \; f_1 = \alpha_1, \; \dots \; f_n = \alpha_n,$$

fore

$$5. \quad \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \; \dots \; \frac{\partial f_n}{\partial x_n} = \Sigma \pm \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \; \dots \; \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}.$$

Nimirum restituendo in omnibus

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}$$

pro Constantibus $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \ldots\ldots \alpha_n$ functiones $f, f_1, f_2 \ldots\ldots f_n$, Determinans functionale alterum in alterum identice redit.

13.

Sit numerus variabilium quas functiones $f, f_1 \ldots\ldots f_n$ involvunt maior numero functionum: functiones illae si a se non independentes sunt, quarumque $n+1$ variabilium illarum respectu non a se independentes erunt. Scilicet aequatio quae inter eas locum habet omnino nullam praeterea variabilem involvens, sane etiam quibusque $n+1$ illarum variabilium vacabit. Qua de re e Propositione §. 6. sqq. probata sequitur, si variabilium $x, x_1 \ldots\ldots x_{n+m}$ functiones $f, f_1 \ldots\ldots f_n$ non a se invicem sint independentes, omnia earum evanescere Determinantia formata quarumcunque $n+1$ e $n+m+1$ variabilibus $x, x_1 \ldots\ldots x_{n+m}$ respectu. Et vice versa locum habet Propositio, his omnibus evanescentibus Determinantibus, functiones propositas a se invicem non independentes esse sive inter eas aequationem locum habere ab omnibus $n+m+1$ variabilibus $x, x_1 \ldots\ldots x_{n+m}$ vacuam. Quae ut demonstretur Propositio probemus rursus si de n functionibus valeat eandem de $n+1$ functionibus iustam esse; quod sufficit ad Propositionem generaliter demonstrandam quia pro *una* functione constat. Nam pro una quidem functione haec evadit variabilium $x, x_1 \ldots\ldots x_{n+m}$ functionem f esse Constantem si eius differentialia partialia,

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \ldots\ldots \quad \frac{\partial f}{\partial x_{n+m}},$$

cuncta evanescant.

Ponamus functiones $f, f_1 \ldots\ldots f_{n-1}$ a se invicem independentes esse; nam si functiones $f, f_1 \ldots\ldots f_{n-1}$ non a se invicem independentes forent iam locum haberet quod demonstrandum proponitur. Cum propositum pro n functionibus iustum supponatur non evanescere possunt singula functionum $f, f_1 \ldots\ldots f_{n-1}$ Determinantia quae formari possunt n variabilium e numero ipsarum $x, x_1 \ldots\ldots x_{n+m}$ respectu; alioquin enim secundum Propositionem illam functiones $f, f_1 \ldots\ldots f_{n-1}$ non a se independentes forent. Sit

$$B = \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \ldots\ldots \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}}.$$

Determinans non evanescens; eligamus ex omnibus functionum $f, f_1 \dots f_n$ Determinantibus ea in quibus ipsae $x, x_1 \dots x_{n-1}$ inter $n+1$ quantitates sunt quarum respectu Determinans functionale formatur, hoc est Determinantia,

$$\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \dots \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}} \cdot \frac{\partial f_n}{\partial x_n}, \quad \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x} \dots \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}} \cdot \frac{\partial f_n}{\partial x_{n+1}},$$
$$\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \dots \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}} \cdot \frac{\partial f_n}{\partial x_{n+2}}, \dots \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \dots \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}} \cdot \frac{\partial f_n}{\partial x_{n+m}}.$$

Ipsarum $x, x_1 \dots x_{n-1}$ loco ipsas $f, f_1 \dots f_{n-1}$ ut variabiles independentes in functione f_n introducamus, secundum ea quae §. 7. demonstravi, abeunt determinantia antecedentia in expressiones,

$$B\left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right), \quad B\left(\frac{\partial f_n}{\partial x_{n+1}}\right), \quad B\left(\frac{\partial f_n}{\partial x_{n+2}}\right), \quad \dots \quad B\left(\frac{\partial f_n}{\partial x_{n+m}}\right),$$

ubi uncis innuo functionem differentiandam per ipsas

$$f, f_1 \dots f_{n-1}, \quad x_n, x_{n+1} \dots x_{n+m}$$

expressam esse. His autem expressionibus evanescentibus, cum B non evanescat, fieri debet,

$$\frac{\partial f_n}{\partial x_n} = 0, \quad \frac{\partial f_n}{\partial x_{n+1}} = 0, \quad \dots \quad \frac{\partial f_n}{\partial x_{n+m}} = 0,$$

unde f_n solas $f, f_1 \dots f_{n-1}$ implicabit ideoque functiones $f, f_1 \dots f_n$ non a se independentes erunt, q. d. e.

Demonstravimus antecedentibus, evanescentibus $m+1$ Determinantibus

$$\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \dots \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}} \cdot \frac{\partial f_n}{\partial x_n}, \quad \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \dots \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}} \cdot \frac{\partial f_n}{\partial x_{n+1}}, \dots$$
$$\dots \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \dots \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}} \cdot \frac{\partial f_n}{\partial x_{n+m}},$$

neque simul evanescente Determinante B sive

$$\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \dots \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}},$$

fore f_n ipsarum $f, f_1 \dots f_{n-1}$ functionem. At si f_n ipsarum $f, f_1 \dots f_n$ functio est, initio huius §[i] vidimus evanescere functionum $f, f_1 \dots f_n$ Determinantia formata quarumcunque $n+1$ e quantitatibus $x, x_1 \dots x_{n+m}$ respectu. Quorum Determinantium numerus est,

$$\frac{(n+m+1)(n+m) \dots (m+1)}{1.2.3 \dots (n+1)} = \frac{(n+m+1)(n+m) \dots (n+1)}{1.2.3 \dots (m+1)}.$$

Quae igitur omnia evanescere debent simulac illa $m+1$ Determinantia evanescunt, siquidem ipsum non evanescit Determinans B.

16.

Quo melius perspiciatur nexus qui inter Determinantia illa

$$\frac{1.2.3\ldots\ldots(n+m+1)}{1.2\ldots\ldots m.1.2\ldots\ldots(n+1)}$$

intercedit quae evanescere debent omnia simulatque certa $m+1$ ex eorum numero evanescunt, formulas sequentes adiicio.

Fingamus novas ipsarum $x, x_1 \ldots\ldots x_{n+m}$ functiones arbitrarias,

$$f_{n+1}, \; f_{n+2}, \; \ldots\ldots \; f_{n+m},$$

ac ponamus,

$$1. \quad \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \ldots\ldots \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}} \cdot \frac{\partial f_{n+i}}{\partial x_{n+k}} = b_k^{(i)}.$$

Qua in formula utrique indici i et k competunt valores,

$$0, 1, 2 \ldots\ldots m.$$

Variabilium $x, x_1 \ldots\ldots x_{n-1}$ loco introducendo $f, f_1 \ldots\ldots f_{n-1}$, vidimus §. pr. fieri,

$$2. \quad b_k^{(i)} = B\left(\frac{\partial f_{n+i}}{\partial x_{n+k}}\right),$$

siquidem rursus

$$B = \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \ldots\ldots \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}}.$$

Sequitur e (2.):

$$\Sigma \pm b b_1' b_2'' \ldots\ldots b_m^{(m)} = B^{m+1} \Sigma \pm \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right) \cdot \left(\frac{\partial f_{n+1}}{\partial x_{n+1}}\right) \ldots\ldots \left(\frac{\partial f_{n+m}}{\partial x_{n+m}}\right).$$

At e formula (3.) §. 11. mutatis mutandis sequitur,

$$\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \ldots\ldots \frac{\partial f_{n+m}}{\partial x_{n+m}} =$$

$$\Sigma \pm \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right) \cdot \left(\frac{\partial f_{n+1}}{\partial x_{n+1}}\right) \ldots\ldots \left(\frac{\partial f_{n+m}}{\partial x_{n+m}}\right) \cdot \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \ldots\ldots \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}},$$

unde fit,

$$3. \quad \Sigma \pm b b_1' \ldots\ldots b_m^{(m)} = B^m \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \ldots\ldots \frac{\partial f_{n+m}}{\partial x_{n+m}}.$$

Cuius formulae in quaestionibus de Determinantibus frequens usus est.

Ponamus

$$-\beta_k^{(i)} = \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \ldots\ldots \frac{\partial f_{i-1}}{\partial x_{i-1}} \cdot \frac{\partial f_i}{\partial x_{n+k}} \cdot \frac{\partial f_{i+1}}{\partial x_{i+1}} \ldots\ldots \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}},$$

seu prodeat $-\beta_k^{(i)}$ e Determinante

$$\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \ldots\ldots \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}}$$

differentialibus ipsius x_i respectu sumtis differentialia ipsius x_{n+k} respectu

sumta substituendo; erit $\beta_i^{(i)}$ Aggregatum terminorum qui in expressione $b_i^{(i)}$ per

$$\frac{\partial f_{n+i}}{\partial x_i}$$

multiplicantur. Unde sequitur Aggregatum quod in Determinante,

$$\Sigma \pm b b_1' \ldots\ldots b_m^{(m)}$$

multiplicatur per

$$\frac{\partial f_n}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_{n+1}}{\partial x_1} \ldots\ldots \frac{\partial f_{n+m}}{\partial x_m},$$

esse

$$\Sigma \pm \beta \beta_1' \ldots\ldots \beta_m^{(m)}.$$

At Aggregatum terminorum qui in Determinante,

$$\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \ldots\ldots \frac{\partial f_{n+m}}{\partial x_{n+m}} =$$

$$(-1)^{n(m+1)} \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x_{m+1}} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_{m+2}} \ldots\ldots \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n+m}} \cdot \frac{\partial f_n}{\partial x} \ldots\ldots \frac{\partial f_{n+m}}{\partial x_m} \text{ *}),$$

per eundem factorem,

$$\frac{\partial f_n}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_{n+1}}{\partial x_1} \ldots\ldots \frac{\partial f_{n+m}}{\partial x_m},$$

multiplicantur, est

$$(-1)^{n(m+1)} \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x_{m+1}} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_{m+2}} \ldots\ldots \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n+m}}.$$

Unde terminos per factorem illum multiplicatos inter se conferendo, nanciscimur e (3.):

4. $\Sigma \pm \beta \beta_1' \ldots\ldots \beta_m^{(m)} = (-1)^{n(m+1)} B^m \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x_{m+1}} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_{m+2}} \ldots\ldots \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n+m}}.$

Habemus igitur hanc Propositionem:

E Determinante,

$$B = \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \ldots\ldots \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}},$$

deducantur $(m+1)^2$ alia Determinantia, uni cuilibet differentialium ipsarum $x, x_1 \ldots\ldots x_m$ respectu sumtorum substituendo successive differentialia ipsarum

$$x_n,\ x_{n+1},\ \ldots\ldots x_{n+m}$$

respectu sumta; illarum $(m+1)^2$ quantitatum Determinans aequatur expressioni,

$$(-)^{(m+1)(n+1)} B^m \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x_{m+1}} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_{m+2}} \ldots\ldots \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n+m}}.$$

---

*) Signum $(-1)^{n(m+1)}$ determinatur consideratione, commutando $0, 1, 2 \ldots\ldots p$ in $i, i+1, \ldots\ldots p, 0, 1 \ldots\ldots i-1$, Permutationem esse positivam si p par sit; porro si p impar, esse Permutationem $i \;\; i+1 \ldots\ldots p, 0, 1 \ldots\ldots i-1$ positivam aut negativam prout i par aut impar sit. Unde generaliter haec posterior Permutatio positiva aut negativa est, prout ip est par aut impar. V. Com. *de Determ.*

Aequiparemus in formula (3.) terminos in factorem,

$$\frac{\partial f_{n+1}}{\partial x}\cdot\frac{\partial f_{n+2}}{\partial x_1}\;\ldots\;\frac{\partial f_{n+m}}{\partial x_{m-1}}$$

ductos. In expressione

$$b_k^{(i)} = \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\;\ldots\;\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\cdot\frac{\partial f_{n+i}}{\partial x_{n+k}}$$

fit Aggregatum terminorum per

$$\frac{\partial f_{n+i}}{\partial x_{i-1}}$$

multiplicatorum,

$$-\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\;\ldots\;\frac{\partial f_{i-2}}{\partial x_{i-2}}\cdot\frac{\partial f_{i-1}}{\partial x_{n+k}}\cdot\frac{\partial f_i}{\partial x_i}\;\ldots\;\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}} = \beta_k^{(i-1)}.$$

Unde in laeva parte formulae (3.) fit Aggregatum terminorum per factorem propositum multiplicatorum,

$$\Sigma \pm b\beta_1\beta_2'\;\ldots\;\beta_m^{(m-1)}.$$

In Determinante,

$$\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\;\ldots\;\frac{\partial f_{n+m}}{\partial x_{n+m}} =$$

$$(-1)^{m(n+1)}\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x_m}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x_{m+1}}\;\ldots\;\frac{\partial f_n}{\partial f_{n+m}}\cdot\frac{\partial f_{n+1}}{\partial x}\cdot\frac{\partial f_{n+2}}{\partial x_1}\;\ldots\;\frac{\partial f_{n+m}}{\partial x_{m-1}},$$

fit Aggregatum terminorum per eundem factorem multiplicatorum,

$$(-1)^{m(n+1)}\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x_m}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x_{m+1}}\;\ldots\;\frac{\partial f_n}{\partial x_{n+m}}.$$

Unde e (3.), terminos per

$$\frac{\partial f_{n+1}}{\partial x}\cdot\frac{\partial f_{n+2}}{\partial x_1}\;\ldots\;\frac{\partial f_{n+m}}{\partial x_{m-1}}$$

multiplicatos inter se comparando prodit:

5. $$\Sigma \pm b\beta_1\beta_2'\;\ldots\;\beta_m^{(m-1)} = (-1)^{m(n+1)}B^m\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x_m}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x_{m+1}}\;\ldots\;\frac{\partial f_n}{\partial x_{n+m}}.$$

Eodem modo obtinetur generaliter,

6. $$\Sigma \pm b b_1'\;\ldots\;b_{i-1}^{(i-1)}\beta_i\beta_{i+2}'\;\ldots\;\beta_m^{(m-i)} =$$

$$\pm B^{(m)}\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x_{m-i+1}}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x_{m-i+2}}\;\ldots\;\frac{\partial f_{n+i-1}}{\partial x_{n+m}},$$

qua in formula signo $\pm$ substituendum est aut $(-1)^{n(m+1)}$ aut $(-1)^{m(n+1)}$, prout i par aut impar est.

Determinantia $m+1$, quae §. pr. evanescere supposui, secundum notationem hic adhibitam sunt,

$$b,\; b_1,\; b_2,\; \ldots\; b_m.$$

Singuli termini Determinantis,

$$\Sigma \pm b\beta_1\beta_2'\;\ldots\;\beta_m^{(m-1)},$$

per illarum quantitatum unam multiplicantur, unde statuamus:

$$\Sigma \pm b\beta_1\beta_2' \dots \beta_m^{(m-1)} = \lambda b + \lambda_1 b_1 \dots + \lambda_m b_m.$$

Quantitates $\beta_k^{(i)}$ ideoque etiam factores λ differentialibus functionis f_n omnino non afficiuntur; porro ex omnibus b, $b_1 \dots b_m$ unicum b_k continet differentiale

$$\frac{\partial f_n}{\partial x_{n+k}}$$

idque per B multiplicatum. Unde in Determinante antecedente Aggregatum terminorum per $\frac{\partial f_n}{\partial x_{n+k}}$ multiplicatorum fit $\lambda_k B$.

Hinc ubi ponimus,

$$\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x_m}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x_{m+1}} \dots \frac{\partial f_n}{\partial x_{n+m}} = \mu\frac{\partial f_n}{\partial x_n} + \mu_1\frac{\partial f_n}{\partial x_{n+1}} \dots + \mu_m\frac{\partial f_n}{\partial x_{n+m}},$$

designante μ_k Aggregatum terminorum in Determinante praecedente per $\frac{\partial f_n}{\partial x_{n+k}}$ multiplicatorum, sequitur e (5.),

$$\lambda_k B = (-1)^{m(n+1)} B^m \mu_k,$$

ideoque

$$\Sigma \pm b\beta_1\beta_2' \dots \beta_m^{(m-1)} = (-1)^{m(n+1)} B^{m-1}\{\mu b + \mu_1 b_1 \dots + \mu_m b_m\}.$$

Unde e (5.) fit:

7. $$\mu b + \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 \dots + \mu_m b_m = B\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x_m}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x_{m+1}} \dots \frac{\partial f_n}{\partial x_{n+m}}.$$

Variabiles quarum respectu formatur Determinans,

$$\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x_m}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x_{m+1}} \dots \frac{\partial f_n}{\partial x_{n+m}},$$

sunt $n-m$ ex ipsis x, $x_1 \dots x_{n-1}$, pro quibus sumsi ipsas

$$x_m,\ x_{m+1},\ \dots\ x_{n-1},$$

ac praeterea $m+1$ novae variabiles

$$x_n,\ x_{n+1},\ \dots\ x_{n+m}.$$

Si $m=n$, variabiles quarum respectu Determinans ad dextram formatur omnes sunt novae

$$x_n,\ x_{n+1},\ \dots\ x_{2n}.$$

Unde formula (7.) docet quomodo e functionum $f, f_1 \dots f_n$ Determinantibus b_k per idoneos factores multiplicatis et additis proveniat earundem functionum Determinans *quarumcunque* variabilium respectu formatum atque per ipsum B multiplicatum. Hinc bene patet, quod §. pr. demonstravi, quomodo omnibus b_k evanescentibus neque ipso B evanescente, simul cuncta illa Determinantia evanescant.

In dextra parte aequationis (7.) omnino non insunt differentialia,

$$\frac{\partial f_n}{\partial x},\quad \frac{\partial f_n}{\partial x_1},\ \dots\ \frac{\partial f_n}{\partial x_{m-1}},$$

quae etiam quantitates μ_k non afficiunt, sed omnes quantitates b, b_1 .... b_m. In ipso Determinante,

$$b_k = \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\dots\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\cdot\frac{\partial f_n}{\partial x_{n+k}},$$

est Aggregatum terminorum per $\frac{\partial f_n}{\partial x}$ multiplicatorum,

$$-\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x_{n+k}}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\ \dots\ \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}}.$$

Unde e (7.) haec fluit Propositio:

Sit μ_k functionum f, $f_1 \dots f_{n-1}$ Determinans quod in Determinante,

$$\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x_m}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x_{m+1}}\ \dots\ \frac{\partial f_n}{\partial x_{m+n}}$$

per $\frac{\partial f_n}{\partial x_{n+k}}$ multiplicatur, ubi $m \leqq n$, erit,

$$\begin{aligned}&\mu\,\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\ \dots\ \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\\ +\,&\mu_1\,\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\ \dots\ \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\\ &\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ +\,&\mu_m\,\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x_{n+m}}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\ \dots\ \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}} = 0.\end{aligned}$$

Si $m = n$, in hac aequatione identica bina functionum f, $f_1 \dots f_{n-1}$ Determinantia in se ducta ita inter se comparata sunt ut alterum formetur ipsarum x_n, $x_{n+1} \dots x_{n+m}$ respectu una ommissa, alterum formetur huius ommissae atque aliarum variabilium x_1, x_2 .... x_{n-1} respectu.

17.

In formulis (1.) et (3.) §. pr. ponamus $n = 1$, sequitur ponendo

$$1.\quad b_k^{(i)} = \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f_{i+1}}{\partial x_{k+1}},\qquad B = \frac{\partial f}{\partial x},$$

fieri

$$2.\quad \Sigma \pm b\,b'_1 \dots b_m^{(m)} = B^m\,\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\ \dots\ \frac{\partial f_{m+1}}{\partial x_{m+1}}.$$

Ponamus esse x ipsarum x_1, $x_2 \dots x_n$ functionem determinatam aequatione,

$$f = 0,$$

erit

$$3.\quad \frac{\partial f}{\partial x_{k+1}} + \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial x_{k+1}} = 0,$$

ideoque

$$b_k^{(i)} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f_{i+1}}{\partial x_{k+1}} - \frac{\partial f}{\partial x_{k+1}}\cdot\frac{\partial f_{i+1}}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}\left\{\frac{\partial f_{i+1}}{\partial x_{k+1}} + \frac{\partial f_{i+1}}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial x_{k+1}}\right\}.$$

Si uncis innuimus, in functione differentianda ipsius x substitutum esse valorem per $x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$ exhibitum, erit

$$\left(\frac{\partial f_{i+1}}{\partial x_{k+1}}\right) = \frac{\partial f_{i+1}}{\partial x_{k+1}} + \frac{\partial f_{i+1}}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial x_{k+1}},$$

ideoque

$$4.\quad b_k^{(i)} = \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial f_{i+1}}{\partial x_{k+1}}\right).$$

Hinc dividendo per B^m sequitur e (2.), ubi simul $m+1=n$ ponitur,

$$5.\quad \frac{\partial f}{\partial x}\Sigma\pm\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right)\ldots\ldots\left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right) = \Sigma\pm\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\ldots\ldots\frac{\partial f_n}{\partial x_n}.$$

Statuamus,

$$\Sigma\pm\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\ldots\ldots\frac{\partial f_n}{\partial x_n} = A\cdot\frac{\partial f}{\partial x} + A_1\cdot\frac{\partial f}{\partial x_1} + A_2\cdot\frac{\partial f}{\partial x_2}\ldots\ldots + A_n\frac{\partial f}{\partial x_n},$$

erit secundum (3.)

$$\Sigma\pm\frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\ldots\ldots\frac{\partial f_n}{\partial x_n} = \frac{\partial f}{\partial x}\left\{A - A_1\cdot\frac{\partial x}{\partial x_1} - A_2\cdot\frac{\partial x}{\partial x_2}\ldots\ldots - A_n\cdot\frac{\partial x}{\partial x_n}\right\},$$

unde eruitur formula memorabilis,

$$6.\quad \Sigma\pm\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)\cdot\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right)\ldots\ldots\left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right) = A - A_1\cdot\frac{\partial x}{\partial x_1} - A_2\cdot\frac{\partial x}{\partial x_2}\ldots\ldots - A_n\cdot\frac{\partial x}{\partial x_n},$$

ubi

$$A = \Sigma\pm\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\ldots\ldots\frac{\partial f_n}{\partial x_n},$$

ipsaque A_k e A prodeunt differentialibus, ipsius x_k respectu sumta, differentialia ipsius x respectu sumta substituendo. Formula (6.) inter egregia inventa illustrissimi *Lagrange* censetur.

Ut e formula (2.) deduceretur (6.), observo, non necessarium fuisse ut sicuti feci poneretur aequatio $f=0$. Nam cum in aequatione identica (2.) ipsa f quaecunque sit functio, pro ipsis quoque,

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x_{k+1}}}{\frac{\partial f}{\partial x}},$$

in formula (2.) quantitates arbitrarias ponere licet ideoque etiam quantitates $\frac{\partial x}{\partial x_{k+1}}$

Ponamus

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_k} = a_k^{(i)},$$

sequitur e (1.) et (2.), ponendo,

$$7. \quad b_k^{(i)} = a a_{k+1}^{(i+1)} - a^{(i+1)} a_{k+1}$$

fieri

$$8. \quad \Sigma \pm b b_1' \dots b_m^{(m)} = a^m \Sigma \pm a a_1' a_2'' \dots a_m^{(m)}.$$

Qua in formula cum ipsa $a_k^{(i)}$ quantitates quascunque designare possint, ponamus

$$a^{(i+1)} = u_{i+1}, \quad a_{k+1}^{(i+1)} = \frac{\partial u_{i+1}}{\partial x_{k+1}},$$

designantibus u, $u_1 \dots u_n$ quascunque variabilium

$$x_1, \quad x_2 \quad \dots \quad x_n$$

functiones: erit

$$b_k^{(i)} = u . \frac{\partial u_{i+1}}{\partial x_{k+1}} - u_{i+1} . \frac{\partial u}{\partial x_{k+1}} = u u . \frac{\partial \frac{u_{i+1}}{u}}{\partial x_{k+1}}.$$

Hinc ponendo rursus $m+1 = n$, suppeditat formula (8.) Propositionem, designantibus u, $u_1 \dots u_n$ ipsarum x_1, x_2 x_n functiones, ponendo

$$\frac{u_1}{u} = v_1, \quad \frac{u_2}{u} = v_2, \quad \dots \quad \frac{u_n}{u} = v_n,$$

fieri

$$9. \quad \Sigma \pm \frac{\partial v_1}{\partial x_1} . \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \dots \frac{\partial v_n}{\partial x_n} = \frac{1}{u^{n+1}} \Sigma \pm u . \frac{\partial u_1}{\partial x_1} . \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \dots \frac{\partial u_n}{\partial x_n}.$$

Ipsis $u, u_1 \dots u_n$ substituendo tu, $tu_1 \dots tu_n$, designante t et ipsa functionem quamcunque, non mutabuntur v_1, $v_2 \dots v_n$. Unde docet Propositio praecedens, ponendo tu, tu_1 etc. ipsarum u, u_1 etc. loco, Determinans

$$\Sigma \pm u . \frac{\partial u_1}{\partial x_1} . \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \dots \frac{\partial u_n}{\partial x_n}$$

aliam non subire mutationem nisi quod per factorem t^{n+1} multiplicetur, prorsus ac si t Constans esset. Quod iam olim alia occassione adnotavi.

18.

Ratione simplicissima exhibetur Determinans functionale, quia ad unicum terminum revocatur, si functionibus in certum ordinem dispositis, quaeque in subsequentibus unius variabilis independentis loco introducatur. Quod convenit cum eliminatione successiva, qua plurium aequationum systema ita praeparatur, ut successive e singulis aequationibus singularum incognitarum

valores petere liceat. Sit ex. gr. inter incognitas $x, x_1 \ldots . x_n$ datum aequationum systema,

$$f = a, \quad f_1 = a_1, \quad \ldots . \quad f_n = a_n;$$

e prima aequatione ipsius x valor per reliquas incognitas x_1, x_2 etc. exhibeatur atque in reliquis aequationibus substituatur, deinde e secunda aequatione, quae iam inter solas $x_1, x_2 \ldots . x_n$ erit, petatur ipsius x_1 valor per x_2, x_3 etc. exhibitus atque in reliquis aequationibus substituatur et ita porro. Ea ratione aequationum praecedentium systema ita praeparatur ut f_n solam x_n; f_{n-1} solas x_n, x_{n-1}; f_{n-2} solas x_n, x_{n-1}, x_{n-2} etc implicat. Unde ultima aequatione ipsa x_n determinatur; eius valore in paenultima aequatione substituto, ea solam x_{n-1} implicabit ideoque ipsius x_{n-1} valorem suppeditat, et ita porro. Aequationibus dicto modo praeparatis, functio f_i praeter ipsas,

$$x_i, \quad x_{i+1} \quad \ldots . \quad x_n,$$

adhuc implicabit quantitates

$$a, \quad a_1 \quad \ldots . \quad a_{i-1}.$$

Pro quibus quantitatibus restituendo ipsas $f, f_1 \ldots . f_{i-1}$, fit f_i ipsarum

$$f, \quad f_1, \quad \ldots . \quad f_{i-1}, \qquad x_i, \quad x_{i+1}, \quad \ldots . \quad x_n$$

functio; quod indicabo ipsius f_i loco scribendo,

$$f_i(f, \quad f_1, \quad \ldots . \quad f_{i-1}, \qquad x_i, \quad x_{i+1}, \quad \ldots . \quad x_n).$$

Differentialia partialia autem ipsius f_i per illas quantitates exhibitae uncis includam ut distinguantur a differentialibus eiusdem functionis per quantitates $x, x_1 \ldots . x_n$ exhibita.

His positis, dabuntur $f, f_1 \ldots . f_n$ ut ipsarum $x, x_1 \ldots . x_n$ functiones per hoc aequationem systema:

$$\begin{aligned}
0 &= F \;\, = f - f(x, x_1 \ldots . x_n) \\
0 &= F_1 = f_1 - f_1(f, x_1, x_2 \ldots . x_n) \\
0 &= F_2 = f_2 - f_2(f, f_1, x_2, x_3 \ldots . x_n) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
0 &= F_n = f_n - f_n(f, f_1 \ldots . f_{n-1}, x_n),
\end{aligned}$$

quae sunt aequationes $n+1$ inter variabiles,

$$x, x_1 \ldots . x_n, \quad f, f_1 \ldots . f_n \text{*)}.$$

*) Idem signum f_i, pro variabili et functione sumtum, ambiguum non erit quia functionali signo adieci quantitates quas functio involvit.

Secundum (5.) §. 10. fit:

$$1.\quad \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\;\ldots\;\frac{\partial f_n}{\partial x_n} = (-1)^{n+1}\,\frac{\Sigma\pm\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial F_1}{\partial x_1}\;\ldots\;\frac{\partial F_n}{\partial x_n}}{\Sigma\pm\frac{\partial F}{\partial f}\cdot\frac{\partial F_1}{\partial f_1}\;\ldots\;\frac{\partial F_n}{\partial f_n}}.$$

E functionibus $F, F_1 \ldots F_n$ unica F_n ipsam f_n involvit, unde omnibus

$$\frac{\partial F}{\partial f_n},\;\frac{\partial F_1}{\partial f_n}\;\ldots\;\frac{\partial F_{n-1}}{\partial f_n}$$

evanescentibus, fit

$$\Sigma \pm \frac{\partial F}{\partial f}\cdot\frac{\partial F_1}{\partial f_1}\;\ldots\;\frac{\partial F_n}{\partial f_n} = \left(\Sigma\pm\frac{\partial F}{\partial f}\cdot\frac{\partial F_1}{\partial f_1}\;\ldots\;\frac{\partial F_{n-1}}{\partial f_{n-1}}\right)\cdot\frac{\partial F_n}{\partial f_n}.$$

Ex omnibus $F, F_1 \ldots F_{n-1}$ unica F_{n-1} ipsam f_{n-1} implicat unde fit

$$\Sigma \pm \frac{\partial F}{\partial f}\cdot\frac{\partial F_1}{\partial f_1}\;\ldots\;\frac{\partial F_{n-1}}{\partial f_{n-1}} = \left(\Sigma\pm\frac{\partial F}{\partial f}\cdot\frac{\partial F_1}{\partial f_1}\;\ldots\;\frac{\partial F_{n-2}}{\partial f_{n-2}}\right)\cdot\frac{\partial F_{n-1}}{\partial f_{n-1}},$$

ideoque

$$\Sigma \pm \frac{\partial F}{\partial f}\cdot\frac{\partial F_1}{\partial f_1}\ldots\frac{\partial F_n}{\partial f_n} = \left(\Sigma\pm\frac{\partial F}{\partial f}\cdot\frac{\partial F_1}{\partial f_1}\ldots\frac{\partial F_{n-2}}{\partial f_{n-2}}\right)\cdot\frac{\partial F_{n-1}}{\partial f_{n-1}}\cdot\frac{\partial F_n}{\partial f_n}.$$

Sic pergendo tandem pervenitur ad formulam,

$$\Sigma \pm \frac{\partial F}{\partial f}\cdot\frac{\partial F_1}{\partial f_1}\;\ldots\;\frac{\partial F_n}{\partial f_n} = \frac{\partial F}{\partial f}\cdot\frac{\partial F_1}{\partial f_1}\;\ldots\;\frac{\partial F_n}{\partial f_n}.$$

Et cum sit,

$$\frac{\partial F}{\partial f} = \frac{\partial F_1}{\partial f_1}\ldots = \frac{\partial F_n}{\partial f_n} = 1,$$

prodit

$$2.\quad \Sigma \pm \frac{\partial F}{\partial f}\cdot\frac{\partial F_1}{\partial f_1}\;\ldots\;\frac{\partial F_n}{\partial f_n} = 1.$$

Porro cum ex omnibus $F, F_1 \ldots F_n$ unica F ipsam x; ex omnibus F_1, $F_2 \ldots F_n$ unica F_1 ipsam x_1 etc. involvat, simili ratione obtinetur,

$$\Sigma \pm \frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial F_1}{\partial x_1}\;\ldots\;\frac{\partial F_n}{\partial x_n} = \frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial F_1}{\partial x_1}\;\ldots\;\frac{\partial F_n}{\partial x_n}.$$

Fit autem

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_i} = -\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_i}\right),$$

unde

$$3.\quad \Sigma \pm \frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial F_1}{\partial x_1}\;\ldots\;\frac{\partial F_n}{\partial x_n} = (-1)^{n+1}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\cdot\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)\;\ldots\;\left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right).$$

Formulis (2.) et (3.) substitutis in (1.) prodit formula memorabilis,

$$4.\quad \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\;\ldots\;\frac{\partial f_n}{\partial x_n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\cdot\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)\;\ldots\;\left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right).$$

Cuius aequationis in laeva parte functiones f_i per $x, x_1 \ldots x_n$ exhibitae finguntur, in dextra parte functio f_i per $f, f_1 \ldots f_{i-1}, x_i, x_{i+1} \ldots x_n$ expressa supponitur.

19.

Theoremate §. pr. demonstrato nituntur formulae generales quae pro transformatione integralium multiplicium circumferuntur. Proponatur integrale multiplex,

$$\int U \partial f \partial f_1 \dots \partial f_n,$$

ubi U ipsarum $f, f_1 \dots f_n$ data functio est: integratio ita modo maxime generali instituitur ut successive unius variabilis respectu integrando, reliquae variabiles pro Constantibus habeantur ita ut limites quoque integrationis harum variabilium functiones sint. Veluti primum ipsius f_n respectu integrando limites ipsarum $f, f_1 \dots f_{n-1}$ functiones erunt; integrale inventum iterum ipsius f_{n-1} respectu integrabitur eruntque limites ipsarum $f, f_1 \dots f_{n-2}$ functiones et ita porro usque dum integrationes omnes transactae sunt. De illis integralibus multiplicibus valet theorema quod in hac Theoria pro Principio haberi debet, siquidem functio U inter integrationum limites nunquam in infinitum abeat, integrationum ordinem quocunque modo placeat mutari posse ita ut perinde sit cuius variabilis respectu prima, cuius respectu secunda integratio fiat et ita porro, dummodo novarum integrationum limites idonee determinentur. Quod Principium per se clarum est si integralis multiplicis valor ut limes summationis finitae definitur, intervallis continuo decrescentibus. Eius Principii ope facile absolvitur quaestio, quaenam expressio sub signo integrationis multiplicis substituenda sit elemento,

$$\partial f \partial f_1 \dots \partial f_n,$$

ubi variabilium $f, f_1 \dots f_n$ loco aliae variabiles introducantur.

Fiat integratio prima ipsius f_n respectu; pro qua variabili introducatur alia x_n statuendo f_n esse quampiam ipsius x_n functionem quae involvere potest quantitates $f, f_1 \dots f_{n-1}$ quae in prima illa integratione pro Constantibus habentur. Differentiali ∂f_n substituenda erit, si integratio ipsius x_n respectu efficienda est, expressio aequivalens,

$$\partial f_n = \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right) \partial x_n,$$

ita ut integrale multiplex propositum aequetur sequenti,

$$U\left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right) \partial f \partial f_1 \dots \partial f_{n-1} \partial x_n.$$

Iam vero integrationum ordinem mutemus neque ipsius x_n sed ipsius f_{n-1} respectu integrationem primam efficiamus. Rursus ipsius f_{n-1} loco aliam variabilem x_{n-1} introducamus statuendo f_{n-1} esse functionem ipsius x_{n-1}

quampiam quae involvere potest etiam reliquas quantitates f, f_1, f_{n-2}, x_n quae in prima illa integratione pro Constantibus habentur: erit integrale propositum

$$\int U\left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right)\partial f\,\partial f_1\,\ldots\,\partial f_{n-2}\,\partial x_n\,\partial f_{n-1} =$$
$$\int U\left(\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\right)\left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right)\partial f\,\partial f_1\,\ldots\,\partial f_{n-2}\,\partial x_n\,\partial x_{n-1}.$$

Rursus integrationum ordinem mutando non ipsius x_{n-1} sed ipsius f_{n-2} respectu integratio prima instituatur, pro qua nova variabilis x_{n-2} introducatur; sic post quamlibet novae variabilis introductionem ordinem integrationum immutando et rursus variabilis loco cuius respectu integratio prima facienda est novam variabilem introducendo, pervenietur tandem ad hanc integralis transformati expressionem,

$$\int U\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)\,\ldots\,\left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right)\partial x\,\partial x_1\,\ldots\,\partial x_n.$$

In qua expressione transformata est f_n ipsarum f, $f_1 \ldots f_{n-1}$, x_n, porro f_{n-1} ipsarum f, $f_1 \ldots f_{n-2}$, x_{n-1}, x_n ac generaliter f_i ipsarum f, $f_1 \ldots f_{i-1}$, x_i, $x_{i+1} \ldots x_n$ functio, ita ut ultima f omnes novas variabiles x, $x_1 \ldots x_n$ involvat. At ipsius f expressionem in f_1, ipsarum f, f_1 expressiones in f_2, ipsarum f, f_1, f_2 expressiones in f_3 substituendo et ita porro, omnes f, $f_1 \ldots f_n$ evadunt novarum variabilium x, $x_1 \ldots$, x_n functiones, earumque functionum Determinans,

$$\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\,\ldots\,\frac{\partial f_n}{\partial x_n},$$

secundum theorema §. pr. probatum producto illi,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)\,\ldots\,\left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right),$$

aequatur. Quod si producto illi substituimus Determinans in integrali multiplici transformato, nanciscimur

$$\int U\,\partial f\,\partial f_1\,\ldots\,\partial f_n = \int U\,.\,\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\,\ldots\,\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\,\partial x\,\partial x_1\ldots\partial x_n,$$

quae est formula generalis pro integrali multiplici transformando. Quam formulam pro duabus et tribus variabilibus eodem fere tempore *Eulerus* et *Lagrange* invenerunt, sed ille paullo prius. Et haec formula egregie analogiam differentialis et Determinantis functionalis declarat.

13.

De functionibus alternantibus earumque divisione per productum e differentiis elementorum conflatum.

(Auct. *C. G. J. Jacobi* prof. ord. math. Regiom.)

1.

Eleganter olim observavit Cl. *Vandermonde*, proposito Determinante,

$$\Sigma \pm a_0^{(0)} a_1' a_2'' \dots a_n^{(n)},$$

si mutentur indices in exponentes, provenire Productum conflatum ex omnibus elementorum,

$$a_0, \quad a_1, \quad a_2 \quad \dots \quad a_n,$$

differentiis,

$$\begin{aligned} P = (a_1 - a_0)(a_2 - a_0)(a_3 - a_0) \dots (a_n - a_0) \\ (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \dots (a_n - a_1) \\ (a_3 - a_2) \dots (a_n - a_2) \\ \dots\dots\dots\dots \\ (a_n - a_{n-1}). \end{aligned}$$

Quod sic demonstratur. Functio quae elementorum Permutatione aliqua in valorem oppositum abit, nullum involvere potest terminum eadem Permutatione immutatum; adesse enim deberet etiam terminus oppositus et uterque se mutuo destrueret. Unde Productum P, quod duorum elementorum commutatione in valorem oppositum abit, evolutum carere debet terminis,

$$a_0^{\alpha_0} a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_n^{\alpha_n},$$

in quibus duo exponentes vel plures inter se aequales sunt, quippe qui termini non mutantur duo elementa ad eandem dignitatem elata inter se commutando. Hinc exponentes,

$$\alpha_0, \quad \alpha_1, \quad \alpha_2 \quad \dots \quad \alpha_n,$$

tantum valores induere possunt integros positivos a se diversos et cum omnium summa aequare debeat Producti P dimensionem,

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

exponentes illi alii esse nequeunt quam,

$$0, \ 1, \ 2 \ \dots \ n.$$

Quorumcunque enim aliorum inter se diversorum summa numerum $\frac{n(n+1)}{2}$ superaret. Coëfficientes autem terminorum illorum in quibus a_0, a_1 etc. omnes inter se diversi sunt, alii esse nequeunt quam

$$\pm 1,$$

cum in faciendo Producto illi termini unico modo producantur. Ex. gr. terminus,

$$a_0^0\, a_1^1\, a_2^2 \,\ldots\, a_n^n,$$

aliter produci non potest quam singulorum factorum,

$$\begin{array}{rrr} a_n - a_{n-1}, & a_n - a_{n-2}, \;\ldots & a_n - a_0 \\ a_{n-1} - a_{n-2}, & a_{n-1} - a_{n-3}, \;\ldots & a_{n-1} - a_0 \\ & a_{n-2} - a_{n-3}, \;\ldots & a_{n-2} - a_0 \\ & \ldots\ldots\ldots & \\ & & a_1 - a_0, \end{array}$$

prima nomina inter se producendo. Nascitur igitur Producti P evolutio e termino,

$$\pm a_0\, a_1^1\, a_2^2 \,\ldots\, a_n^n,$$

elementa a_0, $a_1 \ldots a_n$ sive eorum indices subscriptos $0, 1 \ldots n$ omnimodis permutando, signis insuper ea lege definitis ut binorum indicum commutatione Aggregatum omnium terminorum in valorem oppositum abeat. Quae ipsa est Determinantis formatio, siquidem exponentes pro indicibus habentur.

Ex antecedentibus patet in evolvendo Producto P perpaucos remanere terminos, longe plurimis se mutuo destruentibus. Nam producendo

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

factores binomiales, proveniunt termini numero

$$2^{\frac{n(n+1)}{2}},$$

e quibus tantum remanent,

$$1.2.3 \ldots (n+1),$$

$n+1$ indicum Permutationibus respondentes. Sic quoties $n=5$, e 32768 terminis nonnisi 720 remanent reliquis omnibus se mutuo destruentibus. Quamobrem rectius evolutio Producti eo explicatur quod instar Determinantis se habeat quam vice versa.

2.

E notis Determinantium proprietatibus similes quantitatum P petuntur. Sic pro tribus, quatuor etc. elementis successive formantur quantitates P per formulas,

$$
\begin{aligned}
(a_1 - a_0)(a_2 - a_0)(a_2 - a_1) &= a_1 a_2 (a_2 - a_1) \\
&\quad + a_2 a_0 (a_0 - a_2) \\
&\quad + a_0 a_1 (a_1 - a_0),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(a_1 - a_0)(a_2 - a_0)(a_3 - a_0)(a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2) &= \\
a_1 a_2 a_3 (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)& \\
- a_2 a_3 a_0 (a_3 - a_2)(a_0 - a_2)(a_0 - a_3)& \\
+ a_3 a_0 a_1 (a_0 - a_3)(a_1 - a_3)(a_1 - a_0)& \\
- a_0 a_1 a_2 (a_1 - a_0)(a_2 - a_0)(a_2 - a_1)&,
\end{aligned}
$$

etc. etc.

Quaeque linea horizontalis e praecedente obtinetur quemlibet indicum 0, 1, 2 etc. mutando in proxime sequentem, ultimum in primum, signo simul mutato aut immutato prout elementorum numerus par aut impar est.

Si elementorum numerus par est, commoda haec habetur quantitatis P repraesentatio. Vocemus

$$(i_0, i_1, i_2 \dots i_m)$$

functionem aliquam quantitatum indicibus $i_0, i_1 \dots i_m$ affectarum; si formandum est Aggregatum,

$$
\begin{aligned}
S(i_0, i_1, i_2 \dots i_m) = &(i_0, i_1, i_2 \dots i_{m+1}, i_m) + \\
&(i_1, i_2, i_3 \dots i_m, i_0) + \\
&(i_2, i_3, i_4 \dots i_0, i_1) + \\
&\dots\dots\dots \\
&(i_m, i_0, i_1 \dots i_{m-2}, i_{m-1}),
\end{aligned}
$$

id innuam dicendo, indices

$$i_0, i_1, i_2, \dots i_m$$

cyclum percurrere. Qua in re ordo quo indices in cyclum disponantur bene tenendum est. His positis quantitatem P sic formare licet. Fingatur expressio,

$$(a_1 - a_0)(a_3 - a_2) \dots (a_n - a_{n-1}) \, \Sigma \, a_2^2 a_3^2 a_4^4 a_5^4 \dots a_{n-1}^{n-1} a_n^{n-1},$$

quam quo clarius lex appareat sic scribam,

$$(a_1 - a_0)(a_3 - a_2) \dots (a_n - a_{n-1}) \, \Sigma \, (a_0 a_1)^0 (a_2 a_3)^2 (a_4 a_5)^4 \dots (a_{n-1} a_n)^{n-1},$$

sub signo Σ omnimodis permutatis exponentibus,

$$0, 2, 4, \ldots\ldots n-1.$$

In expressione illa cyclum percurrant *primo* elementa tria,

$$a_{n-2},\; a_{n-1},\; a_n,$$

secundo elementa quinque,

$$a_{n-4},\; a_{n-3},\; a_{n-2},\; a_{n-1},\; a_n$$

et sic deinceps ita ut *postremo* cyclum percurrant elementa,

$$a_1,\; a_2,\; a_3 \ldots\ldots a_n.$$

Omnium expressionum provenientium Aggregatum aequabitur ipsi P. Ex. gr. pro quatuor elementis fit,

$$\begin{aligned} P = (a_1-a_0)(a_3-a_2)\left\{a_0^2 a_1^2 + a_2^2 a_3^2\right\} &= (a_1-a_0)(a_2-a_0)(a_3-a_0) \\ + (a_2-a_0)(a_1-a_3)\left\{a_0^2 a_2^2 + a_3^2 a_1^2\right\} &\; (a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_3-a_2) \\ + (a_3-a_0)(a_2-a_1)\left\{a_0^2 a_3^2 + a_0^2 a_2^2\right\}. \end{aligned}$$

In expressione proposita,

$$(a_1-a_0)(a_3-a_2)\ldots\ldots(a_n-a_{n-1})\,\Sigma(a_0 a_1)^0 (a_2 a_3)^2 \ldots\ldots (a_{n-1} a_n)^{n-1},$$

constat summa Σ terminis

$$1.2.3\ldots\ldots\frac{n+1}{2}$$

qui Permutationibus exponentium proveniunt. Productum,

$$(a_1-a_0)(a_3-a_2)\ldots\ldots(a_n-a_{n-1}),$$

evolutum suppeditat terminos

$$2^{\frac{n+1}{2}}.$$

Ubi successive tres, quinque, ... n elementa cyclum percurrunt, terminorum numerus per 3, 5 .... n multiplicatur. Unde Aggregatum propositum evolutum amplectitur terminos numero,

$$2^{\frac{n+1}{2}}.1.2.3\ldots\ldots\frac{n+1}{2}.3.5\ldots\ldots n,$$

quem patet aequalem esse numero,

$$1.2.3\ldots\ldots n+1.$$

Alia generalior ipsius P repraesentatio haec est.

Discerpamus terminum generalem

$$\pm a_0^0 a_1^1 a_2^2 \ldots\ldots a_{n-1}^{n-1}$$

in plura producta, veluti in tria,

$$\pm a_0^0 a_1^1 \ldots\ldots a_i^{(i)} \times \pm a_{i+1}^{i+1} a_{i+2}^{i+2} \ldots\ldots a_k^k \times \pm a_{k+1}^{k+1} a_{k+2}^{k+2} \ldots\ldots a_n^{(n)}.$$

Pro discerptionibus in plura producta cum prorsus similia valeant, in illa discerptione consistam. Obtinentur omnes indicum 0, 1, 2 .... n Permutationes distribuendo eas in tres classes quarum prima $i+1$, secunda $k-i$, tertia $n-k$ indices amplectitur, eaque distributione omnibus modis facta quibus fieri potest, cuiusvis classis indices omnimodis permutentur. Ex $n+1$ elementis eligi possunt $i+1$ diversa primam classem formantia modis

$$\frac{n+1.n\ \ldots\ n-i+1}{1.2\ \ldots\ i+1};$$

e reliquis $n-i$ elementis eligi possunt $k-i$ elementa diversa secundam classem formantia modis

$$\frac{n-i.n-i-1\ \ldots\ n-k+1}{1.2\ \ldots\ k-i};$$

reliqua $n-k$ elementa tertiam classem formant, unde distributio $n+1$ elementorum in tres classes illas fit modis

$$\frac{n+1.n\ \ldots\ n-i+1.n-i\ \ldots\ n-k+1}{1.2\ \ldots\ i+1\ .\ 1.2\ \ldots\ k-i}.$$

Elementa primae, secundae, tertiae classis permutari possunt resp. modis

$$1.2.3\ \ldots\ i+1,\quad 1.2.3\ \ldots\ k-i,\quad 1.2.3\ \ldots\ n-k,$$

quibus Permutationibus ad singulas distributiones adhibitis omnes emergunt $n+1$ elementorum Permutationes $1.2\ \ldots\ (n+1)$.

E termino

$$\pm a_0^0 a_1^1\ \ldots\ a_i^i\ .\ \pm a_{i+1}^{i+1} a_{i+2}^{i+2}\ \ldots\ a_k^k\ .\ \pm a_{k+1}^{k+1} a_{k+2}^{k+2}\ \ldots\ a_n^n$$

provenit permutando indices 0, 1, ... i, indices $i+1$, $i+2$ .... k, indices $k+1$, $k+2$ .... n, productum,

$$\Sigma \pm a_0^0 a_1^1\ \ldots\ a_i^{(i)}\ .\ \Sigma \pm a_{i+1}^{i+1} a_{i+2}^{i+2}\ \ldots\ a_k^k\ .\ \Sigma \pm a_{k+1}^{k+1} a_{k+2}^{k+2}\ \ldots\ a_n^{(n)},$$

quod secundum §. 1. sic exhiberi potest,

$$(a_{i+1} a_{i+2}\ \ldots\ a_k)^{i+1} (a_{k+1} a_{k+2}\ \ldots\ a_n)^{k+1} \times$$
$$\Pi(a_0, a_1\ \ldots\ a_i)\, \Pi(a_{i+1}, a_{i+2}\ \ldots\ a_k)\, \Pi(a_{k+1}, a_{k+2}\ \ldots\ a_n);$$

designante generaliter

$$\Pi(a, b, c\ \ldots\ p, q) = (b-a)(c-a)\ \ldots\ (q-p)$$

productum ex omnibus elementorum a, b, ... q differentiis. Hinc eruitur:

$$P = \Pi(a_0, a_1\ \ldots\ a_n) =$$
$$S \pm \left\{ \begin{matrix} (a_{i+1} a_{i+2}\ \ldots\ a_k)^{i+1} (a_{k+1}, a_{k+2}\ \ldots\ a_n)^{k+1} \times \\ \Pi(a_0, a_1\ \ldots\ a_i)\, \Pi(a_{i+1}, a_{i+2}\ \ldots\ a_k)\, \Pi(a_{k+1}, a_{k+2}\ \ldots\ a_n) \end{matrix} \right\}.$$

Signum S amplectitur tot terminos quot habentur modi elementi $n+1$ in tres classes $i+1$, $k-i$, $n-k$ elementorum distribuendi. Omnes habentur

distributiones, eligendo ex omnibus indicum 0, 1 .... n Permutationibus has,

$$a_0, a_1 \ldots\ldots a_i, a_{i+1}, a_{i+2} \ldots\ldots a_k, a_{k+1}, a_{k+2} \ldots\ldots a_n,$$

in quibus a_0, a_1 .... a_i nec non a_{i+1}, a_{i+2} .... a_k, denique a_{k+1}, a_{k+2} .... a_n sese magnitudine excipiunt. Prout mutando indices 0, 1 .... n in a_0, a_1 .... a_n Productum P immutatum manet aut in valorem oppositum abit, termino sub signo S contento signum $+$ aut $-$ praefigendum est. His obiter commemoratis ad propositum pergo.

3.

Generaliter cum ill. *Cauchy* vocemus functiones *alternantes* quae elementorum Permutationibus aut non mutantur aut in valorem oppositum abeunt. Quarum est simplicissima Productum P antecedentibus consideratum quod ex omnibus elementorum differentiis conflatur. Eiusdem functionum est expressio generalis,

$$P\,\Sigma\left(\frac{\varphi(a_0, a_1, \ldots\ldots a_n)}{P}\right),$$

in qua sub signo Σ elementa a_0 etc. omnimodis permutanda sunt. De functione φ reiici possunt termini omnes duorum elementorum Permutatione immutati quippe qui se mutuo destruere debent (v. §. 1.). Hinc si ponitur

$$\varphi(a_0, a_1 \ldots\ldots a_n) = a_0^{\alpha_0} a_1^{\alpha_1} \ldots\ldots a_n^{\alpha_n},$$

exponentes α_0, α_1 .... α_n omnes inter se diversi esse debent, ne functio alternas, ex eo termino proveniens, identice evanescat.

Constat et facile probatur, quoties exponentes α_0 etc. sint integri, functionem alternantem,

$$\Sigma \pm a_0^{\alpha_0} a_1^{\alpha_1} \ldots\ldots a_n^{\alpha_n} = P\,\Sigma \frac{a_0^{\alpha_0} a_1^{\alpha_1} \ldots\ldots a_n^{\alpha_n}}{P}$$

per ipsum P divisibilem esse. Sed non video observatum esse divisionis Quotientem per formulam generalem assignari posse. Quod ut appareat, investigabo eius Quotientis,

$$\Sigma \frac{a_0^{\alpha_0} a_1^{\alpha_1} \ldots\ldots a_n^{\alpha_n}}{P}$$

functionem *generatricem*. Qua in quaestione exponentem minimum statuere licet evanescere; si enim α_0 est exponens minimus, expressio proposita per

$$a_0^{\alpha_0} a_1^{\alpha_1} \ldots\ldots a_n^{\alpha_n}$$

dividi potest. Hinc Quotientem propositum sic exhibere licet,

$$\Sigma \frac{a_0^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \ldots\ldots a_n^{\alpha_n}}{P}$$

in qua expressione exponentes α_1, α_2 etc. sunt positivi.

Sit quantitatum $t_0, t_1 \ldots . t_m$ functio rationalis integra quaecunque,

$$\varphi(t_0, t_1 \ldots . t_m);$$

sit Productum ex omnibus ipsarum t_0 etc. differentiis,

$$\Pi(t_0, t_1 \ldots . t_m) = (t_1 - t_0)(t_2 - t_0) \ldots . (t_m - t_{m-1})$$
$$= \Sigma \pm t_1 t_2^2 \ldots . t_m^m;$$

sit denique

$$f(x) = (x - a_0)(x - a_1)(x - a_2) \ldots . (x - a_n).$$

His positis, secundum ipsarum t_0, t_1 etc. dignitates descendentes evolvamus expressionem,

$$\frac{\Pi(t_0, t_1 \ldots . t_m)\, \varphi(t_0, t_1 \ldots . t_m)}{f(t_0)\, f(t_1) \ldots . f(t_m)},$$

eiusque evolutionis terminos simul omnium $t_0, t_1 \ldots . t_m$ dignitatibus negativis affectos accuratius examinemus.

Ponendo

$$f'(x) = \frac{d f(x)}{d x},$$

fit per discerptiones in fractiones simplices,

$$1. \quad \frac{\Pi(t_0, t_1 \ldots . t_m) . \varphi(t_0, t_1 \ldots . t_m)}{f(t_0)\, f(t_1) \ldots . f(t_m)} =$$

$$\Pi\varphi \left\{ \frac{1}{f'(a_0)(t_0 - a_0)} + \frac{1}{f'(a_1)(t_0 - a_1)} \ldots . + \frac{1}{f'(a_n)(t_0 - a_n)} \right\} \times$$
$$\left\{ \frac{1}{f'(a_0)(t_1 - a_0)} + \frac{1}{f'(a_1)(t_1 - a_1)} \ldots . + \frac{1}{f'(a_n)(t_1 - a_n)} \right\} \times$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\left\{ \frac{1}{f'(a_0)(t_m - a_0)} + \frac{1}{f'(a_1)(t_m - a_1)} \ldots . + \frac{1}{f'(a_n)(t_m - a_n)} \right\}.$$

Facta Multiplicatione, huiusmodi proveniunt expressiones,

$$2. \quad \frac{\varphi(t_0, t_1 \ldots . t_m) . \Pi(t_0, t_1 \ldots . t_m)}{f'(a) f'(b) \ldots . f'(p)(t_0 - a)(t_1 - b) \ldots . (t_m - p)}$$

designantibus $a, b \ldots . p$ quaecunque quantitatum $a_0, a_1 \ldots . a_n$ sive diversas sive inter se aequales. Si binae veluti a et b inter se aequales sunt, expressio (2.) fit:

$$\frac{\varphi(t_0, t_1 \ldots . t_m)}{f'(a) f'(b) \ldots . f'(p)} . \frac{\Pi(t_0, t_1 \ldots . t_m)}{t_1 - t_0} . \left\{ \frac{1}{t_0 - a} - \frac{1}{t_1 - a} \right\} \frac{1}{(t_2 - c)(t_3 - d) \ldots . (t_m - p)}.$$

E cuius expressionis evolutione, cum $\frac{\Pi}{t_1 - t_0}$ fit functio integra, non proveniunt termini, utriusque t_0 et t_1 dignitatibus negativis affecti. Unde si evolutionis respicimus terminos *omnium* $t_0, t_1 \ldots . t_m$ dignitatibus negativis

affectos, in expressione (2.) pro ipsis $a, b \dots p$ quantitatum $a_0, a_1 \dots a_n$ *diversas* sumere sufficit. Quod cum fieri non possit si $m > n$, habemus propositionem, *quoties $m > n$, ex expressione (1.) evoluta non provenire terminos simul omnium $t_0, t_1 \dots t_m$ dignitatibus negativis affectos.*

4.

Statuendo $m \leqq n$, expressio evolvenda secundum antecc. sic exhiberi potest,

$$3. \quad S.\frac{\varphi(t_0, t_1 \dots t_m).\Pi(t_0, t_1 \dots t_m)}{f'(a_{n-m})f'(a_{n-m+1})\dots f'(a_n)(t_0 - a_{n-m})(t_1 - a_{n-m+1})\dots(t_m - a)}.$$

Sub signo S pro ipsis a_{n-m} etc. sumendae sunt quaelibet $m+1$ diversae quantitatum $a_0, a_1 \dots a_n$, eaeque omnimodis inter se permutandae. Vocemus H Coëfficientem evolutionis propositae ductum in terminum

$$t_0^{-1}\, t_1^{-1} \dots t_m^{-1};$$

erit quod facile constat,

$$4. \quad H = S.\frac{\varphi(a_{n-m}, a_{n-m+1} \dots a_n).\Pi(a_{n-m}, a_{n-m+1} \dots a_n)}{f'(a_{n-m})f'(a_{n-m+1})\dots f'(a_n)}$$

Iam vero cum sit,

$$f'(a_i) = (a_i - a_0)(a_i - a_1) \dots (a_i - a_n),$$

omisso factore evanescente $a_i - a_i$: fit

$$5. \quad \Pi(a_{n-m}, a_{n-m+1} \dots a_n).\Pi(a_0, a_1 \dots a_n) =$$
$$(-1)^{\frac{m.m+1}{2}}\Pi(a_0, a_1 \dots a_{n-m-1})f'(a_{n-m})f'(a_{n-m+1})\dots f'(a_n).$$

Nam in producto,

$$f'(a_{n-m})f'(a_{n-m+1})\dots f'(a_n),$$

ut factores inveniuntur omnium elementorum $a_0, a_1 \dots a_n$ differentiae praeter eas e quibus conflatur productum $\Pi(a_0, a_1 \dots a_{n-m-1})$, atque insuper bis sed signis oppositis habentur $\frac{m.m+1}{2}$ factores producti $\Pi(a_{n-m}, a_{n-m+1} \dots a_{n-m-1})$. Substituendo (5.) eruitur e (4.):

$$6. \quad H = (-1)^{\frac{m.m+1}{2}} S.\frac{\Pi(a_0, a_1 \dots a_{n-m-1}).\varphi(a_{n-m}, a_{n-m+1} \dots a_n)}{P}.$$

Fit secundum §. 1.:

$$7. \quad \frac{\Pi(a_0, a_1 \dots a_{n-m-1})}{P} = \Sigma\frac{a_0^0\, a_1^1\, a_2^2 \dots a_{n-m-1}^{n-m-1}}{P},$$

sub signo Σ omnimodis permutatis indicibus $0, 1 \dots n-m-1$. Hinc obtinetur e (6.):

$$8. \quad H = (-1)^{\frac{m.m+1}{2}}\Sigma.\frac{a_0^0\, a_1^1\, a_2^2 \dots a_{n-m-1}^{n-m-1}\varphi(a_{n-m}, a_{n-m+1} \dots a_n)}{P},$$

sub signo Σ omnibus modis permutatis elementis omnibus $a_0, a_1 \ldots a_n$. Nam in expressione (6.) sub signo S elementa $a_0, a_1 \ldots a_n$ omnimodis distribuenda erant in duas classes resp. $n-m$ etc. $m+1$ elementorum atque elementa secundae classis omnimodis permutanda. In formula quae substituendo (7.) prodit etiam elementa primae classis omnimodis permutanda sunt, unde in formula (8.) sub signo Σ elementa omnia omnimodis in duas classes distribuenda et utriusque classis elementa omnimodis permutanda sunt, quod perinde est ac si elementa omnia omnimodis permutentur (v. §. 2.).

Expressio (8.) est elementorum $a_0, a_1 \ldots a_n$ functio alternans rationalis integra divisa per Productum ex omnium elementorum differentiis P. Cuius Quotientis est expressio (1.) functio generatrix, quae indagatu proposita erat. Invenimus enim, evoluta expressione (1.), Coëfficientem termini

$$t_0^{-1} t_1^{-1} \ldots t_m^{-1}$$

esse Quotientem propositum. Seorsim consideramus casum quo

$$m = n.$$

Eo casu fit formula (4.):

$$9. \quad H = S.\frac{P.\varphi(a_0, a_1 \ldots a_n)}{f'(a_0)f'(a_1) \ldots f'(a_n)};$$

fit autem:

$$f'(a_0)f'(a_1) \ldots f'(a_n) = (-1)^{\frac{n.n+1}{2}} PP,$$

unde

$$10. \quad H = (-1)^{\frac{n.n+1}{2}} S.\frac{\varphi(a_0, a_1 \ldots a_n)}{P},$$

qua in formula sub signo S elementa $a_0, a_1 \ldots a_n$ omnimodis permutanda sunt. Expressio ad dextram functio alternans est rationalis integra maxime generalis, quoniam φ functionem omnium elementorum rationalem integram quamcunque designat. Habetur igitur haec

Propositio.

Sit P productum ex omnibus elementorum $a_0, a_1 \ldots a_n$ differentiis, e quo nascatur Π ponendo ipsorum $a_0, a_1 \ldots a_n$ loco resp. $t_0, t_1 \ldots t_n$; sit

$$f(x) = (x-a_0)(x-a_1) \ldots (x-a_n),$$

atque designet $\varphi(t_0, t_1 \ldots t_n)$ ipsarum $t_0, t_1 \ldots t_n$ functionem quamcunque rationalem integram; sub signo Σ permutando omnimodis elementa $a_0, a_1 \ldots a_n$, fit

$$\Sigma \frac{\varphi(a_0, a_1 \ldots a_n)}{P}$$

expressio maxime generalis functionis rationalis integrae alternantis divisae per Productum ex omnium elementorum differentiis; Quotientem invenimus aequare Coëfficientem termini

$$t_0^{-1}\,t_1^{-1}\,\ldots\,t_n^{-1}$$

in evoluta expressione

$$(-1)^{\frac{n.n+1}{2}}\frac{\Pi.\varphi(t_0,\,t_1\,\ldots\,t_n)}{f(t_0)\,f(t_1)\,\ldots\,f(t_n)}.$$

Si $m=n-1$, secundum (8.) expressionis

$$\Sigma\frac{\varphi(a_1,\,a_2\,\ldots\,a_n)}{P}$$

functio generatrix fit,

$$(-1)^{\frac{n.n-1}{2}}.\frac{\Pi(t_0,\,t_1\,\ldots\,t_{n-1})\,.\,\varphi(t_0,\,t_1\,\ldots\,t_{n-1})}{f(t_0)\,f(t_1)\,\ldots\,f(t_{n-1})}.$$

Quod facile etiam de Propositione antecedente sequitur.

5.

Statuamus,

$$\varphi(t_0,\,t_1\,\ldots\,t_m)=t_0^{\gamma}\,t_1^{\gamma_1}\,\ldots\,t_m^{\gamma_m},$$

atque observemus, dividendo functionem evolvendam per

$$t_0^{\gamma}\,t_1^{\gamma_1}\,\ldots\,t_m^{\gamma_m},$$

Coëfficientem termini

$$t_0^{-1}\,t_1^{-1}\,\ldots\,t_m^{-1}$$

abire in Coëfficientem termini

$$t_0^{-(\gamma+1)}\,t_1^{-(\gamma_1+1)}\,\ldots\,t_m^{-(\gamma_m+1)}.$$

Hinc suppeditabit formula (8.) hanc Propositionem:

Propositio.

Functio alternans divisa per Productum ex elementorum $a_0,\,a_1\,\ldots\,a_n$ differentiis,

$$\Sigma\frac{a_0^0\,a_1^1\,a_2^2\,\ldots\,a_{n-m-1}^{n-m-1}\,a_{n-m}^{\gamma}\,a_{n-m+1}^{\gamma_1}\,\ldots\,a_n^{\gamma_m}}{(a_1-a_0)(a_2-a_0)\,\ldots\,(a_n-a_{n-1})},$$

aequatur Coëfficienti termini,

$$t_0^{-(\gamma+1)}\,t_1^{-(\gamma_1+1)}\,\ldots\,t_m^{-(\gamma_m+1)}$$

in evoluta expressione

$$\frac{(t_0-t_1)\,(t_0-t_2)\,\ldots\,(t_n-t_{n-1})}{f(t_0)\,f(t_1)\,\ldots\,(f(t_m)},$$

siquidem

$$f(x)=(x-a_0)(x-a_1)\,\ldots\,(x-a_n).$$

Observo in Prop. praecedente positum esse,

$$(-1)^{\frac{m.m+1}{2}}(t_1-t_0)(t_2-t_0)\dots\dots(t_m-t_{m-1}) = (t_0-t_1)(t_0-t_2)\dots\dots(t_{m-1}-t_m).$$

Sit

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x^{n+1}} + \frac{C_1}{x^{n+2}} + \frac{C_2}{x^{n+3}} + \frac{C_3}{x^{n+4}} + \text{etc.}$$

erit C_i summa omnium productorum i elementorum sive diversorum sive aequalium e numero ipsorum a_0, $a_1 \dots\dots a_n$ desumtorum. Quae quantitates C_1, C_2 etc., ponendo

$$f(x) = x^n - A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} - \text{etc.},$$

facile per ipsas quoque A_1, A_2 etc. exprimuntur. Substituendo evolutionem ipsius $\frac{1}{f(x)}$ praecedentem in evoluta fractione

$$\frac{1}{f(t_0)f(t_1)\dots\dots f(t_m)}$$

fit terminus generalis

$$C_{i_0}C_{i_1}\dots\dots C_{i_m}\,.\,t_0^{-(n+1+i_0)}t_1^{-(n+1+i_1)}\dots\dots t_m^{-(n+1+i_m)}.$$

Unde evoluta expressione,

$$\frac{(t_0-t_1)(t_0-t_2)\dots\dots(t_{m-1}-t_m)}{f(t_0)f(t_1)\dots\dots f(t_m)} = \frac{\Sigma \pm t_0^m t_1^{m-1}\dots\dots t_{m-1}}{f(t_0)f(t_1)\dots\dots f(t_m)},$$

fit terminus generalis,

$$\Sigma \pm C_{i_0}C_{i_1}\dots\dots C_{i_m}\,.\,t_0^{m-n-1-i_0}t_1^{m-n-2-i_1}\dots\dots t_{m-1}^{-n-i_{m-1}}t_m^{-(n+1+i_m)}.$$

Hinc Propositio antecedens suggerit formulam,

$$11.\quad \Sigma\,.\,\frac{a_1 a_2^2 \dots\dots a_{n-m-1}^{n-m-1} a_{n-m}^{\gamma} a_{n-m+1}^{\gamma_1}\dots\dots a_n^{\gamma_m}}{(a_1-a_0)(a_2-a_0)\dots\dots(a_n-a_{n-1})} =$$

$$\Sigma \pm C_{\gamma+m-n}C_{\gamma_1+m-n-1}\dots\dots C_{\gamma_m-n}.$$

In huius formulae altera quidem parte omnimodis permutanda sunt elementa a_0, $a_1 \dots\dots a_n$, in altera autem indices γ, $\gamma_1 \dots\dots \gamma_m$, signis $\pm$ more consueto definitis. Fit ex. gr. pro $m = 0$, $m = 1$ etc.;

$$\Sigma\,.\,\frac{a_1 a_2^2 \dots\dots a_{n-1}^{n-1} a_n^{\gamma}}{P} = C_{\gamma-n}$$

$$\Sigma\,.\,\frac{a_1 a_2^2 \dots\dots a_{n-2}^{n-2} a_{n-1}^{\gamma} a_n^{\gamma_1}}{P} = C_{\gamma+1-n}C_{\gamma_1-n} - C_{\gamma_1+1-n}C_{\gamma-n}$$

etc. etc.

Generaliter *aequatur Quotiens propositus,*

$$\Sigma\,.\,\frac{a_1 a_2^2 \dots\dots a_{n-m-1}^{n-m-1} a_{n-m}^{\gamma} a_{n-m+1}^{\gamma_1}\dots\dots a_n^{\gamma_m}}{P}$$

Determinanti quod pertinet ad systema quantitatum,

$$\begin{array}{cccc} C_{\gamma+m-n}, & C_{\gamma_1+m-n}, & \dots\dots & C_{\gamma_m+m-n} \\ C_{\gamma+m-n-1}, & C_{\gamma_1+m-n-1}, & \dots\dots & C_{\gamma_m+m-n-1} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ C_{\gamma-n}, & C_{\gamma_1-n}, & \dots\dots & C_{\gamma_m-n}. \end{array}$$

In his formulis statuendum est quantitatem C indice 0 affectam unitati aequalem esse, indice negativo affectam evanescere.

Si placeret, Determinans praecedens per elementorum $a_0, a_1 \dots\dots a_n$ ipsas Combinationes formatas exhibere, in formandis C_{γ_i+1-n} amitti posset elementum unum a_n, in formandis C_{γ_i+2-n} omitti possent elementa duo a_n, a_{n-1}, et ita porro. Constat enim non mutari Determinans si singulis seriei horizontali terminis addantur earundem serierum verticalium termini multiplicati per quantitates quascunque, quae tamen pro omnibus eiusdem seriei horizontali terminis eaedem esse debent. Porro observo si designentur per C', C'' etc. Combinationes in quibus formandis unum, duo etc. elementa omittuntur, fieri

$$\begin{aligned} C_{i+1} - a_n C_i &= C'_{i+1} \\ C_{i+2} - (a_n + a_{n-1}) C_{i+1} + a_n a_{n+1} C_i &= C''_{i+2} \\ \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \end{aligned}$$

Quod facile ipsa aequatione probatur,

$$\frac{1}{(x-a_0)(x-a_1)\dots\dots(x-a_n)} = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x^{n+1}} + \frac{C_1}{x^{n+2}} + \frac{C_2}{x^{n+3}} + \text{etc.}$$

Quibus Determinantis et Combinationum proprietatibus propositum constat.

14.

Zur combinatorischen Analysis.

(Von *C. G. J. Jacobi* ord. Prof. der Math. an der Universität zu Königsberg in Pr.)

Setzt man in die Gleichung,

$$e^{-\log(1-x)} = \frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+ \text{etc.},$$

die Reihenentwicklung für

$$-\log(1-x) = x+\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{3}x^3+\tfrac{1}{4}x^4+ \text{etc.} = X,$$

entwickelt e^X in die Reihe,

$$e^X = 1+X+\frac{X^2}{2}+\frac{X^3}{2.3}+\frac{X^4}{2.3.4}+ \text{etc.},$$

so sieht man, dafs in

$$1+X+\tfrac{1}{2}X^2+\frac{X^3}{2.3}+ \text{etc.} = \Sigma\frac{X^i}{\Pi i} = 1+x+x^2+x^3+ \text{etc.}$$

der Coëfficient von jeder Potenz x^n der Einheit gleich wird. Es ist aber der Coëfficient von x^n in $\Sigma\frac{X^i}{\Pi i}$ nach dem bekannten Polynomialtheorem gleich dem Aggregate

$$\Sigma\frac{1}{2^b 3^c \dots \Pi a\, \Pi b\, \Pi c \dots},$$

wo

$$1.\quad a+2b+3c+ \text{etc.} = n.$$

Es mufs daher die Gleichung Statt finden:

$$2.\quad \Sigma\frac{1}{2^b 3^c \dots \Pi a\, \Pi b\, \Pi c \dots} = 1,$$

wenn man für a, b, c, ... solche ganze positive Zahlen, die Null mit einbegriffen, setzt, für welche

$$a+2b+3c+ \text{etc.}$$

denselben Werth behält, es mag dieser Werth übrigens sein, welcher er wolle. Die Gleichung (2.) kann man durch rein combinatorische Betrachtungen beweisen.

Wenn man die Zahlen 1, 2, 3, ... n versetzt, so wird durch diese Versetzung eine Zahl i_1 in i_2, i_2 in i_3 u. s. w. und zuletzt i_α wieder in i_1 übergehen, wo i_1, i_2 .... i_α sämmtlich von einander verschieden sind. Sind

hiermit die n Zahlen noch nicht erschöpft oder ist $a < n$, so nehme man von den übrig gebliebenen Zahlen irgend eine $i_{\alpha+1}$; diese wird durch die betrachtete Versetzung in $i_{\alpha+2}$, diese in $i_{\alpha+3}$ u. s. w. und zuletzt i_β in $i_{\alpha+1}$ übergehen, wo wieder $i_{\alpha+1}, i_{\alpha+2} \ldots\ldots i_\beta$ sämmtlich von einander verschieden sind. Auf diese Weise kann man fortfahren bis sämmtliche n Zahlen erschöpft sind. Bezeichnet man mit

$$3. \qquad (i_0 i_1 i_2 \ldots\ldots i_\alpha)$$

die Art der Versetzung, wonach jede der Zahlen $i_0, i_1 \ldots\ldots i_n$ in ihrer Reihenfolge in die nächste, die letzte in die erste übergeht, so wird man durch Versetzung der α Zahlen in dem Ausdrucke (3.) nur

$$1.2.3 \ldots\ldots \alpha - 1 = \frac{\Pi\alpha}{\alpha}$$

verschiedene Arten des Ueberganges der Zahlen in einander erhalten, weil je α Ausdrücke

$$(i_1 i_2 \ldots\ldots i_\alpha), \quad (i_2 i_3 \ldots\ldots i_\alpha i_1) \quad \ldots\ldots \quad (i_\alpha i_1 i_2 \ldots\ldots i_{\alpha-1})$$

nur dieselbe Art dieses Ueberganges bezeichnen. Man kann daher sämmtliche Versetzungen der n Zahlen erhalten, indem man die n Zahlen auf alle mögliche Arten in Gruppen, z. B. in a Gruppen von einer, in b Gruppen von zwei, in c Gruppen von 3 Zahlen theilt, wo

$$a + 2b + 3c + \text{etc.} = n,$$

und in jeder Gruppe z. B. von α Zahlen die verschiedenen

$$\frac{\Pi\alpha}{\alpha}$$

Arten bildet wie die Zahlen auf die angegebene cyclische Weise in einander übergehen. Wenn in einer Gruppe sich nur eine Zahl befindet, so heifst dieses so viel, dafs diese Zahl in der betrachteten Versetzung ihre Stelle überhaupt nicht ändert.

Man kann n Zahlen auf

$$\frac{\Pi n}{\Pi a\, \Pi b\, \Pi c \ldots\ldots (\Pi 2)^b (\Pi 3)^c \ldots\ldots}$$

verschiedene Arten in a Gruppen von einer, b Gruppen von 2, c Gruppen von 3 Zahlen u. s. w. theilen, wie durch einfache combinatorische Betrachtungen hinlänglich bekannt ist. In jeder Gruppirung giebt nach dem Obigen jede Gruppe von 2 Zahlen $\frac{\Pi 2}{2}$, jede Gruppe von 3 Zahlen $\frac{\Pi 3}{3}$ u. s. w. verschiedene Arten wie die Zahlen derselben Gruppe den cyclischen Uebergang in

einander halten können. Es wird daher jede Gruppirung der genannten Art

$$\left(\frac{\Pi 2}{2}\right)^b \left(\frac{\Pi 3}{3}\right)^c \ldots\ldots$$

Versetzungen geben, und da man

$$\frac{\Pi n}{\Pi a \, \Pi b \, \Pi c \ldots\ldots (\Pi 2)^b (\Pi 3)^c \ldots\ldots}$$

solcher Gruppirungen hat, so werden alle Gruppirungen, in denen die n Zahlen in a Gruppen von einer, b Gruppen von zwei, c Gruppen von drei Zahlen u. s. w. getheilt werden, wenn alle Zahlen jeder Gruppe auf alle mögliche Arten cyclisch in einander übergehen, zusammen

$$\frac{\Pi n}{\Pi a \, \Pi b \, \Pi c \ldots\ldots 2^b 3^c \ldots\ldots}$$

Versetzungen ergeben. Giebt man den a, b, c .... alle Werthe, für welche $a+2b+3c+$ etc. $= n$, so mufs man sämmtliche Πn Versetzungen der n Zahlen erhalten, so dafs man

$$1 = \Sigma \frac{1}{\Pi a \, \Pi b \, \Pi c \ldots\ldots 2^b 3^c \ldots\ldots}$$

erhält, welches die zu beweisende Gleichung ist.

18. März 1841.

15.

Untersuchungen über die Theorie der complexen Zahlen.

(Von Herrn Professor G. *Lejeune Dirichlet* zu Berlin.)

[Auszug aus einer der hiesigen Akademie der Wissenschaften am 27. Mai d. J. vorgelesenen Abhandlung.]

Da sich diese Untersuchungen sowohl hinsichtlich der darin befolgten Methode als durch ihre Resultate, an frühere Arbeiten des Verfassers anschliefsen, so wird es zur leichtern Verständlichkeit der hier zu gebenden Andeutungen zweckmäfsig sein, wenn wir diesen eine kurze Erwähnung einiger der früher behandelten Fragen vorausschicken. In einer Abhandlung, welche unter denen der Akademie für das Jahr 1837 gedruckt ist, hat man sich die Aufgabe gestellt, den längst bekannten und oft als Lemma benutzten Satz, nach welchem jede arithmetische Reihe, deren erstes Glied und deren Differenz keinen gemeinschaftlichen Factor haben, eine unendliche Anzahl von Primzahlen enthält, in aller Strenge zu beweisen. Der dort entwickelte Beweis bietet das Merkwürdige dar, dafs er ungeachtet der rein arithmetischen Natur des zu begründenden Satzes wesentlich auf der Betrachtung stetig veränderlicher Gröfsen beruht, indem derselbe von der Bildung unendlicher Reihen ausgeht, die wie die schon von *Euler* in der *Introd. in Analy. inf.* behandelten durch Multiplication einer unendlichen Anzahl von Factoren entstehen. Diese neuen Reihen unterscheiden sich jedoch darin von den Eulerschen, dafs in die Factoren, von denen jeder ein Glied der Reihe der Primzahlen enthält, noch Potenzen von Wurzeln der Einheit eingehen, deren Exponenten mit den sogenannten Indices der Primzahlen zusammenfallen, wenn diese mit allen übrigen auf ein System primitiver Wurzeln bezogen wird. Sobald man den eben angedeuteten Weg betreten hat, scheint sich der Beweis mit der gröfsten Leichtigkeit, und so zu sagen, ganz von selbst zu gestalten, allein bei aufmerksamer Betrachtung bemerkt man eine Schwierigkeit, ohne deren Beseitigung das Verfahren ganz illusorisch werden, oder doch nur auf besondere Fälle anwendbar sein würde. Diese Schwierigkeit besteht in der für den Erfolg unerläfslichen Nachweisung, dafs die Summen gewisser Reihen, deren

Convergenz leicht einzusehen ist, von der Null verschieden sind, und hat nicht etwa, wie man es zunächst vermuthen sollte, ihren Grund in der Unmöglichkeit die Summation auszuführen. Diese Operation ist vielmehr in allen Fällen leicht zu bewerkstelligen, allein der endliche Ausdruck, welchen man dadurch erhält, gewährt keine Erleichterung für die geforderte Nachweisung und es ist im Allgemeinen eben so schwer aus der Summe in endlicher Form zu erkennen, dafs sie von Null verschieden ist, als dies bei der ursprünglichen Reihe der Fall war.

Nach mancherlei fruchtlosen Versuchen war es zwar gelungen, die erwähnte Schwierigkeit vollständig zu überwinden; doch waren die Betrachtungen, zu welchen man seine Zuflucht zu nehmen genöthigt war, so complicirt und indirect, dafs sie nur wenig befriedigen konnten und die Auffindung eines kürzern und der Natur der Sache mehr entsprechenden Verfahrens sehr wünschenswerth machen mufsten. Wiederholte auf diesen Gegenstand gerichtete Bemühungen hatten denn auch endlich den beabsichtigten Erfolg, und führten zu dem unerwarteten Resultate, dafs die erwähnten Reihen mit einer Aufgabe zusammenhangen, deren Lösung in einem der wichtigsten Theile der Zahlenlehre eine längst gefühlte Lücke ausfüllt. Die Theorie, wovon wir reden, ist die der quadratischen Formen, welche zuerst von *Lagrange* begründet, später durch *Legendre* und besonders durch *Gaufs* zu einem hohen Grade der Ausbildung gelangt ist. Bekanntlich sind die Eigenschaften solcher Formen hauptsächlich von einer durch ihre Coefficienten bestimmten ganzen Zahl, welche die Determinante der Form heifst, abhängig, und *Lagrange* hat gezeigt, dafs jeder Determinante, sie sei positiv oder negativ, nur eine endliche Anzahl wesentlich verschiedener Formen entspricht, so wie derselbe grofse Geometer auch das Verfahren angegeben hat, nach welchem sich für jede numerisch gegebene Determinante diese wesentlich verschiedenen Formen darstellen lassen. Die Frage nach dem allgemeinen Zusammenhange zwischen der Anzahl der Formen und der Determinante wird jedoch durch die Kenntnifs dieses nur in bestimmten Fällen auszuführenden Verfahrens nicht erledigt und diese Frage ist es nun, welche in den oben erwähnten Untersuchungen ihre Lösung erhält.

Von den daraus hervorgehenden Resultaten, welche in diesem Journal (Bd. XIX. u. XXI.) ausführlich entwickelt worden sind, ist für unsern Zweck nur zu erwähnen, dafs die Abhängigkeit der Anzahl der Formen

von der Determinante sich in einer ganz verschiedenen Weise darstellt, je nachdem die Determinante negativ oder positiv ist. Im ersteren Falle ist diese Abhängigkeit rein arithmetischer Natur, während der Ausdruck für die Anzahl der Formen im zweiten Falle gewisse Verbindungen im Coefficienten der Hülfsgleichungen enthält, welche bei der Kreistheilung vorkommen.

Was nun die neuen Untersuchungen betrifft, deren ersten Theil die der Akademie vorgelegte Abhandlung enthält, so haben diese den Zweck, die eben angeführten Resultate auf die Theorie der complexen Zahlen auszudehnen. Den Gedanken, complexe ganze Zahlen, d. h. Ausdrücke von der Form $t+u\sqrt{-1}$, in die höhere Arithmetik einzuführen, verdankt man dem berühmten Verfasser der *Disq. arithm.*, welcher auf diese Erweiterung durch seine Untersuchungen über die Theorie der biquadratischen Reste geführt worden ist, deren Fundamentaltheoreme nur dann in ihrer höchsten Einfachheit und ganzen Schönheit erscheinen, wenn man sie auf complexe Primzahlen bezieht. Die Wichtigkeit des so erweiterten Begriffs der ganzen Zahl ist jedoch nicht auf die eben erwähnte Anwendung beschränkt; es wird vielmehr durch dessen Einführung den Untersuchungen der höheren Arithmetik ein neues Gebiet aufgeschlossen, auf welchem fast jede Eigenschaft reeller Zahlen ihr Analogon findet, welches nicht selten der erstern hinsichtlich der Einfachheit und Eleganz gleichkommt oder sie gar übertrifft. So gilt z. B. der angeführte Satz über die arithmetische Reihe auch noch für complexe Zahlen, d. h. der Ausdruck $an+b$ enthält unendlich viele complexe Primzahlen, wenn man darin a und b als gegebene complexe Zahlen ohne gemeinschaftlichen Factor, n dagegen als eine unbestimmte complexe Zahl betrachtet. Der Beweis bleibt dem für reelle Zahlen sehr ähnlich, und diese Aehnlichkeit erstreckt sich auch auf den hier gleichfalls vorkommenden Umstand, dafs man zu zeigen hat, dafs gewisse convergirende Reihen Summen haben, welche von Null verschieden sind. Die Analogie machte es im höchsten Grade wahrscheinlich, dafs zwischen diesen Reihen und der Anzahl der quadratischen Formen für die entsprechende complexe Determinante ein ähnlicher Zusammenhang Statt finden müsse, wie er früher für reelle Determinanten nachgewiesen worden war. Doch war dieser Zusammenhang in der Theorie der complexen Zahlen weit schwerer aufzufinden, nicht nur wegen der gröfsern Complication des Gegenstandes, sondern hauptsächlich deshalb, weil die Theorie der qua-

dratischen Formen auf dem Gebiete der complexen Zahlen noch ganz unausgebildet war und es also erforderlich wurde, die bekannten Sätze der Theorie der quadratischen Formen im gewöhnlichen Sinne des Wortes der Reihe nach durchzugehen, um zu erkennen, mit welchen Modificationen sie für complexe Zahlen gelten.

Nach dieser vorläufigen Untersuchung gelangt man in der That dahin, den vermutheten Zusammenhang nachzuweisen und es bleibt alsdann nur noch übrig, die erwähnten Reihen zu summiren, um den Ausdruck zu erhalten, welcher die Anzahl der Formen für eine complexe Determinante als Function dieser Determinante bestimmt. Als schliefsliches Resultat der Untersuchung stellt sich heraus, dafs die Abhängigkeit der Anzahl der Formen von der Determinante derjenigen ganz ähnlich ist, welche in dem zweiten der oben angeführten Fälle Statt findet, nur mit dem Unterschiede, dafs die Rolle, welche dort die Hülfsgleichungen für die Kreistheilung spielen, hier von den Gleichungen übernommen wird, welche sich auf die Theilung der Lemniscate, oder was dasselbe ist, auf die Theilung der elliptischen Functionen beziehen, welche dem Modul $\sqrt{\frac{1}{2}}$ entsprechen.

Merkwürdiger noch als dieses allgemeine Resultat ist ein besonderer Fall, wo die Anzahl der Formen unabhängig von der Theilung der Lemniscate bestimmt werden kann. Es ist dies der Fall einer reellen Determinante D; für eine solche ist nämlich, wenn man sie in der Theorie der complexen Zahlen betrachtet, die Anzahl der Formen ein Product von drei Factoren, wovon der erste eine einfache algebraische Function der Determinante darstellt, während der zweite und dritte mit den Zahlen zusammenfallen, welche in der gewöhnlichen Theorie der quadratischen Formen bezeichnen, wie viel Formen für die Determinanten $+D$ und $-D$ Statt finden.

Dieses Resultat enthält, wenn wir uns nicht sehr täuschen, einen der schönsten Sätze der Theorie der complexen Zahlen, und mufs um so mehr überraschen, als in der Theorie der reellen Zahlen zwischen den Formen, welche zwei entgegengesetzten Determinanten entsprechen, gar kein Zusammhang zu bestehen scheint.

16.
Eine Eigenschaft des Vierecks.

(Von Herrn Rechnungsrath *Brune* zu Berlin.)

Lehrsatz. Wenn man in einem Vierecke mit jeder der beiden Diagonalen durch den Mittelpunct der andern eine Parallele zieht und den Durchschnittspunct dieser Parallelen mit den Mittelpuncten der vier Seiten durch gerade Linien verbindet, so theilen letztere das Viereck in vier flächengleiche Theile.

Beweis. In dem Vierecke $ABCD$ (Taf. II. Fig. 1.) seien die Diagonalen AC, BD in den Puncten K, L halbirt, ferner sei MN durch L parallel mit AC, so wie QR durch K parallel mit BD gezogen. Man verbinde sowohl den Durchschnittspunct P dieser Parallelen mit A, B, C, D, als auch L mit A, C, und K mit B, D; so ist

$$1.\quad ABP+PBC=ABC+APC=ABC+ALC$$
$$=ALB+LBC=\tfrac{1}{2}ABCD,$$
$$2.\quad PBC+PCD=BPD+BCD=BKD+BCD$$
$$=BCK+KCD=\tfrac{1}{2}ABCD,$$
$$3.\quad ADP+PCD=ACD-APC=ACD-ALC$$
$$=ALD+LDC=\tfrac{1}{2}ABCD;$$

folglich

$$\text{(aus 1. und 2.)}\quad ABP=PCD,$$
$$\text{(aus 2. und 3.)}\quad PBC=ADP,$$

mithin auch, wenn nur die vier Seiten in E, F, G, H halbirt und diese Puncte mit P verbunden sind,

$$AEP=EBP=CGP=GDP,$$
$$AHP=BFP=FCP=HDP,$$

und daher

$$AEP+AHP=EBP+BFP=CGP+FCP=GDP+HDP,$$

das ist

$$AEPH=EBFP=FCGP=GDHP=\tfrac{1}{4}ABCD,$$

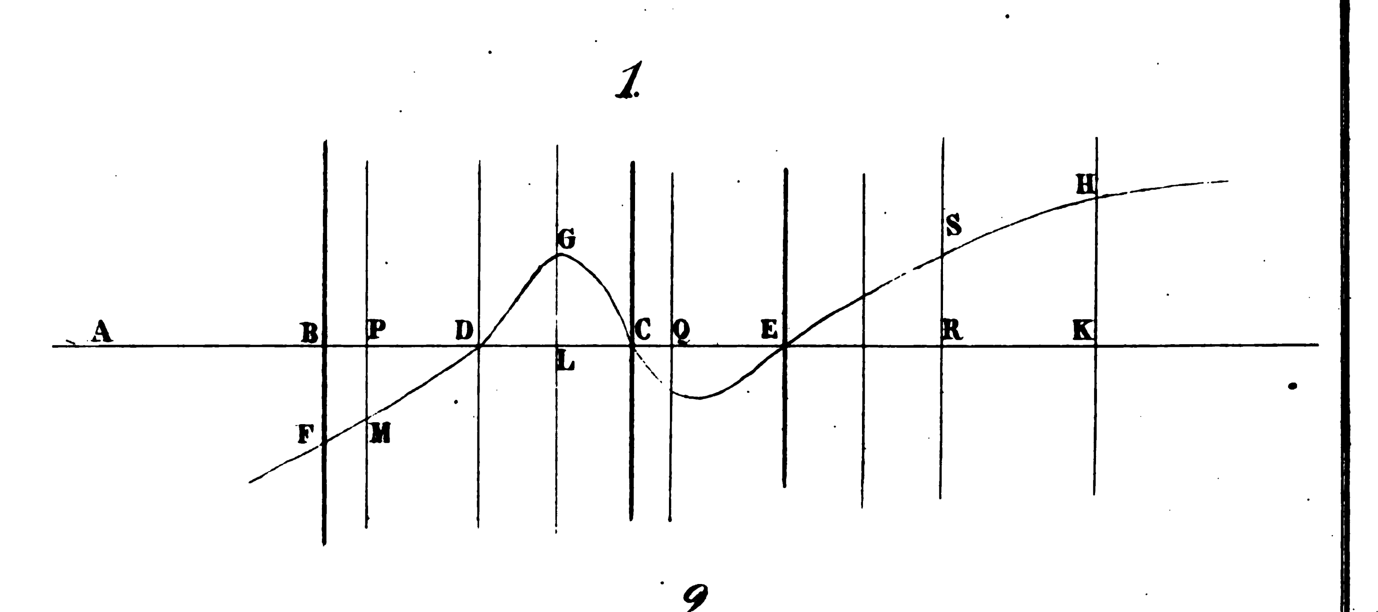
w. z. b. w.

Hätte das Viereck einen einwärts gehenden Winkel, z. B. in C, so wäre in der Beweisführung, wie leicht zu übersehen ist, nur das Zeichen $+$ vor den Dreiecken BCD, LBC, LDC, in das entgegengesetzte $(-)$ zu verändern.

Druckfehler in diesem Bande.

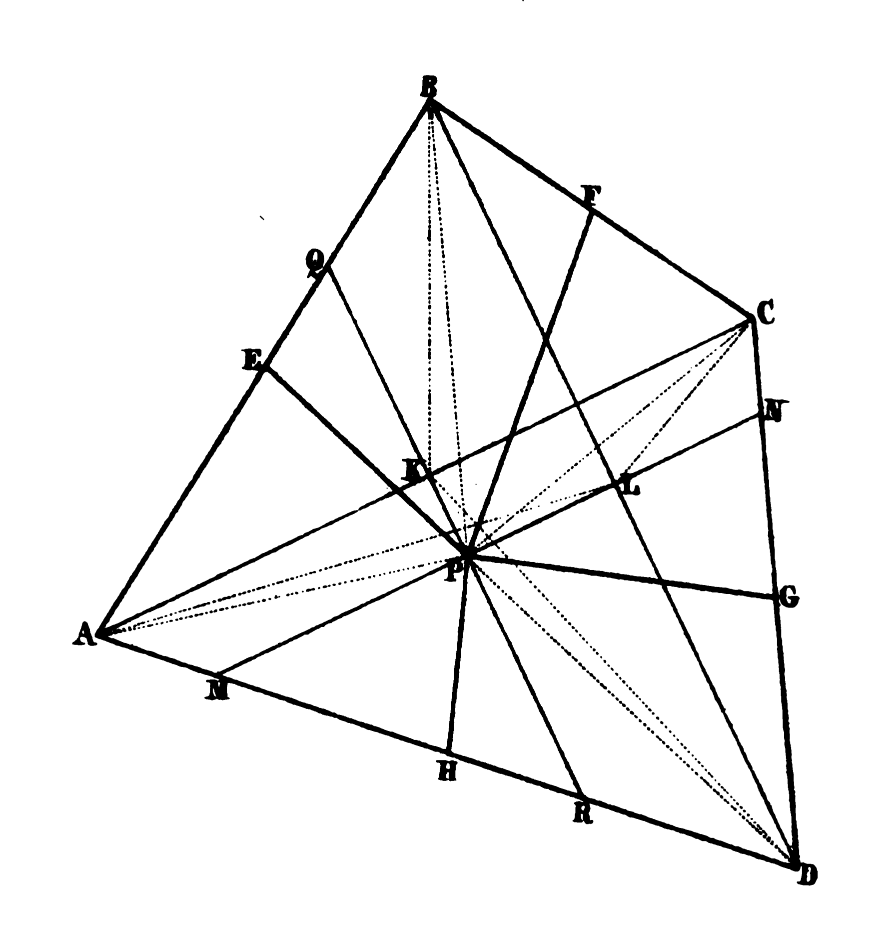
S. 4 Z. 3 v. u. statt 6. 8 l. 68
— 19 letzte Zeile st. α l. a
— 20 Z. 2 v. o. st. α l. a
— — — 11 v. o. st. a l. α
— 21 — 7 v. o. st. α l. a
— — — 4 v. u. st. Zwischenwechsel l. Zeichenwechsel
— 22 — 9 v. u. st. mehre l. mehr
— 40 — 5 v. u. st. $f'x$ l. $F^{XI}x$
— 44 — 13 v. o. st. $>$ l. $<$
— 52 — 1 v. o. st. f^{x+2} l. f^{n+2}
— 59 — 13 v. u. st. welche seine l. welches eine
— 303 — 3 v. o. st. instruerunt l. innotuerunt
— 348 — 3 v. u. st. $\frac{(n+m+1)(n+m)\ldots.(n+1)}{1.2.3\ldots.(m+1)}$
l. $\frac{(n+m+1)(n+m)\ldots.(n+2)}{1.2.3\ldots.m}$

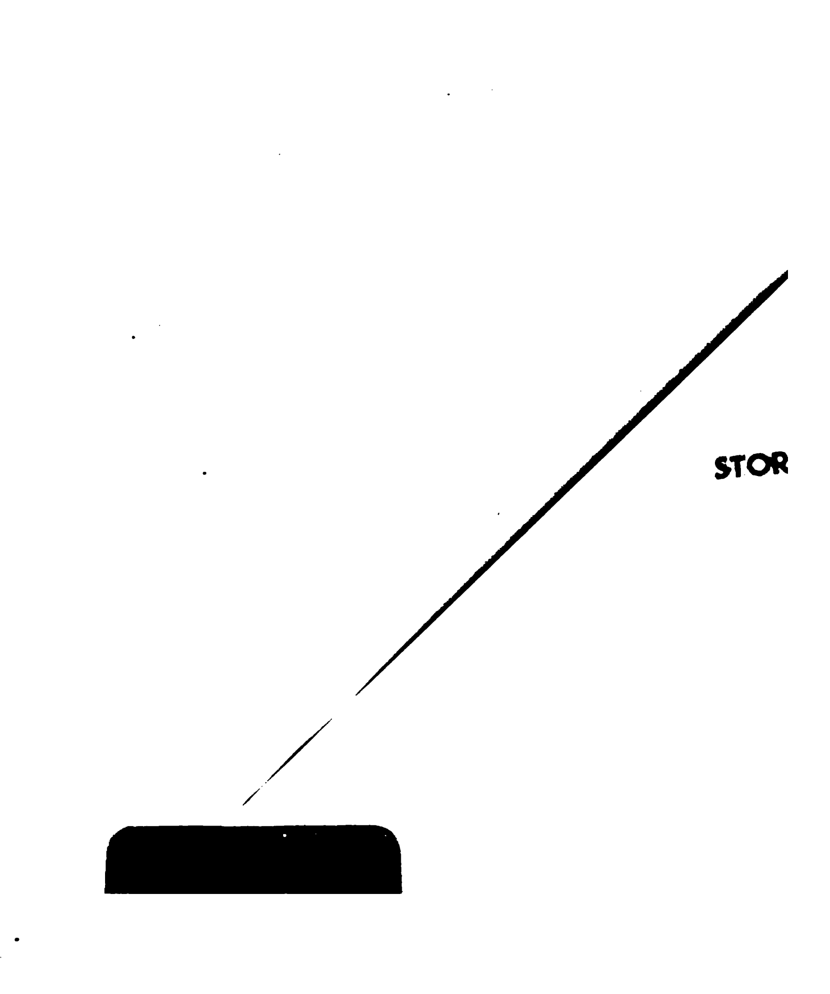
1.



2.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2		2		2		2		2		2		2		2		2
3			3			3			3			3			3	
4				4				4				4				4
5					5					5					5	
6						6						6				
7							7							7		
8								8								8
9									9							
10										10						
11											11					
12												12				
13													13			
14														14		
15															15	
16																16


B
F
Q
C
E
N
K
L
P
G
A
M
H
R
D


STOR

